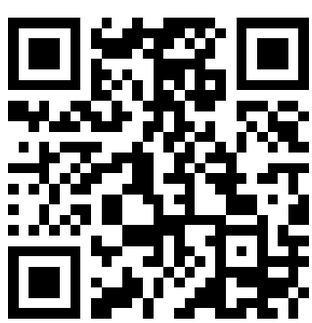
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

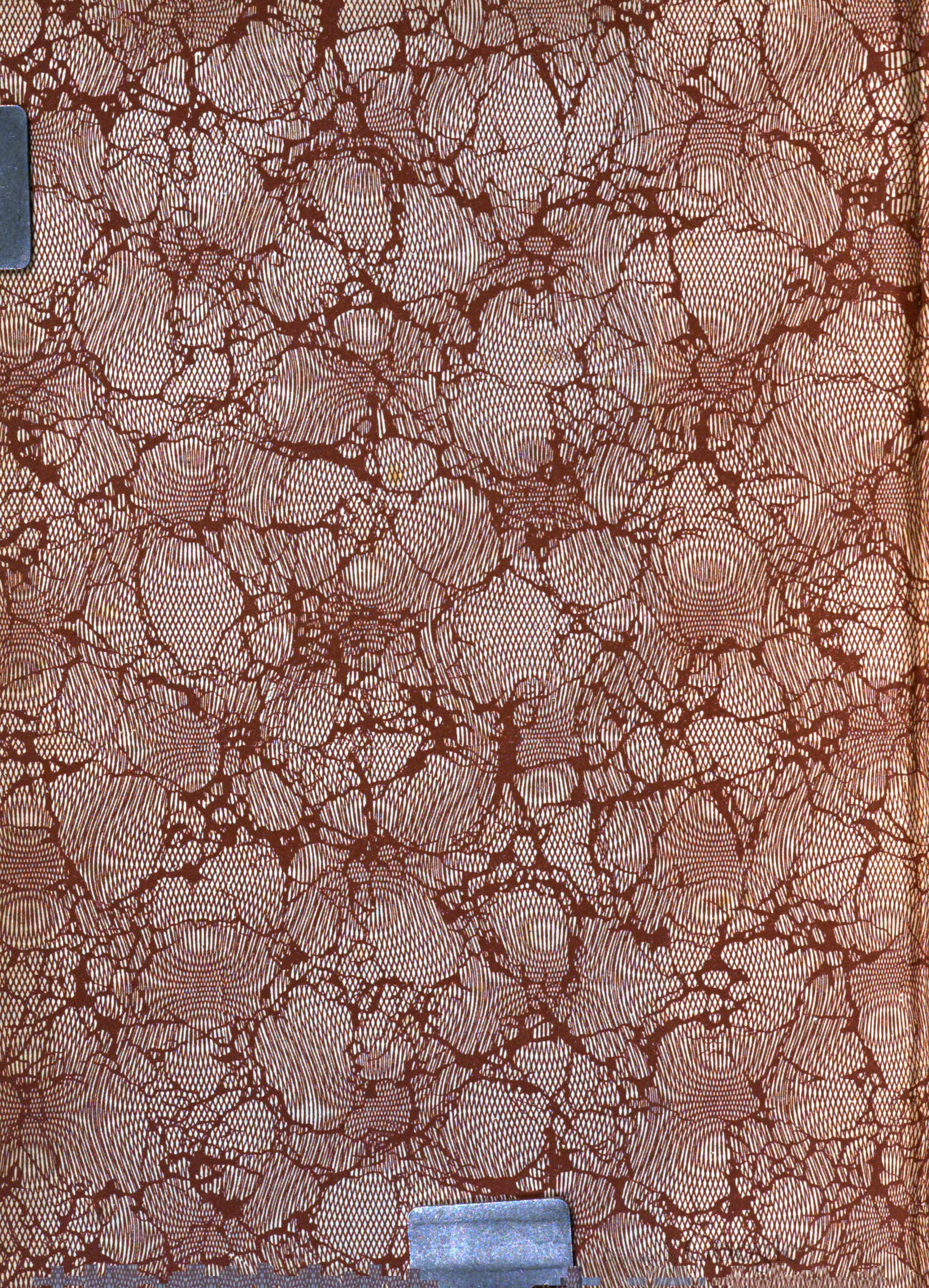
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google



Digitized by Google

MEMORIE

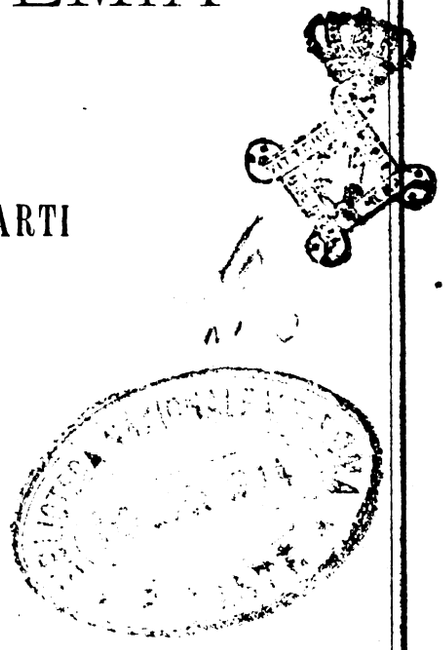
DELLA

REGIA ACCADEMIA

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

IN MODENA



TOMO XVIII

Digitized by Google

NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
II
Atti Accad.
101

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MEMORIE

DELLA

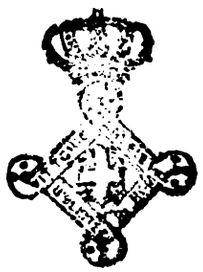
REGIA ACCADEMIA

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

IN MODENA

TOMO XVIII



MODENA
SOCIETÀ TIPOGRAFICA
ANTICA TIPOGRAFIA SOLIANI

1878.

Digitized by Google

Digitized by Google

QUADRO DELLE CARICHE

DELLA

R. ACCADEMIA DI SCIENZE LETTERE ED ARTI

IN MODENA

Per l' Anno 1877-78.

PRESIDENTE

CAMPORI Marchese Cav. GIUSEPPE

Segretario Generale

BORTOLOTTI Avv. PIETRO

Vice-Segretario Generale

ROSSI Prof. LUIGI

Bibliotecario

FRANCIOSI Prof. Avv. GIOVANNI

Archivista

CAPPELLI Cav. ANTONIO

Tesoriere

MALAVASI Prof. Cav. LODOVICO

Economo

MASI Cav. Ing. DOMENICO

Deputato alla Custodia del Medagliere

CRESPELLANI Dott. REMIGIO

Digitized by Google

CARICHE DELLE SEZIONI

DIRETTORI

Per le Scienze Puglia cav. prof. Alessandro
Per le Lettere Vaccà comm. prof. Luigi
Per le Arti Camuri cav. prof. Antonio

CENSORI

Per le Scienze Marianini cav. prof. Pietro Domenico
Per le Lettere Sandonnini comm. avv. Claudio
Per le Arti Asioli cav. prof. Ferdinando

SEGRETARI

Per le Scienze Ragona cav. prof. Domenico
Per le Lettere Raisini cav. prof. avv. Guglielmo
Per le Arti Nicoli prof. ing. Francesco

SOCI PERMANENTI

Borghi cav. Carlo
Campori comm. marchese Cesare
Campori cav. marchese Giuseppe
Camuri cav. prof. ing. Antonio
Crespellani dott. Remigio
Doderlein prof. Pietro
Franciosi prof. avv. Giovanni
Galassini prof. avv. Girolamo
Marianini cav. prof. Pietro Domenico
Puglia cav. prof. Alessandro
Ragona cav. prof. Domenico

Digitized by Google

Raisini cav. prof. avv. Guglielmo
Razzaboni cav. prof. ing. Cesare
Riccardi cav. prof. Pietro
Ruffini cav. prof. ing. Ferdinando
Salimbeni cav. prof. conte Leonardo
Vaccà comm. prof. Luigi
Veratti cav. avv. Bartolomeo
Vecchi cav. Giovanni

SOCI ATTUALI

Abbati Marescotti conte Paolo
Antonielli cav. prof. Giuseppe
Asioli cav. prof. Ferdinando
Bezzi cav. prof. Giovanni
Bonasi prof. avv. conte Adeodato
Bortolotti avv. Pietro
Boni cav. avv. Carlo
Bonizzi prof. Paolo
Brandoli prof. avv. Placido
Bruni prof. Luigi
Calori-Cesi marchese Ferdinando
Cappelli cav. Antonio
Carbonieri cav. avv. Luigi
Carruccio prof. Antonio
Casarini cav. prof. Giuseppe
Ferrari prof. can. don Gaetano
Fogliani prof. capitano Tancredi
Giacobazzi conte Luigi
Gibelli cav. prof. Giuseppe
Giovanardi cav. prof. Eugenio
Lodi cav. Luigi
Malatesta cav. prof. Adeodato
Malavasi cav. prof. Lodovico
Manfredi prof. Nicolò
Martinelli prof. Filippo

Digitized by Google

Masi cav. ing. Domenico
Nicoli prof. ing. Francesco
Puglia prof. Giuseppe
Ricci prof. don Domenico
Rossi prof. Luigi
Sabbatini cav. Mauro
Sala cav. prof. avv. Erio
Sandonnini comm. avv. Claudio
Sereni prof. Gioachino
Storchi cav. prof. ing. Felice
Tarasconi prof. don Gio. Battista
Urtoler cav. ing. Domenico
Vischi cav. prof. don Luigi
Zannini prof. ing. Francesco

SOCI SOPRANNUMERARI

Biagi prof. don Michele
Borsari avv. Francesco
Businelli cav. prof. Francesco
Canestrini cav. prof. Giovanni
Carpi cav. cons. avv. Francesco
Celi cav. prof. Ettore
Chiesi comm. sen. avv. Luigi
Corradi cav. prof. Alfonso
De-Meis prof. Camillo
Fabiani prof. can. Giuseppe
Forni conte Giuseppe
Generali prof. Giovanni
Mazzini cav. prof. don Pietro
Mazzoni-Pacifici cav. prof. Emidio
Montanari comm. sen. Antonio
Pepoli comm. march. Gioachino Napoleone
Raggi cav. prof. Oreste

Digitized by Google

Riccò prof. ing. Annibale
Roncaglia prof. Emilio
Rovighi ten. col. cav. Cesare
Sbarbaro prof. Pietro
Selmi cav. prof. Francesco
Spaventa prof. Bertrando
Todde prof. avv. Giuseppe
Vella cav. prof. Luigi
Viani cav. prof. Prospero
Zini comm. avv. Luigi

SOCI CORRISPONDENTI

Angelucci magg. Angelo, *Torino*
Araldi cav. generale Antonio, *Mantova*
Arrivabene conte Oprandino, *Torino*
Barera cav. Carlo, *Milano*
Battaglini cav. prof. Giuseppe, *Roma*
Berchet comm. dott. Guglielmo, *Venezia*
Berti dott. Antonio, *Venezia*
Berti comm. prof. Domenico, *Firenze*
Betocchi cav. prof. ispett. Alessandro, *Roma*
Betti comm. prof. Enrico, *Pisa*
Bianchi comm. Nicomede, *Torino*
Bianconi cav. prof. Gio. Giuseppe, *Bologna*
Boncompagni principe Baldassare, *Roma*
Brioschi comm. prof. sen. Francesco, *Milano*
Calori cav. prof. Luigi, *Bologna*
Carrara cav. prof. Francesco, *Pisa*
Cenedella prof. dott. Attilio. *Brescia*
Checcucci P. Alessandro, *Firenze*
Chierici cav. prof. don Gaetano, *Reggio Emilia*
Conti comm. prof. Augusto, *Firenze*
Correnti comm. Cesare, *Firenze*
Cremona cav. prof. Luigi, *Milano*

Digitized by Google

Davis di Schetton Bernard, *Londra*
Del-Rio prof. don Prospero, *Reggio Emilia*
De-Rossi cav. Michele Stefano, *Roma*
Denza cav. prof. Francesco, *Moncalieri*
Didion generale Isidoro, *Parigi*
Ellero cav. prof. Pietro, *Bologna*
Fanfani cav. prof. Pietro, *Firenze*
Favaro prof. Antonio, *Padova*
Ferrari cav. prof. avv. Paolo, *Milano*
Fornari cav. ab. Vito, *Napoli.*
Garbiglietti cav. dott. Antonio, *Torino*
Giuliani comm. prof. Gio. Battista, *Firenze*
Govi comm. prof. Gilberto, *Torino*
Gozzadini comm. sen. conte Giovanni, *Bologna*
Guasti comm. Cesare, *Firenze*
Lampertico comm. sen. Fedele, *Vicenza*
Lancia di Brolo Federico, *Palermo*
Lombardini comm. sen. ing. Elia, *Milano*
Luppi prof. Geminiano, *Lione*
Maggiora-Vergano Brichetti Ernesto, *Asti*
Magni cav. prof. sen. Francesco, *Bologna*
Mantegazza cav. prof. sen. Paolo, *Firenze*
Marchese P. Vincenzo, *Genova*
Marzolo cav. prof. Francesco, *Padova*
Menabrea comm. sen. conte Luigi Federico, *Torino*
Meneghini comm. prof. Giuseppe, *Pisa*
Messina prof. Pietro, *Palazzolo*
Milli signora Giannina, *Teramo*
Moleschott comm. prof. sen. Giacomo, *Torino*
Nicolucci prof. Giustiniano, *Isola di Sora*
Pareto cav. march. Raffaele, *Firenze*
Poggi comm. sen. Enrico, *Firenze*
Ricotti comm. prof. sen. Ercole, *Torino*
Rizzoli comm. prof. Francesco, *Bologna*
Ronchini cav. prof. Amadio, *Parma*
Sapio cav. prof. Giuseppe, *Palermo*
Sella comm. Quintino, *Torino*

Digitized by Google

Selvatico cav. march. Pietro, *Padova*
Siotto-Pintòr comm. sen. avv. Giovanni, *Roma*
Sismonda comm. prof. sen. Angelo, *Torino*
South sir James, *Londra*
Tacchini cav. prof. Pietro, *Palermo*
Targioni-Tozzetti comm. prof. Adolfo, *Firenze*
Tavani mons. Francesco, *Roma*
Tommasi comm. prof. sen. Salvatore, *Pavia*
Zanella cav. prof. abb. Jacopo, *Padova*
Zanetti prof. cav. Ferdinando, *Firenze.*

SOCI ONORARI

Bellavitis comm. prof. sen. conte Giusto, *Padova*
Beltrami cav. prof. Eugenio, *Roma*
Becquerel prof. Antonio, *Parigi*
Berthollet prof. Marcellino, *Parigi*
Cantù comm. Cesare, *Milano*
Chasles prof. Michele, *Parigi*
Cavalli comm. gen. Giovanni, *Torino*
Centofanti comm. prof. sen. Silvestro, *Pisa*
De-Gasparis comm. prof. sen. Annibale, *Napoli*
De Rossi comm. Gio. Battista, *Roma*
Duprè comm. prof. Giovanni, *Firenze*
Ferrara prof. Francesco, *Palermo*
Ferrucci cav. prof. Michele, *Pisa*
Iacini comm. sen. Pietro, *Milano*
Iordao Levy cav. Maria, *Lisbona*
Labus cav. dott. Pietro, *Milano*
Liais Emanuele, *Rio Janeiro*
Mamiani comm, prof. sen. conte Terenzio, *Roma*
Mommsen prof. Teodoro, *Berlino*
Piazzi Smyth prof. Carlo, *Edimburgo*
Regnault prof. Enrico Vittore, *Parigi*

Digitized by Google

Schiapparelli comm. prof. Giovanni, *Milano*
Tosti abb. Luigi, *Montecassino*
Turazza comm. prof. Domenico, *Padova*
Virchow prof. Rodolfo, *Berlino*

Digitized by Google

RELAZIONI

DELL' ANNO ACCADEMICO 1877-78

PROGRAMMA

PEL CONCORSO AI PREMI D' ONORE DELL' ANNO 1877-78

19 Dicembre 1877.

I premi che annualmente si distribuiscono dalla R. Accademia sono distinti in tre classi.

La prima comprende un solo premio della somma di italiane lire 1200, da conferirsi all' autore d' una *composizione drammatica*, d' indole e di argomento qualsivoglia, ma acconcia alla pubblica rappresentazione, e tale che indirizzata a scopo di moralità, muova il popolo a virtù col mezzo del diletto.

La seconda classe comprende due premi della complessiva somma di italiane lire 1000, da distribuirsi in parti eguali agli autori di due *Memorie* o *Dissertazioni* sopra temi *morali-politici* proposti dalla R. Accademia, e che dalla medesima saranno riconosciute degne della corona.

La terza classe finalmente comprende due premi della complessiva somma di italiane lire 800, da distribuirsi in quote eguali a due tra gli inventori di qualche *nuovo e vantaggioso metodo di agricoltura* debitamente dichiarato, o di qualche *perfezionamento di un' arte qualsiasi propriamente detta.*

Digitized by Google

La R. Accademia pertanto, col mezzo della Direzione Centrale, scelse i due temi *morali-politici* qui sotto notati pel *Concorso* del corrente anno 1877-78: il primo de' quali si ripropone in quest' anno, essendo mancato di concorrenti nel precedente *Concorso* 1776-77.

I.

Delle tendenze dei maggiori centri di popolazione ad appropriarsi le istituzioni che sono vita e decoro dei centri minori; dei pericoli e dei danni che ne risultano negli ordini morale, politico ed economico, e dei rimedi.

II.

Indicare le istituzioni di pubblica beneficenza che più non servano allo scopo pel quale furono fondate, e i modi e i temperamenti da adoperarsi per rivolgerle all' utilità presente e per non distogliere gli animi da ulteriori elargizioni.

Il *Concorso* è aperto a' dotti italiani ed esteri, riguardo ai premi della 1.ª e della 2.ª classe; ma riguardo ai premi della 3.ª classe viene limitato agli abitanti delle provincie di Modena e di Reggio: ai quali altresì rammentasi, che i nuovi metodi di agricoltura, che avranno a proporre, si vogliono applicabili all' agricoltura usata nelle provincie stesse.

Gli scritti spettanti a' premi della prima classe devono essere in lingua italiana; quelli della seconda possono essere anche nella latina: i primi possono, i secondi debbono, essere anonimi e contrassegnati da un motto. Questi anonimi componimenti saranno accompagnati da scheda o lettera suggellata, portante al di fuori il motto medesimo e al di dentro il nome, cognome, patria e domicilio dell' autore; dovendosi poi anche evitare negli scritti stessi qualunque indizio che possa far conoscere l' autore medesimo.

Tutti i componimenti inviati al *Concorso* dovranno essere inediti, e chiaramente e nitidamente scritti, altrimenti non saranno presi in esame. E si spediranno, franchi di porto, al più tardi entro il 31 Ottobre 1878 (termine di rigore) col seguente indirizzo: *Al Presidente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena.* Dalla Presidenza poi verranno trasmessi alle rispettive Commissioni elette a giudicarli.

Gli Agricoltori e gli Artisti che intendano di aspirare al *Concorso* dovranno avere entro il predetto termine presentato, quanto agli Agricoltori, la descrizione succinta ed esatta del loro ritrovato, con indicazione del luogo a cui avesse a riferirsi, affinchè l' Accademia possa poi procedere alle verificazioni che fossero opportune; e quanto agli Artisti, i loro lavori nel

Digitized by Google

luogo che verrà designato dall' Accademia per esaminarli e quindi giudicarli. Sì gli uni, che gli altri, amando rimanere occulti, non avrebbero che a regolarsi in modo consimile a quello de' concorrenti a' premi delle altre due classi.

Quanto ai componimenti drammatici, (commedia, tragedia, o dramma), nel valutare il merito dei medesimi si guarderà ai loro pregi artistici e allo scopo morale.

Le condizioni richieste per l' ammissione al *Concorso* dei temi drammatici sono le seguenti:

1.° Che il componimento non sia stato rappresentato, e non abbia conseguito altro premio.

2.° Che l' autore, serbando l' anonimo, o facendosi riconoscere, faccia recitare la sua produzione in uno dei pubblici teatri di Modena, entro l' anno del *Concorso:* avvisando in ogni caso il Presidente dell' Accademia, otto giorni prima della rappresentazione, del giorno fissato per la medesima, onde la Commissione giudicatrice possa intervenirvi.

3.° Che entro otto giorni dalla recita si consegni dall' Autore, o da chi per lui, il manoscritto alla Presidenza dell' Accademia.

Il voto ragionato della Commissione giudicante verrà notificato dal Presidente all' autore se favorevole, ed anche se sfavorevole, quando l' autore ne faccia domanda.

Le schede delle produzioni riconosciute meritevoli del *premio* o dell' *accessit* saranno colle dovute formalità subito aperte; le altre saranno conservate nella loro integrità per un anno, allo scopo di potere all' uopo verificare l' identità degli autori che chiedessero la restituzione delle produzioni presentate; scorso il qual termine, le schede delle memorie non richieste saranno date alle fiamme.

Quegli autori poi che bramassero ricuperare i loro manoscritti, dovranno destinare persona in Modena che li rappresenti, per giustificare l' identità delle produzioni colla esibizione del motto che le accompagna, e rilasciarne ricevuta.

A spese dell' Accademia saranno impressi i componimenti premiati; a parte quelli della prima classe, nelle *Memorie* accademiche quelli della seconda; e d' un conveniente numero d' esemplari saranno presentati gli autori. L' onore della stampa potrà a giudizio della Direzione Centrale, essere conferito eziandio agli scritti riconosciuti meritevoli dell' *accessit*, sempre che gli autori ne esprimano il desiderio.

Digitized by Google

ATTO DI AGGIUDICAZIONE DEI PREMI D' ONORE DEL CONCORSO 1876-77

9 Novembre 1877.

Adunatasi in questo giorno la Direzione Centrale dell' Accademia è proceduta alla definitiva assegnazione dei premi d' onore pel Cancorso 1876-77, pubblicato già con Programma 22 Luglio 1876 (*).

E prese in esame le relazioni esibite dalle tre Commissioni regolarmente elette pel rispettivo giudizio dei varii lavori morali-politici, drammatici e d' arte presentati al concorso, la Direzione è passata a proclamare le risultanze seguenti.

1.° Di tre componimenti inviati al Concorso sul primo de' proposti due temi morali-politici, *Se lo Stato debba ingerirsi nelle materie della emigrazione*, (niuno essendosene offerto sul tema secondo), essere stata riconosciuta degna della corona la Memoria portante per motto « *Quanto più la madre patria.....* (vers. dal tedesco) ». A termini pertanto degli Art. VI e VIII del vigente Regolamento 21 Gennaio 1864 ha la Direzione deliberato:

Conferirsi il premio d' onore all' autore della Memoria suddetta; che, aperta la relativa scheda, si è riconosciuto essere il Sig. GIANNETTO CAVASOLA dimorante a Porto Maurizio.

2.° Non essersi fatto luogo a conferimento di premio, o all' onore dell' *Accessit*, quanto all' unico componimento drammatico mandato al concorso.

3.° In materia d' arte poi essendosi presentati a concorrere il sig. FELICE RICCÒ di Modena, per un suo metodo d' intarsio in legno a colori, e il sig. PIETRO BONILAURI pure di Modena per un suo meccanico ingegno da staccare a un tratto i cavalli in corsa da una carrozza; trovati, che la Commissione giudicatrice riconosce, se non degni in tutto della pienezza del premio, meritevoli peraltro d' encomio e d' una gratificazione d' incoraggiamento, ch' essa propone in L. 150 pel primo e L. 100 pel secondo, la Direzione Centrale ha deliberato assegnarsi, a detto titolo, agl' inventori le somme proposte.

(*) V. il preced. T. XVII pag. I.

Digitized by Google

ADUNANZE GENERALI

5 Dicembre 1877.

A inaugurare il nuovo anno accademico 1877-1878 sonosi convocati i Soci in generale adunanza la sera di questo giorno, alle ore 7. E nell' assenza del Segretario Generale, conte cav. Leonardo Salimbeni, passato a dimorare altrove, ha il Vice Segretario letta a nome del collega la relazione di lui sui dotti lavori pubblicati nel decorso anno dai Soci nel XVII volume delle *Memorie*, ora uscito in luce, sulle deliberazioni prese dall'Accademia e dalla Direzione Centrale e sulle cresciute corrispondenze con altri Istituti scientifici nazionali e stranieri; concludendosi colla commemorazione de' Soci mancati nel frattempo di vita e con gentili parole di commiato da' Colleghi.

La lettura è accolta con generale approvazione: e, per mozione del cav. prof. Alessandro Puglia, determina l'Accademia inviarsi per telegramma, seduta stante, al Salimbeni espressioni di congratulazione e rincrescimento per la lontananza sua.

Passandosi poi alla triennale rinnovazione degli uffici accademici, restano a unanimità di voti confermate le cariche attuali. Sol nella Segreteria, per la partenza del Salimbeni e promozione del Bortolotti, si fa luogo alle nuove nomine seguenti: Bortolotti avv. Pietro a Segretario Generale; Rossi prof. Luigi a Vice Segretario Generale.

Vengono indi eletti a Soci Attuali, Manfredi dott. Nicolò, professore di oftalmoiatria e clinica oculistica in Modena, e Lodi cav. Luigi, vicebibliotecario della Estense; a Socio Corrispondente Favaro Antonio, professore di statica grafica e di calcolo infinitesimale in Padova.

Da ultimo dà comunicazione il Presidente d' un pendente progetto della istituzione d' uno scientifico Gabinetto di lettura presso la Biblioteca di questa R. Università; stabilimento, a pro del quale sarebbe desiderato che, colle debite cautele, potesse essere utilizzata la preziosa raccolta di pubblicazioni periodiche che da buon numero delle più illustri Accademie dei

Digitized by Google

due emisferi riceve in cambio la nostra. E considerando il profitto che potrebbe derivare ai dotti e agli studiosi dalla divisata istituzione; la quale ridonderebbe a decoro della città e colmerebbe una lacuna lamentata da molti fra noi; la proposta è accolta con tutto il favore: ed è fatta facoltà alla Direzione Centrale di prendere ogni opportuno accordo e provvedimento.

2 Luglio 1878.

Sul chiudersi dell' anno accademico si è ieri raccolta, conforme l' usato, questa R. Accademia in generale adunanza per procedere, (con due segrete votazioni, il cui scrutinio sarà poi segretamente eseguito dalla Direzione Centrale), alla nomina de' rispettivi Giudici del Concorso accademico 1877-1878, tanto pei temi morali-politici, quanto pei componimenti drammatici. Essendo poi rimasto vacante l' ufficio di *Economo* dell' Accademia, per rinuncia del cav. prof. Antonio Camuri, è stato a tale incarico unanimente eletto il cav. ing. Domenico Masi.

Da ultimo la Presidenza comunica gli accordi seguiti, (in conformità della determinazione presa nella precedente adunanza generale 5 Dicembre 1877), colla Direzione dello scientifico Gabinetto di lettura istituito con ministeriale approvazione presso la Biblioteca di questa R. Universita; accordi, pei quali la R. Accademia volonterosamente si presta, sotto le debite clausole a tutela del proprio interesse e de' poziori diritti degli Accademici, al periodico prestito grazioso, a favore del nascente Istituto, delle preziose pubblicazioni scientifiche che da molte illustri Accademie nazionali e straniere di varie parti del mondo essa riceve in cambio delle sue. La relativa scrittura d' accordo è unanimemente approvata.

Digitized by Google

ADUNANZE DELLE SEZIONI

Adunanza della Sezione di Lettere

19 Dicembre 1877.

Il Segretario Generale avv. P. Bortolotti imprende a leggere una sua memoria di primitiva metrologia egizia; cominciando da' cubiti faraonici venuti fortunatamente in luce in questo secolo da vetusti ipogei. Preziosi cimelii di suprema importanza metrologica; argomento di studi, non sempre concordi, de' più chiari metrologi, e d' una magistrale dissertazione del Lepsius: classico lavoro in questa materia, ma non tale però da aver preclusa ad altri ogni via da potere aggiugnere alcun che e proporre qualche fondata emendazione. La strettezza del tempo, (dovendo seguire altra produzione accademica), non permette che una parziale lettura del primo capitolo. Nel quale, toccate le rimotissime origini e memorie del cubito, unità lineare di cui la stessa natura ha offerto il modulo nel braccio umano, si descrivono i vari cubiti egizii superstiti, e si discute l' opinione del Lepsius che tutti sieno mere imitazioni di solo uso sepolcrale. Espostane poi la forma e la divisione, si rileva il merito assoluto della ingegnosa suddivisione progessiva del digito egizio, dal *mezzo* fino al *sedicesimo;* partizione superiore d' assai, per ampiezza di vedute ed esattezza di risultati, a quella dei millimetri del nostro centimetro; benchè i suoi teorici vantaggi andassero poi nell' ordine pratico perduti per l' imperfetto sistema egizio delle frazioni, aventi per ordinario numeratore la sola unità.

Indi il socio permanente e Bibliotecario prof. G. Franciosi legge un suo Carme, ove si adombrano le occulte pugne e i trionfi del *Volere;* nel cui seno misterioso ebbe nascimento quanto di più alto e solenne fu operato dagli uomini.

« Così, del vasto mar nei ciechi abissi
Nata, al flagello de' marosi indura
L' ardua rupe, che poi, d' aperti Soli
Vestita o di bufere, a nuove genti
L' istoria insegni del vetusto lido. »

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

4 Febbraio 1878

Il Direttore della Sezione, commendatore Alessandro Puglia, apre la seduta commemorando con le seguenti parole il magnanimo Re Vittorio Emanuele II:

Onorevoli Signori!

Dopo la grande sventura per la quale fu rapito all' Italia quel Re magnanimo che in un col risorgimento nazionale e colle libere istituzioni instaurò e promosse il libero culto delle scienze e delle Arti, è questa la prima volta che qui ci raccogliamo per l' ordinaria ricorrenza delle nostre tornate accademiche. — La luttuosa ciscostanza rende il momento altamente solenne: nè per vero saria possibile riprendere il corso de' trattenimenti nostri senza compiere il sacro dovere di dare sfogo a quel sentimento di profondo cordoglio che tutta Italia commosse al fatale annunzio della calamità inaspettata, nè potrebbesi reprimere nel cuore e tener muta sul labbro quella parola di compianto che, a testimonio e a tributo del dolorosissimo evento, comanda e vuole ogni santa ragione sia inesorabilmente la prima.

E noi certamente, nella speciale qualità di Accademici, non potremmo qui mancare infingardi a quell' omaggio di ben giusta riconoscenza che dobbiamo all' angusto monarca, pel favore largamente da lui concesso, mercè ancora questi nostri convegni, al risveglio e all' incremento della vita intellettuale e scientifica, in virtù della quale specialmente si promuovono il progresso della civiltà e il decoro delle nazioni.

Permettetemi adunque, colleghi prestantissimi, che aprendo io per mio ufficio quest' adunanza speciale della Sezione di scienze, mi faccia interprete d' un desiderio e d' un voto, che mi è caro supporre comune a quanti pur siamo membri dell' intero corpo aceademico, e che non altrimenti può esprimersi e manifestarsi che pronunciando primamente, e innanzi che faccia udire i suoi dettati la scienza, la parola del dolore supremo sacro alla memoria del glorioso che perdemmo, parola non disgiunta dal giuro incrollabile d' una riconoscenza imperitura agli efficacci proteggimenti, di cui avemmo pure a sperimentare i benefici preziosi.

Digitized by Google

Ma benchè venga da noi per siffatto modo iniziato lo scioglimento d'un obbligo sacrosanto, io punto non dubito che al pieno soddisfacimento di esso un altro ardente desiderio, un altro fervido voto, quale irresistibile bisogno, non si svegli in questo medesimo solenne momento, come nel mio, così nell'animo di tutti voi. — Ai giorni ferali della sventura succedono omai giorni confortevoli di fiducia, dappoichè sorge omai e ci rinfranca il generoso continuatore dell'opera paterna, colle memorabili e sublimi parole = *muoiono i Re, ma le istituzioni non muoiono.* =

Animati noi da cotanto lusinghevoli auspici, se ci accingiamo a progredire nelle nostre accademiche esercitazioni, dobbiamo pure, quanto sentirci, altrettanto mostrarci, non men fiduciosi che grati al patrocinatore benefico, che ci porge sì nobili ed incoraggianti guarentigie.

Io propongo adunque, illustri colleghi, che a sdebitarci del cómpito che religiosamente a noi spetta, in questa prima nostra tornata, mentre conserviamo i sentimenti di amara unanime condoglianza alla memoria del perduto Re Vittorio Emanuele, professiamo pur quelli della più viva e rasicurante fiducia nella maestà del novello Re nostro Umberto I; — propongo, che tenendo nota di ciò nei nostri Atti, ci facciam pregio di recare notizia del riverente duplice omaggio all'egregio Ministro che regge la pubblica istruzione; — propongo infine, che a queste nostre legittime aspirazioni vogliasi data la maggiore possibile pubblicità.

Un simile partito io sottopongo volonteroso all'approvazione vostra, che ambisco ripromettermi e generale e solenne.

Indi il socio attuale prof. Giuseppe Casarini legge la prima parte di un suo lavoro « documenti statistici sopra varii punti di chirurgia con osservazioni e commentarii. »

In questa prima parte, dopo un breve cenno intorno ai tumori erettili, espone i risultati ottenuti colla vaccinazione nella cura dei medesimi. Accennata l'opinione del Porta e di altri chirurghi poco favorevoli a tal metodo di cura, espone il processo migliore per l'inoculazione del vaccino, e descrive una modificazione fatta al processo di Nelaton, con la quale si possono curare anche gli Angiomi sottocutanei evitando qualunque siasi deformità. Passa poi il socio a dare relazione di alcuni casi di tumori erettili del labbro inferiore nei quali si ottenne la guarigione col caustico di Vienna applicato con un processo semplicissimo.

Il Prof. Casarini termina la sua lettura dando una particolareggiata relazione della cura di un'angioma fatta coll'iniezione dell'acqua Pagliari.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Lettere

15 Febbraio 1878

Il Segretario Generale avv. Pietro Bortolotti ripiglia la interotta lettura della sua memoria sul *Cubito Faraonico*, incominciata nella precedente adunanza del 19 Dicembre 1877. E toccato delle intermedie divisioni di quel cubito, *Ser* e *Remen*, (4 palmi e 5 palmi), rispondenti al *pes* e al *palmipes* de' latini, si mostra la derivazione di queste, come di tutte le altre frazioni del cubito, dalle umane proporzioni e naturali misure della mano e del braccio. Distinto poi il *picciolo*, o volgare cubito di 6 palmi dal *reale* di 7, accennatine i propri geroglifici e avvertite le irregolari notazioni interpolate in taluni de' loro campioni, si chiarisce, contro l'opinione del Lepsius, a più indizi, probabile la derivazione del cubito *reale* dal *piccolo*, e la medesimezza de' rispettivi lor *digiti*. E per molteplici e convergenti riprove, anche monumentali, si addimostra non accettevole ed irta d'insuperabili difficoltà la elaborata ricostruzione del cubito egizio proposta dal chiaro alemanno: diretta appunto a conciliare la pretesa diversità di digiti ed eterogeneità e sproporzionalità de' due cubiti, maggiore e minore, sebbene accoppiati dagli antichi sugli stessi lineari campioni. E qui, fattasi l'ora tarda, la lettura è sospesa, per riprenderla in altra tornata.

Adunanza della Sezione di Scienze

16 Marzo 1878

Il socio prof. Lodovico Malavasi dà lettura di una memoria, nella quale prende ad analizzare alcuni esperimenti più comunemente addotti a favore dell'origine chimica dell'elettricità nelle pile e mostra che dessi possono venire interpretati, in modo più soddisfacente, mediante il principio Voltiano del contatto. Aggiunge poi come, durante questi studii, egli abbia avuto occasione di osservare sviluppo di ozono, nella ordinaria ossidazione di alcuni metalli, come zinco, cadmio, in una quantità assai superiore a quella fornita in eguali circostanze dalla lenta ossidazione del fosforo.

Indi il socio permanente prof. Ragona propone un'indirizzo di condoglianza alla famiglia del Presidente per un grave lutto domestico dalla medesima recentemente sperimentato; la proposta è unanimamente approvata dai soci.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

2 Maggio 1878

Il socio prof. Francsco Nicoli legge una nota relativa alle forme geometriche fondamentali di seconda specie, e dimostra alcuni teoremi che non ha trovato esposti nelle memorie e nei trattati di geometria da lui consultati.

Premesso che le rette determinate dalle coppie di punti corrispondenti (di piani corrispondenti) di due piani collineari non sovrapposti (di due stelle collineari non concentriche) incontrano tutte una retta fissa, se questi piani (queste stelle) hanno un sol puuto (un sol piano) unito reale, ed incontrano due rette fisse non situate in uno stesso piano, se hanno due punti (due piani) uniti reali, l'Autore dimostra varie proprietà dei piani collineari sovrapposti (delle stelle collineari concentriche).

Il socio prof. Malavasi comunica un saggio di rappresentazione grafica del moto ondulatorio diretto e riflesso, tendente a facilitare ai giovani studiosi l'apprendimento delle leggi del medesimo, e quindi l'interpretazione di molti fenomeni fisici.

Compiuta la lettura delle memorie soprannotate, il socio prof. Marianini comunica alcune sue proposte di modificazioni agli apparecchi attualmente conosciuti per gli usi del telefono.

Adunanza della Sezione di Lettere

16 Maggio 1878.

Il Vice Segretagio Generale prof. L. Rossi, a nome del Segretario Generale avv. P. Bortolotti assente, continua e termina la lettura della memoria di lui intorno al *Cubito Faraonico,* cominciata già e proseguita in altre due precedenti adunanze.

Esaurito già prima tutto ciò che riguarda il cubito in sè e nelle varie sue parti, si passa a toccare de' visibili rapporti tra gli antichisimi due cubiti egizi, il *piccolo* e il *reale,* ed altri vetusti cubiti stranieri: soprattutto cogli assiro-caldaici, rivelati da recenti scoperte, e coll' olimpico, perfettamente noto pe' suoi rapporti col piede romano e per la misurazione dell' ecatompeda fronte del Partenone: precipuo e notevolissimo tra' greci cubiti o

Digitized by Google

piedi. sin qui confuso col piccolo cubito egizio; ma che parrebbe non essere invece che un piccolo cubito assiro.

Riassumesi infine per sommi capi il detto in questa prima dissertazione, destinata a spianare la strada ad altre successive sui pesi e sulle altre unità metriche dell' età faraonica venute a notizia nostra sin qui: conchiudendosi poi con un' occhiata alle intime affinità che insieme collegano le antiche misure lineari e visibilmente le riconducono ad una origine comune.

Adunanza della Sezione di Scienze

29 Maggio 1878

Il prof. Ragona ricorda all' Accademia un apparecchio d' invenzione del prof. Marianini, illustre scienziato che fu per molti anni uno dei più singolari ornamenti dell' Accademia medesima. Il re-elettrometro del Marianini è stato recentemente rivolto, con molto vantaggio, alle ricerche meteorologiche. Uno degli estremi del filo dell' elice annessa a questo apparecchio, si mette in comunicazione con un filo di linea telegrafica, l' altro estremo col filo terrestre. Il re-elettrometro così disposto, registra tutte le correnti istantanee, fa conoscere la loro direzione, la loro intensità, e somministra importanti nozioni sui fenomeni elettrici che accompagnano i temporali. Nel Belgio il re-elettrometro del prof. Marianini (che si costruisce a modico prezzo in Bruxelles dal meccanico Devos) è già applicato a varii fili telegrafici dello Stato.

Il medesimo prof. Ragona presenta all' Accademia un nuovo pluviometro, recentemente costruito pel R. Osservatorio di Modena. Questo apparecchio fa conoscere esattamente la distribuzione oraria della pioggia caduta in un giorno.

Adunanza della Sezione di Scienze

15 Giugno 1878.

Il socio prof. Francesco Nicoli legge un sunto della memoria del socio corrispondente prof. Antonio Favaro, intitolata *Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni.* Questa memoria sarà pubblicata nel volume in corso degli Atti Accademici.

Digitized by Google

Il socio prof. Domenico Ragona legge una memoria, contenente i risultati delle sue osservazioni sulla velocità del vento. Tratta da principio della curva diurna, e dimostra che in tutto l' anno esistono nel corso del giorno otto azioni particolari, che tendono alternativamente ad accrescere e a diminuire la velocità del vento. Però in una data epoca, giammai le otto azioni anzidette operano con uguale energia. Mentre una di esse produce i suoi massimi effetti, altre si appalesano con effetti secondari, altre si manifestano per una semplice tendenza a una fase speciale, altre si trovano in uno stato transitorio di quiescenza. L' autore chiama convenzionalmente col nome di *efficienze* queste azioni particolari, stabilisce i caratteri costitutivi di ciascuna, e le loro relazioni coi periodi termici diurni, coi periodi barometrici diurni, e col nascere e tramontare del sole.

L' autore considera in seguito il periodo annuale della velocità del vento. Dimostra che la curva annuale anemometrica è inversa della curva annuale barometrica, cioè che ha nel corso dell' anno tre minimi e tre massimi, che avvengono nelle medesime epoche dei tre massimi e dei tre minimi della pressione atmosferica. Trova infine che la curva annuale delle medie variazioni della velocità del vento è inversa della curva annuale termometrica, e si intrattiene sui corollarii che si deducono da queste concordanze.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUNTI

DELLE

ADUNANZE ACCADEMICHE

DALL'ANNO 1818-19 A TUTTO IL 1840

Continuazione (*)

(*) Veggasene il principio nel precedente volume XVII p. XXXV - LXXXII; e leggasi l'avvertenza premessavi a p. XXXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUNTI DELLE ADUNANZE ACCADEMICHE

DALL' ANNO 1818-19 A TUTTO IL 1840

Continuazione

Adunanza della Sezione di Scienze

24 Gennaio 1823.

L' Assessore della Sezione nuovamente eletto signor ANTONIO LOMBARDI trattenne questa prima adunanza, leggendo l' Elogio Storico da lui scritto, del celebre Professore Michele Vincenzo Malacarne nato a Saluzzo nel 1744 e morto in Padova l' anno 1816. Affidato l' Elogista a pubblici documenti di Opere e a non meno sicure notizie mostrò che il Malacarne si rese benemerito grandemente dell' anatomia umana e comparata, coltivò a un tempo gli studii dell' amena letteratura, illustrò la patria Storia, e perfino ottennè lode negli ozii delle Muse Italiane. Descritte furono altresì le principali vicende alle quali nella sua vita letteraria e civile soggiacque il Malacarne, che insegnò pubblicamente Medicina e Chirurgia prima nel Piemonte, poscia all' Università di Pavia, e finalmente in quella di Padova. Conservò il Professor Vincenzo nelle circostanze degli umani casi un animo sempre fermo nella virtù, e venerò ei sempre coll' opre del pari e coi sentimenti la cattolica Religione che accolse l' ultimo di lui respiro. L' Elogio che che ne abbiam annunziato uscirà in luce negli attl della Società Italiana, alla quale il celebrato Professore apparteneva.

Adunanza della Sezione di Lettere

28 Gennaio 1823.

Il Socio Ordinario Sig. Prof. di BRIGNOLI apre la Seduta col leggere alcuni Cenni intorno alle scoperte archeologiche fatte a Cividale del Friuli dal Reverendissimo Signor Canonico Conte Michele dalla Torre e Valsassina, delle quali è già

Digitized by Google

stato ivi formato un considerevole Museo, tutte appartenenti all' antico *Forumjuli* già Colonia, e Municipio Romano, poscia sotto il dominio de' Longobardi detta *Civitas Austriae*, indi sotto i Patriarchi d' Aquileia *Cividatum* e *Civitatis Forijulii*. Dalla lettura di questo Rapporto steso dall' Autore sopra luogo, emerge che il dotto Canonico ha potuto verificare col fatto esser vero quanto scrisse Varrone, che tutte le Colonie de' Romani fabbricavansi ad instar di Roma, poichè dirigendo gli scavi giusta la pianta di Roma antica, ha sempre rinvenuto ciò che un anno prima avea divisato di ritrovare, e la vanga non fu mai profondata in vano nê in fallo.

Adunanza della Sezione d' Arti

30 Gennaio 1823.

L' Assessore Signor Professore de' BRIGNOLI legge alcuni suoi cenni intorno al bello musicale, in cui stabilisce che il vero bello in quest' arte consiste nella melodia congiunta all' armonia ed al contrappunto, semprechè sia serbata l' espressione ed il carattere dominante del soggetto.

Adunanza della Sezione di Scienze

24 Febbraio 1823.

Il Socio Professore AMICI legge alcuni articoli di una sua Memoria di fisiologia e anatomia vegetabile, nel primo de' quali tratta dell' organizzazione della *Caulinia fragilis* e della circolazione del succhio visibile ne' vasi d' essa. La struttura di questa pianta presenta de' tubi fibrosi, de' vasi proprj ed un tessuto cellulare, ne' quali organi tutti succede lo stesso genere di movimento del succhio, quello cioè di due correnti di ascensione e di discesa che, rasenti l' una l' altra, girano continuamente nella medesima cavità. L' Autore dopo essersi trattenuto sopra la velocità, la direzione e la legge del movimento del fluido passa a considerare la causa motrice ch' egli trova esistere nelle coroncine di grani fisse alla parte interna della membrana di ciascun tubo, in conformità di quanto ci descrisse nella memoria stampata sulla *Chara vulgaris*.

Il secondo articolo contiene l' esame anatomico della *Chara fuxilis* e specialmente de' suoi fiori staminei e pistilliferi, nei quali pure vi osserva il succhio in continuo moto sia nelle cellule dello stimma, sia nei tubi dello stilo che si converte poscia in pericarpio, sia infine nei vasi dell' antera.

L' Autore nel terzo articolo parla del polline, ove sopra ogni altra cosa fa rimarcare il singolar fenomeno da lui osservato nel pulviscolo della *Portulaca oleracea*, i grani del quale attaccatisi alle estremiià dei peli dello stimma cre-

Digitized by Google

pano mandando fuori a lato dei medesimi un tubo membranoso in cui durante la fecondazione per tre ore scorgesi vicino ad essi una rapida circolazione di corpicciuoli, che in egual modo apparisce entro i peli dello stimma e le cellule che conducono all' ovario.

La Memoria del Professore AMICI, della quale, per la brevità del tempo non se ne è finita la lettura, verrà quanto prima pubblicata negli Atti della Società Italiana, ed è perciò che ci dispensiamo dal darne qui una più lunga relazione.

In seguito legge il Socio Reverendo signor Don CELESTINO CAVEDONI alcune osservazioni sopra la testa coll' elmo ornato di due penne, che si trova nei denari di alcune famiglie romane: in cui si conferma l' opinione del signor Borghesi pel confronto di una statuetta di Marte che ha l' elmo egualmente fregiato di due penne: e ai denari istessi si aggiugne una moneta di Larino che fra le incerte del Morell mostra una testa affatto simile.

Adunanza della Sezione di Lettere

28 Febbraio 1823.

Il Socio Ordinario signor Professore GIOVANNI de' BRIGNOLI legge una sua traduzione in versi sciolti di un Poemetto Georgico latino su' i Prati diviso in due libri, opera di Tommaso Ravasini parmigiano, il quale scrittore di altre poesie principalmente campestri fu assai reputato verso la fine del secolo XVII. L' accennata versione è corredata di opportune note e schiarimenti.

Adunanza della Sezione di Scienze

1 Marzo 1823.

Il Socio signor Ingegnere GIUSEPPE BERGOLLI legge una memoria, nella quale dopo una breve storia dei Fiumi Secchia e Panaro che scorrono per la provincia di Modena, espone tutte le cause che hanno influito a rendere, da pochi anni addietro, sempre più alte le loro piene e più frequenti e disastrose le rotte del Panaro, e prova di quanta importanza sia nei lavori ai fiumi di applicarsi ad opere tendenti a ribassare le piene stesse.

Dietro la domanda dell' Autore fu nominata una commissione che esamini la citata memoria e ne faccia rapporto in una delle prossime adunanze.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

2 Aprile 1823.

S. E. il signor Marchese Luigi Rangoni, Presidente della Reale Accademia lesse un Saggio di Riflessioni intorno ad un problema relativo alla partizione di un numero qualunqne intero in un qualsivoglia numero di termini disuguali della serie dei numeri naturali cominciata dall' unità, tanto nel caso in cui la partizione del numero proposto possa eseguirsi sopra la serie stessa indefinitamente continuata quanto in quello in cui il numero dei termini sia limitato, e minore comunque del numero proposto a partirsi. Sviluppò i criterii, che conducono a stabilire differenti equazioni, che esprimono le condizioni del citato problema già trattato prima dal celebre Malfatti nel Podromo della nuova Enciclopedia Italiana e nel numero XI dell' Antologia Romana per l' anno 1784; indi dall' Illustre signor Paoli, pel primo soltanto degli esposti casi, in una memoria inscritta fra quelle del tomo II. della Società Italiana delle Scienze, fissando la prefata E. S. dimostrativamente quelle formole più generali alle quali il primo non pervenne, e deducendone quelle, che il secondo ha stabilite con diversi raziocinii nell' indicata memoria, a cui poi seguì nel tomo III altra dello stesso Malfatti; nella quale le medesime formole vengono maneggiate con intendimento di generalizzare il problema. Terminò la sullodata E. S. il suo Saggio accennando alcune particolari applicazioni delle nuove stabilite formole.

Il socio signor Avvocato Luigi Tirelli fece poscia lettura della memoria già fino dall' anno scorso annunziata, con la quale, dietro esame delle opinioni d' Aristotile e di alcuni moderni, spiega con nuove idee il fenomeno metafisico del diletto, che arrecano quelle rappresentazioni di mali altrui, la realtà dei quali cagionerebbe un senso doloroso, osservando che esso deriva primieramente dalla disposizione propria delle facoltà intellettuali e dei sentimenti dell' uomo, che così sovente abbisogna di essere scosso, quindi dalla scelta delle circostanze ed immagini interessanti, e così d' ogni altro artificio d' invenzione ed esecuzione, finalmente dalle rapide cessazioni di dolore che si vanno succedendo per le molte cause interne ed esterne, le quali ci riscuotono dall' illusione dello spettacolo come da un sogno afflittivo.

Il Socio signor Professore Geminiano Riccardi ha letto in fine una sua memoria, nella quale procede ad illustrare il metodo dell' immortale Lagrange insegnato nella Meccanica Analitica ed altrove per determinare il centro di gravità in un qualsivoglia sistema di corpi, dalla cognizione delle masse di questi corpi e delle loro scambievoli distanze; mostrando l' ammirabile utilità e speditezza, che dal giovarsi di esso possono i Geometri procurarsi nelle ricerche di Matematica applicata, coll' istituirne delle nuove applicazioni; ed in particolar modo recando brevi e facili soluzioni dei vari problemi relativi al centro di gravità

Digitized by Google

che furono dallo stesso Lagrange risoluti in una maniera differente, e alquanto laboriosa nella sua memoria intorno alle piramidi, inserita fra quelle della R. Accademia di Berlino per l' anno 1773.

Adunanza della Sezione di Lettere

4 Aprile 1823.

Il Socio Ordinario Assessore di detta Sezione Signor Professor GIUSEPPE LUGLI legge alcune osservazioni sull' Inferno di Dante Alighieri per agevolarne alla studiosa gioventù l' intelligenza.

Adunanza della Sezione d' Arti

15 Aprile 1823.

L' Assessore della Sezione signor Professore DE' BRIGNOLI legge una Dissertazione intorno alle cause per le quali è degradato il colorito appo i Pittori moderni. L' A. non potendo convenire col celebre Mengs, il quale attribuisce quest' effetto alla falsificazione dei colori nelle fabbriche, ha indagate diverse influenti cagioni e proposti alcuni rimedii al riparo dell' esposto inconveniente.

Adunanza della Sezione di Scienze

9 Maggio 1823.

Il Socio Signor Professore BARTOLOMEO BARANI lesse dapprima la descrizione di un suo metodo di separare la materia colorante il sangue del uomo e del bue, diverso dai metodi seguiti a quest' uopo da Berzelius, Braude, e Vauquelin; ma che però non è ad essi inferiore nè per la qualità del prodotto, nè per la prontezza di ottenerlo. Quantunque in alcune sperienze prodotte abbia l' A. osservato che il ferro accompagna la suddetta materia colorante, e non essendo pure inverosimile che il ferro stesso ne sia uno de' componenti, egli tuttavia si astenne dall'ammettere quest' ultima opinione come un fatto provato, e solo diede lusinga di poter con altre indagini assicurarsi vieppiù se debba o no riguardarsi il ferro qual parte essenzialmente necessaria alla formazione della nominata materia.

Dipoi il medesimo Socio espose alcune osservazioni sulla sostanza conosciuta nelle Farmacie col nome di Storace liquido, e che secondo l' analisi di Bouillon-Lagrange è un composto di resina e di acido Benzoico. Ha osservato l' A. che lo Storace liquido contiene altresì una sostanza particolare solubile nell' Alcool

Digitized by Google

caldo, e che cessa di esservi solubile allorchè si raffredda: sostanza nella quale si ravvisano proprietà analoghe a quelle dell' Olivilla.

Fu letto infine un saggio di una Memoria del Socio Molto Reverendo Sig. Don Severino Fabriani, nella quale imprendesi dall' A. la difesa dell' opinione del *Tiraboschi* sullo stato della Letteratura Italiana ai Tempi de' Longobardi contro le accuse del Sig. *Cav. Luigi Bossi*. L' intera Dissertazione del nostro Accademico è or uscita alla pubblica luce nell' ottavo fascicolo delle Memorie di Religione, Morale, e Letteratura che si stampano in questa città.

Adunanza della Sezione di Lettere

16 Maggio 1823.

Il Socio ordinario Assessore di detta Sezione Sig. Professore GIUSEPPE LUGLI legge alcune osservazioni analitiche sul Purgatorio di Dante, colle quali intende principalmente a porre in un miglior lume alla studiosa gioventù la Divina Commedia.

Adunanza della Sezione d' Arti

27 Maggio 1823.

Il Socio Ordinario Signor Maggiore del Genio CARANDINI legge una sua Memoria sopra un nuovo mezzo di trasporto che può adoprarsi a piacere o per terra o per acqua, ed è anche servibile di sufficente alloggio e ricovero.

Adunanza delle Sezione di Lettere

16 Giugno 1823.

Il Socio Ordinario Assessore di detta Sezione signor Professore GIUSEPPE LUGLI legge alcune osservazioni analitiche sul Paradiso di Dante, nelle quali si studia di far rilevare le bellezze più recondite dell' accennata Cantica.

Adunanza della Sezione d' Arti

15 Luglio 1823.

L' Assessore di questa Sezione Sig. Professore DE' BRIGNOLI legge una sua Dissertazione intorno alle cagioni per le quali la Pittura è tanto degradata a

Digitized by Google

nostri giorni, in continuazione dell' antecedente già annunziata nel Messaggere N. 36.

Adunanza della Sezione di Scienze

29 Gennaio 1824.

L' Assessore di questa Sezione Signor ANTONIO LOMBARDI Primo Bibliotecario Regio aprì le solite adunanze mensili dell' anno accademico, col far leggere dal Socio Signor Professore Geminiano Riccardi una Dissertazione inviata dal Socio Signor Professore Marc' Antonio Parenti Direttore del Convitto Legale della Mirandola, in cui dà nuove prove della seguente verità « Che l'isolamento e la sel- « vatichezza della creatura ragionevole è una condizione mostruosa, della con- « dizione dell' Uomo, il quale fin da primordii del mondo fu sociale e dipendente ».

Il Segretario della Sezione Sig. Prof. GIUSEPPE BIANCHI in seguito lesse una sua relazione intorne ai segnali di polvere fatti accendere sul Monte *Cimone* nelle sere 27, 28 e 29 Agosto p. p. per disposizione e cura del Chiarissimo Padre Inghirami Astronomo di Firenze, all' oggetto di conoscere con precisione la differenza dei meridiani di molti luoghi d' Italia. Dalla media delle osservazioni dei segnali accesi su detto Monte negli anni 1822 e 1823 è risultata la differenza di longitudine geografica tra l' Osservatorio di Bologna e la nostra Torre maggiore di minuti uno secondi 42, 1 in tempo medio, conforme cioè a quella stabilita colle misure dei triangoli terrestri.

Adunanza della Sezione di Scienze

30 Aprile 1824.

Il Socio Ordinario Signor Professore GEMINIANO RICCARDI legge il voto o giudizio del Socio Signor Consultore Conte Pietro Abbati - Marescotti e da lui emesso intorno alla Memoria del Sig. Dott. Pietro Gandini, presentata nello scorso anno alla R. Accademia, e risguardante un problema di probabilità. Li Signori Accademici Relatori hanno trovata la Memoria stessa degna di approvazione e di particolar lode per l' Autore.

In seguito lo stesso Socio ordinario signor Professore Geminiano Riccardi ha riferite verbalmente le belle ed interessanti sperienze relative a diversi casi dagli Idraulici fino ad ora non considerati della contrazione della vena fluida sgorgante dalla luce di un serbatojo, che sono state ultimamente instituite dall' illustre Idraulico di Torino Signor Professere Giorgio Bidone, facendo vedere come i risultati di essi siano giovevoli alla giusta ed esatta determinazione delle analoghe portate. E relativamente a questo oggetto ha pur anco mostrato come

Digitized by Google

si possa generalizzare una formola stabilita dallo stesso Signor Professore Bidone; e per fine ha indicati i molti vantaggi che la R. Accadamia apportar dovrebbe all' Idraulica col ripetere queste sperienze giovandosi dei canali, che opportunamente offrono i contorni di questa Capitale.

Adunanza della Sezione d' Arti

11 Febbraio 1824.

L' Assessore della Sezione, Sig. Professore DE' BRIGNOLI, lesse alcune brevi riflessioni intorno ai principi delle Belle Arti del Disegno, e prese a provare che quantunque siano state regolate tutte dai medesimi principii generali del Bello, pure la Pittura e l' Incisione differiscono dalla Scoltura e dall' Architettura, in quanto che le prime sono generate dalla Prospettiva, le seconde sono di questa generatrici.

Adunanza della Sezione d' Arti

4 Maggio 1824.

L' Assessore Sig. Professore DE' BRIGNOLI legge un annunzio intorno ad una macchina inventata dal Sig. GIACINTO VINCENZI per tirare le linee dei fondi nelle incisioni in rame. La sezione nomina una Comissione composta dei Signori Professore AMICI, e Maggiore CARANDINI, cui incarica di riferire in una delle prossime adunanze sul merito di questa invenzione.

Il Socio Sig. Professore GIOVANNI BIANCHI descrive un apparecchio per Bagni a vapore eretto non a guari a pubblico vantaggio nel locale delle Scuole Mediche annesso a questo Civico Ospedale. Il suddetto apparecchio che è d' invenzione del Dottor Gales di Parigi e modificato dal Dott. de' Carro di Vienna è stato adattato ad un uso più comodo e sicuro mediante alcune nuove correzioni dal medesimo Signor Professore introdotte colla vista di escludere tutti gli inconvenienti di questo metodo di cura riscontrata già utilissima da molti Medici in un gran numero di croniche malattie.

Adunanza della Sezione di Lettere

14 Maggio 1824.

Il Socio Ordinario Signor Professore GIOVANNI DE' BRIGNOLI lesse una visione in terza rima sull' esaltamento di Leone XII.° al Pontificato.

Digitized by Google

Il Socio Ordinario Assessore Sig. Professore GIUSEPPE LUGLI legge un Discorso Accademico sulla Greca Letteratura esposta in via di quadro sinottico giusta il naturale sviluppo delle umane facoltà.

Adunanza della Sezione di Scienze

28 Maggio 1824.

Il Socio Ordinario Sig. Professore GIOVANNI BRIGNOLI dè-Brun-hoff lesse una sua dissertazione, nella quale egli ha esposto una ipotesi intorno alla genesi delli odori, de' sapori e delle virtù medicamentose de' vegetabili.

Dipoi il Socio Ordinario Molto Reverendo Signor Don CELESTINO CAVEDONI produsse alcune sue osservazioni sulla Sfinge che si vede nelle Monete di Chio, per mostrare che con quel tipo si alludeva al culto di Bacco cui appartiene la Sfinge istessa: e sopra una singolare moneta d' Arcadia, nella quale si congettura sia rappresentato il giovinetto Olimpo, e non il Dio Pane, come pensano altri.

Adunanza della Sezione di Lettere

1.° Giugno 1824.

Il Socio Ordinario Assessore della Sezione Sig. Professore GIUSEPPE LUGLI lesse due altri discorsi Accademici, nei quali espone per via di quadro sinottico la storia delle due Letterature Latina e Italiana secondo il naturale sviluppo delle umane facoltà.

Il Socio Ordinario Signor Professore GIOVANNI BRIGNOLI lesse un ristretto di una dissertazione latina inedita, scritta nel 1535 dall' erudito Gaspare Sardi Ferrarese, in cui si dimostra contro alla opinione di alcuni autori, che la celebre Contessa Matilde non può essere stata moglie d' Azzo I d' Este. Concorda ciò coll' opinione dell' immortale Muratori, il quale dimostrò che la famosa Contessa Matilde sposò in seconde Nozze Guelfo V.° Estense.

Adunanza della Sezione d' Arti

2 Luglio 1824.

Il Socio Ordinario Signor Ingegnere BERGOLLI legge una Memoria, accompagnata da opportuni disegni, sulla decorazione architettonica nella quale presa a sostenere l'opinione del P. Paoli sulla antichità dei tempii di Pesto, e scelto ad

Digitized by Google

argomento il triglifo, dimostra contro la dottrina di Vitruvio e degli antichi maestri che i Greci non sono gli inventori di questo ornato della trabeazione dorica, ma che lo hanno copiato dalla Architettura Egiziana. Questo assunto che coincide col sentimento del celebre Architetto Wiebeking diversifica in quanto alla origine del triglifo che il Signor Wiebeking trae da un segno allegorico o mistico degli Egizi, mentre il nostro socio lo desume dalla natura delle costruzioni, e dall'uso delle grandi masse dei marmi negli Edifizi di quella prima nazione.

Viene letto in seguito il rapporto della Commissione composta dai signori Maggior Carandini, e Professore Amici sulla macchina inventata ed eseguita dal Sig. Giacinto Vincenzi per tirare le linee parallele dei campi nelle incisioni in rame. La Commissione trova questo strumento lodevole per l'utilità e novità sua, e specialmente pel meccanismo col quale si può variare la forza dei segni, e riconosce il Signor Vincenzi meritevole di encomio ed incoraggimento. La Sezione rimette il voto della Commissione a S. E. il Sig. Marchese Luigi Rangoni Ministro di Pubblico Economia ed Istruzione perchè nella qualità sua di Presidente dell'Accademia determini il premio da assegnarsi all'inventore.

Adunanza della Sezione di Scienze

22 Gennaio 1825.

In questa prima adunanza il Socio Ordinario Signor Professore GEMINIANO RICCARDI lesse una sua Memoria intitolata — Considerazioni dirette a generalizzare e promovere il nuovo rapporto fra la teoria del centro di gravità e quella della composizione delle forze, scoperto ultimamente dal chiarissimo Signor Bordoni Professore nel I. R. Università di Pavia, uno dei Quaranta della Società Italiana etc. (V.ª Mem. di Mat. e di Fis. della Soc. It. delle Sc. T. XV, P. I, pag. 301 e segg.).

Comincia l'A. di queste considerazioni a risolvere il problema del Sig. Bordoni ravvisandolo sotto un aspetto più generale di quello sotto cui fu preso da questo Geometra nella sopracitata Memoria, e supponendo dapprima che le forze applicate al sistema siano parallele ed esistenti o non esistenti in un medesimo piano, stabilisce formole di cui risultano, come casi particolari, quelle stesse trovate dal Sig. Bordoni per le forze concorrenti; e per una nuova applicazione delle formole ottenute dimostra speditamente le varie proposizioni, che formano parte della bella teoria intorno al movimento del centro di gravità data dall'illustre Geometra Ab. Bossut, delle quali proposizioni vengono pure ad essere, stante sempre il supposto parallelismo delle forze, altrettanti casi particolari quelle stesse del Signor Bordoni suddetto.

In seguito l'A. intraprende con maggiore generalità analoghe ricerche relative al caso delle forze concorrenti ed esistenti e non esistenti in uno stesso piano;

Digitized by Google

e gli stessi casi particolari in questa ipotesi considerati dal Sig. Bordoni sono da lui trattati con metodi differenti, semplici e diretti, che gli offrono dei risultati, di cui si può usare con vantaggio onde mettere in equilibrio tutto il sistema.

Il Socio Ordinario Signor Professore GIOVANNI DE' BRIGNOLI seguì leggendo un suo Commentario inedito latino, che fa parte della illustrazione di lui alla Filosofia Botanica di Linneo, col quale contro l'opinione de' moderni sostiene il canone Linneano, in cui si fa risiedere nella sensibilità la principale differenza onde gli animali si distinguono dai vegetabili: combatte del pari l'opinione di coloro che pretendono esservi analogia fra' minerali ed alcuni vegetabili, e si oppone a quelli eziandio che vorrebbero ammettere più di tre regni in natura, non che a quelli che ne vorrebbero due soli.

Adunanza della Sezione di Lettere

29 Gennaio 1825.

Il Socio Ordinario Signor Dottore GIUSEPPE RIVA legge una disamina di alcune Note giustificative apposte dal Sig. Quirico Viviani a parecchie lezioni del Codice Bertoliniano della Divina Commedia dato fuori pel 1823, nella quale disamina intende a provare che alle lezioni poste innanzi dal mentovato Autore debbono preferirsi quelle che i più lessero in altri assai accreditati codici.

Il Socio Ordinario Signor Professore GIUSEPPE LUGLI dà lode in versi sciolti a Geminiano Montanari chiarissimo Astronomo, Fisico, Ingegnere, ed Economista Modenese.

Adunanza della Sezione di Scienze

28 Febbraio 1825.

Il Socio Ordinario Signor Professore BARTOLOMEO BARANI espose l'analisi per lui fatta del Feldispato Apiro Haüy ossia dell'Audalusite di De la Metherie, dalla quale operazione è risultato che il detto fossile deve riunirsi agli altri contenenti la Litina; onde l'Autore è persuaso che in esso invece della potassa, come fu annunziato e si ritiene dai mineralogisti, esista la Litina, ossia l'ossido di Lithion.

Di poi il Socio Ordinario Signor Dottore CARLO BOSELLINI lesse il cominciamento e una parte di un suo Opuscolo vertente sulla storia e utilità delle scienze economiche, promettendo il medesimo di continuare in altre adunanze.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

24 Marzo 1825.

Il Socio Ordinario Signor Don CELESTINO CAVEDONI lesse alcune osservazioni sulla Storia letteraria della Liguria (Tomo I.° Genova 1824) del Sig. Giambattista Spotorno, per diffendere il Tiraboschi dalla ingiusta accusa di trascurato e parziale e per emendare alcuni abbagli dell'Autore riguardo ai poeti provenzali di patria genovesi, e alla intelligenza dei loro componimenti che sono nei Manoscritti Estensi, ai quali si cresce di troppo la taccia di scorrezione.

Adunanza della Sezione d'Arti

26 Marzo 1825.

Il Direttore della Sezione Signor Professore DE' BRIGNOLI lesse una lettera scrittagli dal Farmacista Signor Tommaso Severi Macchelli di Sassuolo, con cui gli dà notizia di avere unito i due metodi conosciuti di purificare l'olio di noce, e gli altri olj grassi; cioè, quello dell'acido solforico, e quello del carbone animale; e di avere ottenuto che il primo olio riesca molto idoneo alla pittura, ed i secondi più scorrenti ed atti a diminuire l'attrito delle macchine.

Adunanza della Sezione di Scienze

11 Aprile 1825.

Il Socio Ordinario Signor Professore BARTOLOMEO BARANI espose di avere con felice esito ripetute alcune delle sperienze di Bussy relative all'acido solforoso anidro e particolarmente quella della congelazione del mercurio, e di essere altresì riuscito, seguendo il metodo proposto dallo stesso Bussy, a comunicare all'acido solforico del commercio quelle proprietà che caratterizzano l'acido solforico fumante che si fabbrica nella Sassonia. Egli annunziò pure di avere preparato il platino spugnoso col quale è riuscito, come già è noto per le sperienze di Debereiner, ad inflammare una corrente d'idrogeno che sorta da un piccol pertugio: e nel tempo stesso ha osservato che può accadere che si ottenga un platino, spugnoso il quale, benchè sia riscaldato e reso luminoso da una corrente di gaz idrogeno, non arrivi con tutto ciò alla temperatura necessaria perchè l'idrogeno arda con fiamma.

Digitized by Google

In seguito il Socio Ordinario Sig. Professore GIAMBATTISTA AMICI lesse una sua Memoria intorno al grado di precisione al quale si può giungere nelle misure angolari usando uno dei circoli meridiani di tre piedi di diametro come suole costruire il celebre artista Reichenbach. Questa memoria sarà fatta in breve di pubblica ragione.

Da ultimo il Socio Ordinario Signor Professore GIUSEPPE BIANCHI presentò alcune sue osservazioni delle grandi e numerose macchie solari che si son vedute nei mesi di Febbrajo e Marzo di quest' anno, le quali già, dopo singolari mutazioni ed apparenze, dileguarono, e passò a riflettere in genere sulla natura non ben conosciuta fin ora delle macchie del Sole, sulle possibilità di conoscerle meglio e sulle relazioni di questo con altri fenomeni fisici.

Adunanza della Sezione d' Arti

9 Maggio 1825.

Il Socio Ordinario Signor Maggiore GIUSEPPE CARANDINI ha letto una Memoria sull' encausto, e mostrati varii saggi eseguiti in tal genere di pittura con cui ha dimostrato l' utilità di farlo risorgere.

Adunanza della Sezione di Scienze

13 Maggio 1825.

Venne letto in prima dal Socio Signor Professore ANTONIO BOCCABADATI il giudizio da lui, insieme col Socio Ordinario Signor ANTONIO GOLDONI, emesso, per incarico ricevutone dall' Accademia, intorno ad una Memoria del Signor Dottor Arcangelo Crespellani di Savignano, la quale tratta delle malattie delle Tigne, e che dai Relatori fu trovata molto commendevole per medico criterio, per erudizione opportuna e per vantaggio pratico di risultamenti ottenuti.

Dipoi il Socio Signor Cavaliere LEOPOLDO NOBILI di Reggio presentò un Galvanometro di una sensibilità paragonabile a quella dei termoscopii, e le prove di fatto annunziate nella sua Relazione di tale strumento, e che ne dimostrano il grado di perfezione, furono dal medesimo ripetute più volte sotto gli occhi degli Accademici.

Lesse finalmente il Socio Ordinario Signor Don CELESTINO CAVEDONI alcune sue osservazioni sopra un manoscritto di Celio Calcagnini che si conserva nella Biblioteca Estense ove sono descritte circa novecento Medaglie d' oro dell' antico Museo Estense, e colla testimonianza del quale dimostrasi che le Medaglie con la contromarca moderna dell' aquila incusa, ora sparse e conservate in grande numero in diversi Musei d' Europa, appartennero un tempo al Museo Estense, e non al Gonzaga.

Digitized by Google

Adunanza delle Sezione di Lettere

23 Maggio 1825.

Il Socio Ordinario Signor Ab. SEVERINO FABRIANI lesse una Memoria sulla Provvidenza di Dio nell' ordine fisico dell' Universo.

In seguito il Socio Ordinario Signor Dottor CESARE GALVANI lesse un Carme alla Patria di Dante Alighieri.

Adunanza della Sezione di Lettere

16 Giugno 1825.

Il Socio Ordinario Signor Ab. SEVERINO FABRIANI ha letto il seguito della Memoria sopra la Provvidenza di Dio nell' ordine fisico dell' Universo.

Adunanza della Sezione di Scienze

12 Gennaio 1826.

In questa privata adunanza, la prima dopo le ferie accademiche, ha letto il Socio Signor Professore GIUSEPPE BIANCHI una Memoria, in forma di lettera diretta al Chiarissimo Astronomo Signor Carlini, nella quale egli rende conto delle sue operazioni per osservare i moltissimi fuochi istantanei accesi la state ultima sul Montebaldo e sul Cimone; e per dedurne la differenza di longitudine cogli altri luoghi di osservazione. Discusse per tanto le osservazioni astronomiche fatte col cannocchiale del circolo meridiano di Reichenbach provvisoriamente all' uopo collocato in una terrazza della Casa in Modena del Signor Maggiore Giuseppe Carandini, e così fissato colla possibile precisione l' elemento del tempo, è risultata da un gran numero di segnali e di confronti la differenza de' meridiani fra l'Aguglia maggiore del Duomo di Milano e la nostra Torre Ghirlandina di minuti 6, e secondi 55, 53 di tempo, minore di 8 decimi di secondo, di quella somministrata dalle misure geodetiche. Vuolsi qui aggiungere che i fuochi dati per la terza volta sul Cimone dalle due alle tre ore dopo la mezzanotte nei giorni 11, 12, e 13, Agosto p. p. furono finalmente veduti anche da Milano, alle distanza cioè di quasi 100 mila tese in linea retta; il qual esito desideravasi per congiungere immediatamente gli osservatoj di Milano e Firenze; dovendosi poi ascrivere questo ottenuto vantaggio e alla intelligente attività del Sig. Maggiore Carandini che recossi in persona a dirigere quell' accensione, e all' ora stessa in cui si diedero i fuochi, durante la quale i vapori dell' atmosfera sono già caduti all' orizzonte; ne ancora se ne sollevano in conseguenza del calor diurno.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Lettere

28 Gennaio 1826.

Il Socio Ordinario Signor Don CELESTINO CAVEDONI lesse alcuni cenni su quel luogo del Furioso ove si narra la morte d'Isabella (C. XXIX.) e l'accorgimento onde salvò la sua onestà, per dimostrare che l'Ariosto prese ivi ad imitare un avvenimento affatto simile che racconta Francesco Barbaro di Bresilla nobile vergine di Durazzo, e non mica l'altro in parte simile di S. Eufrasia V. e M. come parve al Baronio, che per ciò non doveva riprendere il Poeta in questo particolare, quasi avesse profanato la virtù eroica di quella Santa.

Adunanza della Sezione di Scienze

25 Febbraio 1826.

Il Socio attuale Signor Professore GIO. BATTISTA AMICI legge una sua Memoria intorno al perfezionamento de' micrometri di projezione, ossia de' micrometri binocoli. Egli ha riconosciuto che il principal difetto di tali istrumenti deriva dalla possibilità de' nostri occhi di variare le rispettive inclinazioni de' loro assi. Indicate le esperienze che comprovano il fatto, e posta quindi in chiaro l'influenza che l'improvviso cangiamento di direzione degli assi ottici ha sulla misura degli angoli; l'Autore è passato a descrivere un artifizio che da lungo tempo egli ha usato, e col quale non solo si evita quella sorgente di errori, ma insieme ne riescono più agevoli e comode le osservazioni.

Di poi il Socio attuale Signor Capitano ANTONIO ARALDI legge il primo, e parte del secondo capitolo, di una sua Memoria sopra i principj del calcolo differenziale ed integrale. Nel primo espone alcuni teoremi dipendenti dalla teoria dei limiti; nel secondo, richiamate le formole fondamantali di esso calcolo, cerca di dare una definizione geometrica delle quantità differenziali. A questo fine invece di ravvisare la differenziale costante, siccome infinitesima con Leibuitz, o come un arbitraria capace di una indefinita diminuzione secondo il metodo dei limiti usato alla foggia di Eulero, di Alembert ed altri, e secondo quello delle funzioni del De la Grange, ei la risguarda come quantità finita di costante valore e suscettiva di essere divisa in un mumero qualunque di parti uguali; considerazione che lo porta a dedurre i principj del calcolo stesso dal metodo dei limiti di Archimede, ed a togliere dalle differenziali, che per tal modo riescono tutte finite, ogni idea affine a quelle degli infinitesimi.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Lettere

6 Aprile 1826.

S. E. il Signor Marchese LUIGI RANGONI Presidente della R. Accademia legge una sua traduzione dal tedesco di un Trattato Satirico del rinomato *Amedeo Guglielmo Rabener*. In esso, sotto la finzione di un codicillo del testamento dello spiritosissimo inglese Swift, si rappresentano diversi caratteri d' uomini stravaganti, o viziosi, o ridicoli, e si sostiene con acuta lepidezza la causa del buon senso non meno che della sana morale, notandoli tutti di una pazzia or più or meno dannosa e molesta alla civile Società.

Il Socio ordinario Signor Avvocato LUIGI TIRELLI, dopo aver presentato, anni sono, una compiuta serie di osservazioni sul patetico delle Georgiche di Virgilio, e qualche saggio ancora su quel dell'Eneide nelle mensili adunanze dell'Accademia, legge nel giorno stesso del 6 una memoria portante l' analisi della prima Egloga sotto questo medesimo rapporto del patetico: ove dietro ad un ragionato confronto di questo poeta con Teocrito, indicatane la superiorità singolarmente in ciò che appellasi *interesse*, dimostra e mette in vista i diversi oggetti e tratti nei quali un tale pregio campeggia e trionfa; soprattutto nel carattere, nella situazione e nei sentimenti del pastor Melibeo che rappresenta gli abitanti del territorio Mantovano, scacciati dalle loro campagne e dalla patria nelle guerre civili fra Ottaviano, Cesare e Bruto.

Adunanza della Sezione d' Arti

18 Maggio 1826.

In questa Adunanza il Socio attuale Signor Dottore CESARE GALVANI lesse la vita da lui compilata del celebre Dipintore Modenese Bartolomeo Schedoni, in cui espose varie congetture, oltre quelle del Chiarissimo Tiraboschi, relative all' anno ed al luogo della sua nascita: comunicò ed illustrò con la scorta di autentici documenti aneddoti particolari, che lo riguardano; fissò con sufficente probabilità l' epoca della sua partenza da Modena: e mostrò un catalogo delle opere dipinte dallo stesso Schedoni, molto più ampio ed esteso di ogni altro conosciuto per lo innanzi.

Adunanza della Sezione di Scienze

1.° Giugno 1824.

In questa Adunanza il Socio Signor ANTONIO ASSALINI Ispettore generale di acque, strade e ponti negli Stati Estensi legge una memoria relativa all' econo-

Digitized by Google

mia degli scoli, corredata da giudiziose riflessioni ricavate da principi d'idraulica incontrastabili, e da varie osservazioni dedotte da operazioni da esso lui eseguite.

In seguito il Socio attuale Signor Professore GEMINIANO RICCARDI venendo a discorrere sulla Memoria pubblicata nel Maggio p. p. dal Signor Ampère, e che porta per titolo = Essai sur un nouveau mode d' exposition des principes du « calcul differentiel, du calcul aux differences et de l'interpolation de suites, « considerées comme dérivant d' une source commune = accenna una strada non meno semplice di quella seguita da questo chiarissimo matematico e fisico francese onde pervenire agli stessi identici risultati, fondandosi e progredendo conformemente ai già noti principj di *Analisi Derivata* stabiliti fin dall' anno 1802, dall' illustre italiano geometra Brunacci.

Lo stesso Signor Professore RICCARDI legge per parte del Socio e Collega suo Signor Capitano Professore Gio. Battista Pelloni una di lui memoria relativa alla stima dei boschi, nella quale indicati da prima gli elementi, e le circostanze da prendersi in considerazione per eseguirla a dovere, passa quindi a stabilire una formola generale col mezzo di cui recar si può facile e spedita soluzione di qualunque problema venga proposto intorno a questo argomento. Instituitosi poi dall' Autore il calcolo del prezzo di un bosco nel modo accennato dal Signor Gioja nel tomo 6 del *Nuovo Prospetto delle Scienze Economiche* perviene egli ad una formola, che si riduce alla identità colla stabilita.

Adunanza della Sezione di Lettere

6 Luglio 1826.

Il Socio ordinario Signor Professor DE' BRIGNOLI legge quella parte del suo lavoro intorno alla Filosofia Botanica di Linneo, che riguarda l'etimologia de' nomi generici de' vegetali, e precisamente di quelli de' Latini, e de' Greci di oscura derivazione; nel che fare si valse degli autori etimologici più accreditati, quali sono S. Isidoro, Sesto, il Vossio, il Forcellini, lo Schrevelio, l' Etymologicon magnum, i Prammatici antichi ecc. e dove questi lo abbandonarono trasse partito dal Bechmann, dal Bohmer, dal de Théiss e dal Bergeret, non poche volte per altro discordando dai due ultimi, i quali troppo di frequente pretendono derivar molti nomi dal celtico, il che specialmente quanto ai nomi d' Ippocrate, di Galeno e di Dioscoride non sembra verisimile.

L' altro Socio Signor CARANDINI Maggior GIUSEPPE legge un componimento poetico sulla celebrità che la Poesia appropria specialmente alle militari imprese.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione d'Arti

26 Luglio 1826.

Furono prodotti i voti dei Socj Signori Professori Barani e Baccelli incaricati, nell'adunanza dei 9 Luglio 1825, di giudicare sul merito del grande Termometro metallico eseguito dal Signor Mauro Sabbatini, dai quali fu lodata l'idea da questi concepita di costruire un pubblico murale misuratore delle temperature ed eccitato a fargli alcune modificazioni che lo rendano sensibile al pari di quello a mercurio anche ne' repentini camhiamenti dell' atmosfera, come avviene nelle lenti variazioni di essa.

Il Signor Professore de' BRIGNOLI Direttore della Sezione lesse un rapporto intorno alla tavola d' altare rappresentante i tre Santi Comprotettori di Modena dipinta e collocata nella Chiesa Parrocchiale detta del Carmine di questa città, dal Signor Paolo Beroaldi, in cui prese a disamina la composizione, il colorito, il chiaroscuro, la prospettiva, il disegno, l' espressione, il panneggiamento, la condotta del pennello e gli accessorj, esponendo su questi diversi rapporti le proprie osservazioni.

Il Segretario della Sezione presentò in fine i modelli ideati ed eseguiti dal Sig. Cesare Zoboli nell' età sua dai 16 ai 17 anni di due ingegnosi e semplici meccanismi differenti, mediante cadaun de' quali si ottengono da due successivi colpi su di uno stesso pedale due opposti movimenti.

Entrambi furono dal loro inventore destinati nella costruzione degli Organi all' uopo di aprire contemporaneamente o chiudere un dato numero di registri: e già l' uno di essi fu con vantaggio adottato dal Nobile Signor Ab. Giambattista Pignatti nel grandioso e lodato Organo dal medesimo di recente compiuto, e dato in dono a questa Chiesa della B. V. Ausiliatrice del Popolo.

Adunanza della Sezione di Lettere

14 Dicembre 1826.

Il Socio ordinario Signor Professor DE' BRIGNOLI GIOVANNI legge alcune riflessioni intorno alla utilità della Bibliografia, ed alla rarità de'Libri; non che intorno alla più ragionevole disposizione di una grande Biblioteca, proponendo una classificazione di Scienze ed Arti diversa da quella che seguono i più celebri Bibliografi, e diversa ancora da quelle ideate dal D' Alembert, e da Geremia Bentham, di cui espose il prospetto, e le basi sulle quali è fondata.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

25 Gennaio 1827.

Il Socio ordinario Sig. Professore Gio. Battista Amici legge una seconda Memoria del Socio assente Sig. Cavaliere Leopoldo Nobili, relativa alla nuova classe di fenomeni elettrochimici scoperti da quest' ultimo. In tali fenomeni la pila opera la decomposizione delle sostanze nel modo già conosciuto; ma in virtù di una disposizione particolare i principj che provengono da quelle decomposizioni, si ottengono sopra lamine di metallo in figura più o meno variata, e tali spessissimo da presentare i più bei colori. La memoria contiene una lunga serie di esperimenti dello stesso genere, e rispetto al modo di eseguirli, ma differenti non poco rispetto alle conseguenze, che ne derivano, ed alle nuove vedute che suggeriscono. — Non tarderà l' intero lavoro ad essere fatto di pubblica ragione in un giornale scientifico.

Comincia poscia il Socio Sig. Dott. Gio. Battista Manfredini a leggere un suo Opuscolo intitolato = Descrizione di una Bambina nata mostruosa, premesse alcune generali considerazioni su i mostri = Nella parte finora letta l'A. ha esaminato quale fra le tante opinioni sulla origine dei mostri esser possa la migliore, o per avventura la sola da seguire, quando i ragionamenti sian fondati come debbon essere sulle vere induzioni e osservazioni dei fatti, sì fisiologici che anatomico-patologici, esclusa ogni altra maniera d' ipotesi e congetture. Di quest' opuscolo, che uscirà esso pure in luce, sarà continuata la lettura in una delle prossime adunanze.

Ripiglia in fine il Socio Signor Professore Gio. Battista Amici, e fa conoscere in una sua Memoria varie specie nuove di *Chara* a un tubo solo, parte delle quali crescono nelle acque della nostra Provincia, ed altre nel lago di Mantova. Fra le dette specie due sono dioiche, tre monoiche e due poligame monoiche, cosicchè la sistematica divisione dell' ordine *Chara* in due generi diversi, *Chara* e *Nitella*, introdotta recentemente dal ch. Agardh non può venire adottata. Oltre l' indicazione dei caratteri botanici delle nuove *Chare* l'A. si occupa ancora di osservazioni microscopiche e fisiologiche sulle medesime, spargendo maggior luce sulla storia della vita di queste piante, ne' vasi delle quali l' occhio armato di lente scuopre con facilità la circolazione del succhio. Questa Memoria corredata di cinque tavole incise e attualmente sotto i torchi.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Lettere

16 Febbraio 1827.

Il Socio attuale Sig. Avvocato LUIGI TIRELLI dopo la lettura di alcune osservazioni sul patetico della prima egloga di Virgilio fatta nello scorso anno accademico, prosegnendo a trattare del medesimo soggetto, legge una sua memoria sul patetico dell' egloga decima intitolata *Gallo*, rilevando e notandone i tratti principali, che vi si riscontrano, con opportune riflessioni sull' appiicazione ad essi delle regole e leggi del buon gusto, e difendendo per ultimo il poeta dalla taccia appostagli da alcuni moderni di aver voluto in questo genere di poesia elevarsi a troppo alti argomenti e personaggi ed oggetti ardui e lontani dalle cognizioni e dagli usi di semplici pastori.

Il Socio attuale Sig. Dottore CESARE GALVANI legge una lettera ad un suo amico nella quale tratta della Tipografia Scandianese del secolo XV, cercando di provare come al celebre C. Matteo Maria Boiardo debbasi la gloria di avere introdotta ne' propri feudi la stampa in un' epoca, in cui cospicue città non anco poteansi vantare di tanto.

Chiude la seduta il Socio attuale Sig. Maggiore CARANDINI GIUSEPPE colla lettura di un componimento poetico.

Adunanza della Sezione di Lettere

15 Marzo 1827.

Il Socio attuale Sig. Dott. CESARE GALVANI legge una lettera sulla Tipografia Nonantolana, e sullo stato di quella celebre Abbazia nel secolo XV, non che sopra un Operetta nel secolo stesso pubblicata nel Castello di S. Cesario cogli auspizii del Feudatario Conte Albertino Boschetti.

Adunanza della Sezione di Scienze

16 Marzo 1827.

Prosegue il Socio Sig. Dottore GIO. BATTISTA MANFREDINI la lettura del suo Opuscolo sui mostri, indicato nell' ultima adunanza 25 Gennajo; e dopo quindi aver egli dimostrata l' insussistenza delle sei principali ipotesi immaginate per derivar l' origine dei mostri da casi *accidentali*, eccetto che da quella relativa alle esterne violenze comunicate al feto, non dubita di conchiudere ammettendo

Digitized by Google

per cagione di tutte le mostruosità congenite le condizioni stesse, o qualità del germe, ovvero sia la struttura di lui primigenia, ogni volta che non si riconoscono nel feto traccie di precedute violenti offese, o uno stato morboso. In una delle venture adunanze egli terminerà colla promessa descrizione della bambina nata mostruosa, che gli somministrò argomento e motivo delle già esposte generali considerazioni.

Il Socio attuale Signor Capitano ANTONIO ARALDI prende in seguito a continuare la sua Memoria sopra i principii del calcolo differenziale e integrale incominciate a leggersi da lui nell' adunanza del 25. Febbraio dello scorso 1826. Avendo egli esposto le basi del calcolo integrale nel metodo sintetico dei limiti di Archimede, istituisce un confronto fra questo e gli altri processi finora usati in proposito, e ne deduce che il primo è quel centro al quale tutti gli altri possono riferirsi. Dimostrando poscia il modo per passare agevolmente dall' uno all' altro di questi metodi, egli osserva che nelle particolari questioni giova l'usare di preferenza quello di essi, che pel carattere suo proprio sembra appunto conformarsi meglio all'indole stessa del problema. E per un esempio della pieghevolezza del metodo di Newton nel trattar cose meccaniche, il nostro Socio lo applica alla dimostrazione di un istrumento grafico da lui ideato, e di cui offre un modello, mediante il quale si può di una data curva costruire le curve differenziali o integrali dei diversi ordini. Mostra egli finalmente come sostituendo alle punte, che segnano le curve, de' nonnii che scorrano lungo alcune scale, possa questo stromento riguardarsi quale elemento di un più complicato meccanismo idoneo a risolvere meccanicamente una equazione di grado qualunque, ed a calcolare le somme di un qualunque numero dei primi termini di una serie algebrica conveniente.

Adunanza della Sezione di Lettere

19 Aprile 1827.

Il Socio attuale Signor Dottore GIUSEPPE RIVA legge il proseguimento di alcune sue osservazioni sulla eloquenza italiana nelle quali prendendo a disamina le principali scritture d'ogni secolo, fondato sulle sentenze autorevoli de' migliori maestri, ha procurato di rivendicare all' Italia il pregio che da taluno le viene contrastato di avere ottimi esemplari di eloquenza.

Adunanza della Sezione di Scienze

26 Aprile 1827

Il Direttore di questa Sezione signor ANTONIO LOMBARDI, primo Bibliotecario di S. A. R. trattiene l' Adunanza colla lettura dell' elogio accademico da lui con-

Digitized by Google

sacrato alla memoria dell'illustre fiorentino Cav. Giovanni Fabbroni. Tale elogio, che dimostra essere stato il Fabbroni in esemio grado uomo di lettere e uomo di stato, sarà in breve dato alla luce colle stampe.

Adunanza delle Sezione di Lettere

7 Maggio 1827.

Il Socio attuale Signor Dottore CESARE GALVANI legge alcune sue osservazioni sullo stato presente e sui metodi della pittura in Italia, e sui mezzi di ridonarla al suo antico splendore.

Adunanza della Sezione di Scienze

23 Giugno 1827.

Il Socio Signor Dottor CARLO BOSELLINI lesse la prima parte di una sua Memoria, in cui confutò l'opinione di Sismondi, il quale attribuisce l'aumento della mendicità nella Gran Bretagna alla diffusione dell'uso delle macchine. Su di ciò il Bosellini espose poscia il suo parere, e addusse in cause dell'indicato disordine la concentrazione delle proprietà fondiarie in un ristretto numero di possessori.

Il Socio attuale Signor Professore Ab. LIBERATO BACCELLI lesse indi una terza Memoria dell'assente Accademico Signor Cav. LEOPOLDO NOBILI sulle apparenze elettro-chimiche, nella quale, premessa un'idea del modo alquanto semplificato di ottenere tali apparenze su di lamine metalliche, si descrivono gli effetti dalle medesime prodotti sul mercurio puro e sulle amalgame, e ad esse ingegnosamente si attribuiscono i movimenti osservati da Erman, Herschel, Orioli, Prandi etc etc. Dal nominato Sig. Professore Baccelli furono anche ripetute innanzi al consesso le principali esperienze su di lamine di platino col metodo che l'Autore ne suggerisce.

Adunanza della Sezione di Lettere

28 Giugno 1827.

Il Socio attuale e Direttore della Sezione Signor Professore MARC'ANTONIO PARENTI legge un saggio d'osservazioni sulla morale dell'antico Teatro.

Il Socio attuale Signor Dottor CESARE GALVANI legge la terza lettera bibliografica sulle prime edizioni eseguite negli Stati Estensi; e in questa descrive la Mirandolese Tipografia, e parla alquanto del fondatore di essa Gian Francesco Pico.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione d'Arti

12 Luglio 1827.

Il Socio attuale Signor Maggiore del Genio GIUSEPPE CARANDINI ha presentato un modello e letta una memoria o descrizione di una macchina da lui immaginata per innalzar acqua coll'alternativa immersione ed estrazione da un bagno di mercurio di un recipiente, che così si riempie d'acqua, aspirandola da determinata profondità per mezzo di un sifone che pesca in acqua sottoposta; ed ha mostrato i mezzi di ridurre il mercurio a quantità molto minore di quello sembri abbisognare; suggerendo di più l'applicazione di esso al contornar gli stantuffi impiegati in altre macchine, ed opportunamente preparati, per la migliore loro conservazione e sicurezza, e con diminuzione degli attriti.

Col mezzo del Socio suddetto furono presentati all'Adunanza dal Signor Pietro Bacchi fabbricatore di strumenti ottici un Telescopio Gregoriano modificato, una Camera lucida annunciata di nuova costruzione, ed altri strumenti catadiottrici, per l'esame de'quali fu dalla Sezione nominata un'apposita Commissione.

Il Direttore della Sezione Signor Professore de'BRIGNOLI lesse per ultimo la descrizione di un Orto Botanico-Agrario, e nè mostrò il disegno di sua invenzione che va unito al commento della Filosofia Botanica di Linneo che sta terminando. Con questo disegno è provveduto a tutti i generi di coltivazione, sì di piante straniere come d'indigene, utili e dilettevoli; e vi sono accennati tutti i soccorsi necessari ad uno studio metodico e regolare della Botanica teorica, pratica, applicata ed erudita.

Adunanza della Sezione di Scienze

23 Luglio 1827.

S. E. il Signor Marchese LUIGI RANGONI Presidente della R. Accademia comunicò una sua memoria, di cui lesse alcuni tratti, intorno alla trasformazione e decomposizione delle frazioni algebriche, funzioni di una sola variabile, considerate in tutte le possibili complicazioni dei fattori de'loro denominatori. Potendo esse equivalere alla somma di altre più semplici, e corrispondenti a ciascuno di detti fattori, l'Autore le determina secondo formole generali applicabili facilmente ai casi particolari, e di molto uso nelle ricerche proprie del calcolo differenziale ed integrale. Il metodo con cui ha egli potuto ottenerle, si riduce al maneggio delle ordinarie industrie di calcolo, combinato spesso con quello de'primi elementi della teoria delle funzioni generatrici, per cui anche si scoprono incidentemente singolari ed utili proprietà di alcune serie finite, delle quali per una parte, siccome egli stesso dichiara, fu già data da altri la dimostrazione, benchè forse

Digitized by Google

non senza il sussidio delle idee d'infinito e d'infinitesimo, e per le restanti non ha potuto verificare che fossero state sin qui conosciute.

Il Direttore delle Sezione Signor ANTONIO LOMBARDI lesse in seguito un suo breve scritto, nel quale analizzò una proposizione dell'illustre Eustachio Manfredi, che trovasi nella annotazione V. al capo XI. dell'Opera del celebre Dottor Guglielmini intitolata « *Della Natura dei fiumi,* » e che versa sui canali orizzontali ed inclinati applicati all'emissario di un lago. Scopo di questa analisi fu quello di far vedere che la proposizione del matematico bolognese è pienamente giusta, non ostante che qualcuno abbia preteso di mostrarne la falsità.

Finalmente il Socio Signor Professore GIOVANNI DE' BRIGNOLI lesse uno squarcio del suo Trattato di Anatomia e Fisiologia vegetale, che sta ora terminando, commento del N. 78 della Filosofia Botanica del celebre Linneo; ma stante l'ora tarda non potè giungere ad esporre quegli argomenti, che egli suppone nuovi, e sui quali era bramoso d'intendere il parere dei Signori Accademici, ciò che si riserva di fare in altra circostanza.

Nella mattina poi del sucessivo giorno 24, Luglio si tenne un'adunanza straordinaria nel Teatro Fisico, onde prevalersi dell'uso delle macchine, alla quale intervenne la prelodata Eccellenza Sua. In essa unione il Socio Sig. Ab. LIBERATO BACCELLI Professore di Fisica sperimentale, mosso da' più vivi sentimenti di venerazione e di stima pel Conte Alessandro Volta, intese di dare a questo insigne Fisico un tributo di lode col mostrare tutti gli apparati elettrici dal medesimo inventati, accennando gl'ingrandimenti che col mezzo loro ha ricevuto la dottrina dell'elettricità. Di poi con un elettromotore di dodici elementi, ciascuno avente la piastra di zinco di un piede quadrato di superficie, facilmente riducibile a uno, due etc. elementi, diede un saggio di maravigliosi effetti di questo istrumento voltiano, e fra gli altri mostrò l'ignizione de' fili metalici e delle punte di carbone nell'aria, nel vuoto, in gas privi d'ossigine, nell'acqua, nell'alcool; decompose l'acqua ed alcune soluzioni saline; e ripetè con ispeditezza e facilità li fenomeni tutti elettro-dinamici col grand'apparato di Ampère.

Adunanza della Sezione d'Arti

28 Luglio 1827.

Il Socio attuale Signor Maggiore GIUSEPPE CARANDINI ha letta una memoria sopra un livello, ed insieme squadro agrimensorio, di piccola mole da lui ideato, ed eseguito dal Signor Pietro Bacchi.

Tale strumento soddisfa al doppio suo fine usando opportunamenle della simultanea visione di oggetti o direttamente, o per trasparenza e per una o più riflessioni; e da esso l'autore si ripromette molti vantaggi sugli analoghi strumenti comunemente in uso.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

19 Gennaio 1838.

Dopo le solite ferie la Sezione di Scienze di questa R. Accademia ha ripreso il corso delle sue private adunanze; ed in quella del dì sopra accennato per la particolare circostanza dell' intervento alla medesima del Signor Carlo Babbage Membro della Società Reale di Londra etc etc. e Socio corrispondente della nostra, gli Accademici onde facilitare a questo illustre Matematico e Fisico la cognizione de' loro scientifici lavori, nelle varie letture, che furono il trattenimento di detta radunanza, usarono della lingua francese; e primo di tutti S. E. il Signor Marchese Luigi Rangoni Presidente della R. Accademia comunicò alcune riflessioni relativamente alle due di lui Memorie già pubblicate nel Tomo XIX delle Memorie della Società Italiana di Scienze, colle quali ha indicato il felice uso di dette funzioni nella Teoria dei numeri, potendo forse per esse dedursi da una sola equazione i principali e più importanti teoremi appartenenti ad essa Teoria. Per le particolari applicazioni della dottrina delle funzioni generatrici ha inoltre accennate varie semplificazioni relative sì all' andamento da eseguirsi, come pure alle formole da usarsi, profittando in ciò singolarmente di quanto ha in altra Memoria dimostrato intorno alla decomposizione e trasformazione delle funzioni algebriche frazionarie, e coll' introdurre, oltre i segni già usati dal Laplace, altri nuovi, che ne completino il relativo algoritmo specialmente raccomandabile per la sua simmetrica forma. E con tali viste, che sono dirette ad estendere viemmaggiormente l' uso di quella dottrina, la lodata E. S. ne ha eziandio incominciato l' applicazione a quistioni spettanti alle scienze fisico-matematiche.

Di poi il Socio attuale Signor Cavaliere Leopoldo Nobili ha letto una Memoria intitolata « Confronto fra i due galvanometri più sensibili, la rana ed il moltiplicatore a due aghi, con un seguito d' esperienze » Fra queste esperienze vi ha quella che fissa la direzione della corrente propria della rana, la quale corrente va dal muscolo al nervo, ossia dai piedi alla testa. Con altre esperienze risolve la questione relativa allo sviluppo delle correnti elettro-chimiche insorta fra i Signori Becquerel e Davy. Egli trova che si sviluppano, generalmente parlando, delle correnti elettriche all' atto delle combinazioni chimiche, ma che tali correnti non sono in relazione nè coll' intensità dell' azione chimica, nè colla natura degli elementi elettro-positivi, od elettro-negativi. Nello stesso scritto l' Autore annuncia la scoperta di una nuova specie di correnti elettriche, quelle cioè che si sviluppano sui conduttori umidi col mezzo delle semplici variazioni di temperatura. Con questo fatto egli spiega l' origine del magnetismo terrestre, e si fa strada per riunire sotto un solo punto di vista le differenti specie di correnti. In un altro lavoro, ch' egli presenterà alla prima adunanza

Digitized by Google

della Sezione, tratta distesamente quest'ultimo soggetto, da cui risulta che la forza elettromotrice consiste, in tutti i casi, in uno sbilancio di temperatura. Questi due lavori saranno pubblicati quanto prima, per non ritardare ai Fisici la cognizione di una serie di nuovi fatti, che sembrano cangiare interamente di faccia lo stato attuale delle nostre idee sulla pila e sulle teorie elettrochimiche.

In seguito il Socio attuale Signor Maggiore GIUSEPPE CARANDINI ha letto una Memoria sopra di un compasso parabolico, accennando come esso potesse applicarsi alla configurazione degli specchi.

Da ultimo il Socio attuale Signor Professore GEMINIANO RICCARDI ha esposto un tentativo diretto a rendere più semplice la dimostrazione del principio delle velocità virtuali dovuta all'illustre Geometra Signor Conte Vittorio Fossombroni, la quale, sì pel rigore con cui procede, che per la sua grande generalità, è meritamente celebrata fra le tante dimostrazioni del medesimo principio che fin'ora si conoscono.

Adunanza della Sezione di Scienze

29 Febbraio 1828.

L'articolo riportato nella *Biblioteca Universale*, che stampasi a Ginevra, sotto il fascicolo di Ottobre 1827 parte scientifica, pag. 123, somministrò argomento al Direttore della Sezione Signor ANTONIO LOMBARDI R. Bibliotecario di trattenere la radunanza col dare contezza delle esperienze istituite dagl'illustri fisici Perkins ed Orsted per determinare la compressibilità dell'acqua e di alcuni altri liquidi, le quali esperienze, ancorchè non concordi nelle quantità dei risultati, dimostrano tuttavia che i detti liquidi sono più o meno compressibili però mediante l'azione grandissima del vapore impiegato come forza premente. Il medesimo Socio Direttore fece pure conoscere alcune singolari leggi e relazioni che il Signor Flanguergues, astronomo a Viviers, ha dedotte da un lungo corso di osservazioni sui fenomeni meteorologici paragonati alle fasi e distanze della luna, a tenore di quanto ne riferiva il citato Giornale nell'altro fascicolo di Dicembre 1827. pag. 274.

In seguito il Socio ordinario Signor Capitano ANTONIO ARALDI lesse la descrizione ed espose la teoria di una macchina da lui immaginata e destinata alla generale risoluzione meccanica delle equazioni algebriche, e mostrò come per essa, ove possa costruirsi colla necessaria esattezza, si eseguirebbero pure tutte le operazioni algebriche non che il calcolo di molte formole, e delle somme di un dato numero dei primi termini di una serie qualunque ad esponenti positivi o negativi. Egli accennò inoltre come i principj ed i mezzi in essa macchina adoperati, e gli usi principali differiscono da quelli dell'altra eseguita dal Socio corrispondente il Chiarissimo Signor Carlo Babage allo scopo di liberare i matematici dalla parte più materiale e laboriosa del calcolo delle tavole.

Digitized by Google

Chiusa l' adunanza il Socio Professore GIUSEPPE BIANCHI, presentando alla Sezione un Saggio de' primi risultamenti ottenuti dalle sue osservazioni col Circolo meridiano, ed esponendo in ispecie l' obbliquità apparente dell' ecclitica da lui determinata nel solstizio del p. p. Dicembre: su di che egli si è trovato d' accordo quasi esattamente coll' analoga determinazione del celebre astronomo Sig. Abate Oriani, fatta nell' epoca stessa e mediante un grande Circolo moltiplicatore.

Adunanza della Sezione di Lettere

15 Marzo 1828.

Il Socio attuale Sig. Don CELESTINO CAVEDONI lesse alcuni cenni su i *Trovatori*, che furono alla Corte de' Marchesi d' Este nel Secolo XII, e nel XIII, e su le lodi da essi date a' Marchesi Azzo VI, ed Azzo VII, a Giovanna, a Costanza,, ed a Beatrice d' Este, che per ragione de' tempi si argomenta fosse la B. Beatrice I.

In seguito il Socio attuale Signor Professore GIOVANNI DE' BRIGNOLI lesse una sua Dissertazione inedita tendente a persuadere non poter farsi una buona epigrafe in altra lingua che nella latina; il che egli ha cercato provare mettendo a confronto colla latina tutte le lingue vive d' Europa; dal quale solo confronto risulta, che nessnna di esse è dotata di quella concisione, e di quella forza ed energia che si richiede, onde fare una epigrafe che abbia i requisiti tutti necessarj ad essere tenuta per buona, giusta le leggi dell' arte epigrafica. L' autore ha cercato ancora di rispondere alle obbiezioni che sogliono fare i sostenitori della epigrafia italiana.

Adunanza della Sezione di Scienze

24 Aprile 1828.

È stata letta in prima una Memoria del Socio attuale Signor Dottor ARCANGELO CRESPELLANI e da lui trasmessa, concernente un'apparecchio da lui immaginato per le fratture complicate della mascella inferiore, allo scopo di tenere in sito i pezzi fratturati e d' impedirne lo spostamento in basso ed all'indietro. Dopo di avere esposto le indicazioni terapeutiche e la costruzione del novello apparecchio, non che i metodi proposti da altri celebri Chirurghi, l' Autore ha riferito due casi occorsi a lui nella pratica, e nei quali l' applicazione del proprio metodo ebbe il più felice successo.

Lesse indi il Socio attuale Signor Don CELESTINO CAVEDONI alcune sue osservazioni per mostrare che Modena non fu dedotta Colonia Romana prima dell' anno 535. di Roma, come parve al Cluverio ed al Tiraboschi, ma soltanto nel 569, come si ha da Livio, ed anche da Polibio, qualora ben si consideri.

Digitized by Google

Il Socio attuale Signor Professore DE'BRIGNOLI proseguì leggendo il commento al § 4 del I.° Libro della *Filosofia Botanica* di Linneo, nel qual commento l'Autore propone una definizione alquanto diversa della Botanica, divide l'intera scienza nelle quattro sezioni da lui dette *teorica, pratica, applicata ed erudita,* e suddivide ciascuna di queste in molti rami, che pur sono altrettante Scienze particolari dal medesimo noverate e distinte.

E in fine il Socio attuale Signor Professore BARANI lesse una succinta notizia relativa all'olio ed all'acido estratti per mezzo dell'alcool dai semi del *carpesium cernuum.* Non avendo egli avuto il mezzo di operare fuorchè sopra una ben piccola quantità di sunnominati semi non gli è stato permesso di assicurarsi, se l'ottenuto acido sia uno di quelli che si conoscono, oppur no; indagine ch'egli si propone di tentare se riuscirà a procurarsi una maggior quantità di detti semi; e cercherà egli poi ad un tempo di conoscere le proprietà dell'olio contenuto ne' semi stessi della menzionata pianta.

Adunanza della Sezione d'Arti

2 Maggio 1828.

Il Socio attuale Signor Maggior GIUSEPPE CARANDINI ha letta una memoria riguardante diversi livelli da lui insieme presentati secondo la nuova costruzione che egli aveva già immaginata e descritta in altra adunanza. In questa memoria ha particolarmente trattato dell'utile applicazione che può farsi ai detti livelli del cannocchiale munito di micrometro, ottenendosi allora anche una specie di *diastemometro,* ossia misuratore di distanze.

Adunanza della Sezione di Lettere

3 Luglio 1828

S. E. il Signor Marchese LUIGI RANGONI Presidente della R. Accademia lesse l'elogio del Consigliere Paolo Cassiani celebre matematico modenese, personaggio oltremodo distinto per probità e modestia. L'Autore fu inteso a mostrare quanto valesse il Cassiani nella scienza che professò, e quanto si rendesse benemerito nel servizio degli Estensi Sovrani tanto nell'esercizio della cattedra, come nella pubblica amministrazione, principalmente riguardo al ramo delle acque e strade. Questo elogio comparirà ben presto alla pubblica luce nel tomo I.° delle Memorie della R. Accademia.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Scienze

29 Marzo 1829.

Il Socio attuale Signor Professore Gio: Battista Amici legge la descrizione di un nuovo istrumento per livellare, e lo sottopone eseguito agli occhi dei Colleghi. Egli presenta inoltre uno squadro d'agrimensore di una particolare costruzione; e fa osservare che il principio, immaginato da lui, per collimare agli oggetti col mezzo di un cannocchiale Galileano, o senza cannocchiale, può applicarsi con molto vantaggio alle alidade delle tavolette pretoriane ed a parecchi altri strumenti di fisica e di matematica.

Succede il Socio attuale Signor Professore Gio: Battista Manfredini, e legge parte di un suo scritto intitolato « Giunte Italiane da apporre, quando che sia, ad una seconda edizione dell'opera del Sig. Cav: A. Richerand *Histoire des progrès récents de la Chirurgie.* » E da prima riconosciuto in una breve introduzione il bisogno di una Storia de' mirabili progressi della Chirurgia ne' primi cinque lustri del corrente secolo, ed accennate le qualità indispensabili ad uno Storico contemporaneo, l'Autore si fa tosto ad esaminare quanto il Ch. Richerand sia riescito nel suo proponimento. Nè ciò potendo apparir meglio quanto accompagnando lo Storico Francese nella disposizione stessa delle materie da lui trattate, così il nominato Socio ha battuto questa via, ora chiamando ad esame le cose o le opinioni riferite, ora notando le più importanti omissioni fatte, e tal volta soccorrendo a tale mancanza con opportune aggiunte. Soprattutto poi vuolsi rendere manifesta la parte grandissima ch'ebbero in ogni tempo i Chirurgi Italiani ai perfezionamenti della scienza ed arte loro nobilissima: il perchè avvertiva l'A. sin da principio, che si vedrà in fine delle sue considerazioni, quanto giustamente o ingiustamente, senza parzialità o con prevenzione abbia il Signor Richerand nella sua storia giudicato della Francia o delle altre nazioni europee. Li paragrafi esaminati sono: I.° trapanazione: 2.° fistola lagrimale: 3.° operazione della cateratta: 4.° perforazione del timpano: 5.° rinoplastica; e l'esame dei successivi sarà letto nelle venture adunanze.

Indi il Socio attuale Signor Dottor Vincenzo Amici produce una sua memoria nella quale espone un metodo generale e diretto per iscioglière i problemi inversi di *massimo o minimo*, mostrando com'esso possa inoltre servire a risolvere i problemi inversi di punti singolari. Egli lo applica ad esempii particolari e fra gli altri al quesito: « Date due rette, che formiuo fra loro un'angolo noto, determinare le equazioni di un sistema di linee piane o a doppia curvatura, e di un sistema di superficie il quale, passando per gli estremi delle date rette, renda una funzion qualunque di esse massima o minima fra tutte le funzioni simili di altre due rette che, partendo dallo stesso punto da cui parton le prime e formando fra loro lo stesso angolo dato vanno ad incontrare le linee o superficie da determinarsi. »

Digitized by Google

È stato ancora presentato alla Sezione radunata un saggio dei quadri metallici colorati a disegno col nuovo metodo delle correnti elettro-chimiche d'invenzione del Socio attuale Signor Cavaliere LEOPOLDO NOBILI di Reggio, e dal medesimo spediti da Parigi. Come pure il Socio attuale Signor Maggiore GIUSEPPE CARANDINI ha mostrato un livello a riflessione fatto da lui eseguire secondo il noto di lui metodo, e ne ha indicato la maniera di adoperarlo.

Adunanza della Sezione di Lettere

12 Febbrajo 1829.

Il Socio attuale Signor Conte MARIO VALDRIGHI legge la prima parte di un discorso dell'altro Socio attuale Signor Don SEVERINO FABRIANI sull'immortal benefizio dagli Ecclesiastici recato alla Letterattura conservandola nel medio evo.

Il Socio attuale Signor Don CELESTINO CAVEDONI legge una Memoria, nella quale dà la notizia di trè antichi ripostigli di Medaglie Consolari e di Famiglie Romane, che si rinvennero nel territorio modenese negli anni 1812, 1815, e 1828.

Il Socio attuale Signor Dottor CESARE GALVANI legge un componimento poetico in morte di Vincenzo Monti.

Adunanza della Sezione di Scienze

13 Marzo 1829.

Dal Socio attuale Signor Professore GIOVANNI BRIGNOLI de' Brunnhoff venne letta parte del suo Commentario latino alla Filosofia Botanica del *Linneo;* ed argomento essendone le malattie delle piante, il Commentatore vi produsse una sua nuova distribuzione di tali malattie in classi, ordini, generi, e specie, assumendo egli i caratteri delle classi dalla medicina animale, che divide le malattie tutte in ipersteniche, iposteniche ed irritative.

Indi il Socio attuale Signor Professore Gio: BATTISTA MANFREDINI venne continuando la lettura delle sue « Giunte Italiane alla Storia del Signor Richerand », e prese ad esame i seguenti paragrafi X, XI: Invaginamento degli intestini; Ano artificiale; XII, XIII, XIV: Cinti erniarj; Incisione dello strangolamento nelle ernie, o Erniotomia; Fistola all'Ano; XV: Stringimenti dell'uretra; XVI: Calcoli orinarii; mezzi litontritici; Litotomia; XVII: Cura radicale dell'Idrocele; XVIII: Aneurisme. Sopra ognuna delle quali materie egli fece quelle analoghe riflessioni, cui lo stato attuale della Scienza ed Arte chirurgica somministra, senza parzialità e mirando a quella rettitudine di fatti e di opinioni che è per avventura l'elemento principale di una storia. Reso per ciò il suo a que' valentuomini d'ogni contrada, i quali, passati sotto silenzio da Richerand, cotanto crebbero i fasti della Chirurgia, dall'A. fu mostrata particolarmente la parte

Digitized by Google

grandissima degli Italiani nel migliorare, o perfezionare il subietto degli enumerati paragrafi, come per prenderne uno solo, fece l'insigne *Scarpa* intorno alle Ernie, e alle Aneurisme, con que' suoi due lavori che gli accordarono un nome europeo, a malgrado che lo abbia voluto tacere lo Storico Francese. Imperocchè fu precisamente per gli insegnamenti di lui, che la operazioae delle Aneurisme è divenuta a' di nostri cosa di tanta confidenza, che ogni chirurgo, per poco di senno ch' egli abbia, si accinge senza esitazione ad eseguirla.

E in fine il Socio attuale Sig. Professore GIUSEPPE BIANCHI presentò, accompagnate da brevi riflessi, le declinazioni da lui determinate delle 36 stelle principali, dette di *Maschelyne;* e facendone il confronto colle analoghe ottenute dai celebri Professori Bessel e Plana, mostrò come s'accordino mirabilmente li tre circoli meridiani di Könisberg, di Torino e di Modena, che sono di uguali dimensioni e opera dello stesso rinomato meccanico di Monaco. Questo confronto fu anche annunziato per servire di prodromo a più grave lavoro sulle rifrazioni astronomiche, nel quale il nominato Socio si occupa, e pel quale egli avvertì essere la posizione del R. Osservatorio singolarmente favorevole.

Adunanza della Sezione d' Arti

27 Marzo 1829.

Il Socio attuale Signor Maggior GIUSEPPE CARANDINI legge una memoria, e presenta il disegno di una così detta *Carretta rovente* diretta all'uso di sgombrare le vie dalla neve, proponendo quivi una particolar costruzione del mozzo da ruote a diminuzione d'attrito, e quindi anche a risparmio della sostanza untuosa, che si suole adoperare per questo fine.

Sono in seguito stati presentati quattro quadri rappresentanti le copie della Eneide di Virgilio tratte dagli originali dipinti in muro da Nicolò Abbati esistenti nel R. Palazzo, che il Signor Giusto Carandini Cadetto nell' I. R. Reggimento Nugent ha eseguite ad encausto nella carta ad uso d'acquerello. Il metodo da esso tenuto è lo stesso del già descritto dal Signor Maggior CARANDINI in una Memoria letta all' Accademia nell'Adunanza del 9 Maggio 1825, nella quale occasione però i saggi presentati furono solamente fatti ad imitazione delle pitture ad olio; in cui era notabile la solidità e vivacità dei colori, mentre questi ultimi dimostrano che col metodo stesso può essere imitata altra maniera di dipingere con molta facilità e finitezza.

Di poi il Signor ANTONIO LOMBARDI Primo Bibliotecario di S. A. R. comunica la descrizione di un meccanismo prodotto dal Signor Cesare Zoboli per trasformare il moto alternativo in continuato, e ne presenta il modello da esso costruito, che la Sezione riconosce commendevole per la sua precisa esecuzione, ed utile nell' applicazione sua in grande pel precipuo oggetto, cui fu destinato, di sollevar pesi sulle armature delle fabbriche.

Digitized by Google

Adunanza della Sezione di Lettere

2 Aprile 1829.

Nominato Socio attuale il Signor LUIGI CAGNOLI, uno de RR. Ducali Censori, manifesta all' Accademia la più sentita gratitudine pel compartitogli onore. Presenta in dono alla stessa le Opere del celebre Conte Agostino Paradisi, del quale ha scritto l' elogio. Mostra con opportuni esempi, come il Paradisi fosse eccellente in quelle Odi, che abbracciano il morale, civile e religioso insegnamento, e come abbiasi a reputare un Lirico di primo ordine. Adduce i motivi per cui nell' elogio ricusò di fare un' esame comparativo tra il Canzoniere d' Agostino e quello di Giovanni Paradisi, comparso alla luce del pubblico qualche tempo dopo la morte di lui; e con evidentissime prove di fatto dà viemmeglio a conoscere che tante proposizioni e note, che leggonsi nel Canzoniere di quest' ultimo Poeta, non sono che vere calunnie contro il decoro patrio e la dignità de' Governi.

Il Socio attuale Signor Conte MARIO VALDRIGHI legge la seconda parte della Memoria dell' altro Socio attuale Signor Don SEVERINO FABRIANI sull' immortal benefizio dagli Ecclesiastici recato alla Letteratura conservandola nel medio evo.

(Continua nel Vol. XIX).

Digitized by Google

LIBRI ED OPUSCOLI PERVENUTI ALLA R. ACCADEMIA

Nell' anno accademico 1877-1878.

I.

ACCADEMIE, ISTITUTI E CORPI MORALI ITALIANI

Accademia della Crusca. Firenze. — **Atti.** Adunanza 19 novembre 1877.
Accademia dei Fisiocritici. Siena. — **Atti.** Serie III, T. I.
Accademia Gioenia di Scienze Naturali. Catania. — Serie III, T. X, XI.
Accademia dei Lincei. Roma. — **Atti.** 1876-77; 1877-78. — **Memorie.** Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche, T. I; Classe di Scienze Fisiche, Matematiche ecc. T. I, Disp. 1, 2. — **Transunti.** T. I, Sess. 7, T. II.
Accademia Medica di Roma. — **Atti.** Anno IV, fasc. 1, 2.
Accademia di Medicina di Torino. — **Giornale.** Anno XL, N. 3-18; Anno XLI, N. 1-13, 15-18; Anno XLII, N. 1.
Accademia Olimpica. Vicenza. — **Atti.** 2.° Semestre 1876; 1.° Sem. 1877.
Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. — **Memorie.** Serie 3.ª T. VII, fasc. 1; T. VIII, IX, fasc. 1, 2. — **Rendiconti** del 1845 e 1876-78.
Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. — **Rendiconto** Luglio, Agosto, Ottobre, Novembre 1877.
Accademia delle Scienze di Torino. — **Annuario** 1877-78. — **Memorie,** Serie II, T. XXIX.
Archivio storico per le Provincie Napoletane. — Anno II, fasc. 4; Anno III, fasc. 1, 2, 3.
Consiglio Provinciale di Modena. — **Atti.** Anno 1877.

Digitized by Google

Deputazioni (RR.) di Storia Patria per le Provincie dell' Emilia. -- **Atti e Memorie.** Nuova Serie, T. I, II, III Parte 1.ª

Giornale di medicina militare. Roma. — 1877, N. 7-12; 1878, N. 1-4, 6-9.

Giornale Ligustico di Archeologia, Storia e Belle Arti.— Genova. 1878, fasc.ⁱ 4.

Istituto (R.) Industriale e Professionale di Torino. — **Annali.** T. VI.

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano. -- **Memorie.** Serie III, T. V, fasc. 1. — **Rendiconti.** T. X, fasc. 15-20; T. XI, fasc. 1-15.

Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. — **Statistica.** Bilanci comunali, 1875-77; provinciali, 1877. — Elezioni generali, 1861, 1865-67, 1870, 1874, 1876. — Emigrazione, 1876. — Movimento dello Stato Civile, 1876: Parte I e II. — Navigazione nei porti del Regno, 1875-77; — alle Indie orientali, 1877, N. 88 e 100. — Personale e materiale della Marina, 1876. — Popolazione. Censimento 31 Dicembre 1871.

Ministero dell' Interno. — Annuario statistico italiano. — Anno I, 1878. Roma 1878.

Museo Civico di Storia Naturale di Genova. — **Annali.** T. X, XI, XII.

Osservatorio di Moncalieri. — **Bullettino Meteorologico.** T. XI, N. 8-12; T. XII, N. 1-12; T. XIII, N. 1.

Municipio di Cremona. — Repertorio Diplomatico Cremonese, — T. I. Cremona, 1878.

Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino. — **Atti.** T. I, II fasc. 1, 2.

Società Ligure di Storia Patria. Genova. — **Atti.** T. IX, fasc. 3.°; XIII, fasc. 2.°

Società Medico-Chirurgica di Bologna. — **Bullettino.** Anno 1877, Luglio, Ottobre; Anno 1878, Marzo, Maggio, Giugno, Agosto, Novembre. — **Memorie.** T. VI, fasc. 7; Bologna 1877.

Società dei Naturalisti in Modena. — **Annuario.** Serie II, Anno XI, fasc. 1-4; Anno XII, fasc. 1-3.

Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo. — **Bullettino,** N. 2, 3, 5-8.

Società Siciliana per la Storia Patria. — **Archivio Storico Siciliano.** N. Serie. Anno I, II, III fasc. 1, 2.

Società Toscana di Scienze Naturali in Pisa. — **Atti.** T. III, fasc. 1-2; Pisa 1877-78.

Spallanzani (Lo), Rivista teorico-pratica di Scienze Mediche e Naturali; Modena. Anno 1877, fasc. 6-12; Anno 1878, fasc. 1, 3-9.

Università degli Studi di Modena. — **Annuario scolastico** per l' anno accad. 1877-78.

Digitized by Google

II.

ACCADEMIE, ISTITUTI E CORPI MORALI STRANIERI

Academia Real das Sciencias de Lisboa. — **Catalogo das Publicaçoes.** 1787-1876. — **Estatutos et Regulamentos,** 1875. — **Jornal** de Sciencias Mathematicas e Naturaes, T. I-V; Lisboa 1868-1876. — **Memorias.** Classe de Sciencias Mathematicas, Phisicas et Naturaes; N. Ser. T. I-V, parte 1.ª; Classe de Sciencias Moraes, Politicas et Bellas-Lettras; T. I, p. 2.ª; T. II-III. parte 1.ª e 2.ª — **Sessao pubblica** em 12 Xbro 1875. — Vedi Diaz, Ribeiro.

Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon. — **Mémoires.** Classe des Sciences, T. XXII. — Classe des Lettres, T. XVII.

Academy (The Royal Irish). Dublin. — **Proceedings.** Ser. III, T. I, N. 11; T. II, N. 4-6. — **Transactions.** Science: November 1875; January, March, May, Juni 1876.

Akademie (K.) van Wetenschappen. Amsterdam. — **Verhandelingen.** Deel I-XVII, 1854-77; — Letterkunde, I-XI Deel, 1858-77. — **Verschlagen en mededeelingen.** Naturkunde Tweede Reek, XI Deel 1877. Letterk. Twede Reeks, VI Deel 1877. — **Carmina latina** laudata in Academia Regia Neerlandica, 1877.

Akademie (Kön.) der Wissenschaften. Berlin. — **Abhandlungen,** 1860-76; Bands 16. — **Monatsberichte,** Januar 1860 — Mai 1878.

Akademie (Kön. Bayerischen) der Wissenschaften. München. — **Abhanlungen.** Histor. Classe: Band XIII, Abth. 2, 3; Band. XIV, Abth. 1. — Mathem.-Physik Classe: Band. XIII Abth. 1. — Philos.-Philolog. Classe: Band XIV, Abth. 1, 2.

Akademie (K.K.) der Wissenschaften. Wien. — **Almanach,** 1877. — **Archiv** für österreichische Geshichte; Band LIV, Hälfte 2; LV, LVI Hälfte 1, — **Denkschriften.** Philos.-Histor. Classe: B. XXVI, XLIX — Mathem.-Naturwis. Classe: B. XXXVII — **Sitzungsberichte.** Matematisch

Digitized by Google

etc. Classe. I^{e} Abth. B. LXXIII, H. I-V; B. LXXIV, H. I-V; B. LXXV, H. I-V; 1876-1877 — II^{e} Abth. B. LXXIII, H. III, IV; B. LXXIV, H. I-V; B. LXXV, H. I-V; B. LXXVI, H. I. — III^{e} Abth. B. LXXIII, H. I-V; B. LXXIV, H. I-V; B. LXXV, H. I-V; 1876-77.

Association (American) for the advancement of Science. — **Proceedings.** Salem 1877.

Association (British) for the advancement of Science. — **Report** of the Forty-sixth meeting. London 1877.

Astronomical Observations made at the royal Observatory of Edimburgh (Piazzi Smith); T. XIV, for 1870-77.

Commissions Royales d' Art et d' Archéologie, Bruxelles. — **Bullettin,** 1861-76 (quinze années). Seizième année, cahiers 7-12.

Commission Impériale Archéologique de S.^{t} Pétersbourg. — **Compte-Rendu.** (1872-75.)

Institut de France. Académie des Sciences — **Mémoires.** T. XL. Deuxième Série T. XXIII, XXIV, XXV. — **Recueil** de Mémoires, Rapports etc. relatifs à l' observation du passage de Venus sur le Soleil. T. I, Part. 1.^{e} et 2.^{e} avec Supplement.

Institut (R. G. D.) de Luxembourg. — **Publications** de la Sect. Historique. Année 1877.

Mines Departement of New Sout Wales. — Annual Report for the year 1877. Sydney 1878.

Observatoire Royal de Bruxelles. — **Annales météorologiques.** 1874-76.

Sällskapets (Notiser ur) Pro Fauna et Flora Fennica. — **Förhandlingar** 1-3 Häftet; 1848-57. — Ny Serie; 2-4, 6-11 Häftet; 1861-75. — **Meddelanden** 1 Häftet, 1876. — *Albo accademico* 1821-71. — Vedi Fries.

Smithsonian Institution. — **Annual Report** of te Board of Regents, for the year 1876. Washington 1877.

Societatis (R.) Scientiarum Upsaliensis Nova Acta (ad celebranda solemnia quadringenaria Universitatis Upsaliensis — MDCCCLXXVII).

Société d' Agriculture, de Sciences et d' Arts séant à Douai. — **Mémoires.** Deuxième Série, T. XIII, 1874-76.

Société Belge de Microscopie. Bruxelles. — **Annales.** T. III; Année 1876-1877. — **Bullettin** 1877; N.^{os} 1-14; 1877-78 N.^{os} 1-12.

Société Chimique Russe et Société Physique à l'Université de S. Pétersbourg. — **Journal.** T. VIII, N. 1-9; T. IX, N. 1-9; T. X, N. 1-6.

Société Entomologique de Belgique. Bruxelles. — **Annales.** T. XX. — **Procès verbaux.** Série II, N. 55.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou. — **Bulletin.** Année 1877 et 1878, N. 1-4.

Digitized by Google

Société des Ingénieurs Civils. Paris. — **Mémoires** et **Compte rendu** des travaux. Janvier-Juin 1878. — Séance du 20 septembre 1878.

Société Linnéenne du Nord de la France. Amiens. — **Bulletin mensuel.** N. 61-63, 70-75.

Société Nationale des Sciences Naturelles de Cherbourg. — **Mémoires** T. XX, (Deuxième Série T. X).

Société de Physique et d' Histoire Naturelle de Genève. — **Mémoires.** T. VIII-XXIV (Part II); 1839-1876. — Table des T. I-XX. Suppl. 1er e 2e au T. XII; 1848-49. — T. XXV, P. I.

Society (Boston) of Natural History. — **Memoires.** T. II, P. IV, N. V. — **Proceedings.** T. II, N. 6; Appendix, Index and Title page. — T. XVIII, Part III-IV; T. XIX, Part I-II.

Society Geological (Royal) of Ireland. Dublin. — **Journal.** T. IV, Part III-IV. (New Series).

Society (London Mathematical). — List of Members, 1877. — **Proceedings,** N. 112-133.

Society (R.) of New South Wales. Sydney; Australia. — **Journal** and **Proceedings.** T. XI; 1877. — Vedi CLARKE e MINES DEPARTEMENT.

Sternwarte (K.) bei München. — **Bestimmung** der geographischen Breite. Suppl. zum XXI Bande der Annalen. München 1877. — Vedi LAMONT.

Universität Strassburg. — **Verzeichniss** dër Vorlesungen an der Universität Strassburg in Wintersemester 1877-1878. Strassburg 1877. — Dissertazioni inaugurali diverse. Vedi AUTORI STRANIERI.

Zoologisch-Botanischen (K.K.) Gesellschaft in Wien. — **Verhandlungen.** Jargang 1776, 1877.

III.

AUTORI ITALIANI

BELLAVITIS prof. GIUSTO. — Sulla risoluzione delle congruenze numeriche e sulle tavole, che danno i *logaritmi* degli interi rispetto ai vari mo-

Digitized by Google

duli. (Estr. dal T. I, Serie III, Classe di Scienze Fisiche ec. della R. Accad. dei Lincei). — Quattordicesima Rivista di Giornali presentata al R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti nel giugno 1877. — Id. Parte II. — Id. Parte III, ed ultima; Giugno 1878.

Bertolotti A. — I Testamenti di Alessandro Tassoni. Firenze Tip. della Gazzetta d' Italia 1877. — Giornalisti e Negromanti in Roma nel secolo XVII. Firenze 1878.

Boni C. — Avanzi di costruzioni romane alla Scartazza presso Modena. Modena, Toschi 1878.

Bortolotti Pietro. — Del Talento Omerico. (Berolini 1877. Ex comm. phil. in hon. Theod. Mommseni seors. expressum).

Brugnoli Avv. Giuseppe. — Liriche inedite, Firenze 1878. — La saggia Moglie. Firenze, 1878.

Bruzza Antonio Luigi. — Norme d' Igiene morale, Parte I, II. Genova, 1878.

Campori Cesare. — Cristina di Svezia e gli Estensi. Modena, Vincenzi 1877. — Storia del Collegio S. Carlo. Modena, Vincenzi 1878.

Caretto (Del) march. Galeotto. — *Simon Greco;* Commedia scritta nel 1498. Torino, Paravia 1878.

Cesari dott. Giuseppe. — La Berberina e la Chinina contro le febbri periodiche ed il tumore splenico per influenza malarica. Modena, 1878.

Castagna Nicola. — I proverbi dell' Ariosto tratti dal poema e illustrati. Ferrara, Taddei 1877.

Celi Ettore e Comes Orazio. — Sulla malattia dei cavoli apparsa negli orti dei dintorni di Napoli nell' inverno 1878. (Estr. dalle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Napoli).

Celoria Giovanni. — Sopra alcuni scandagli del cielo eseguiti all' Osservatorio reale di Milano. Milano 1878.

Chierici Gaetano. — Elogio funebre di Vittorio Emanuele II. Reggio (Emilia) 1878.

Comes O. — Azione della temperatura, della umidità relativa e della luce sulla traspirazione delle piante. (Estr. dai Rendiconti della R. Accademia delle Scienze in Napoli).

Crotti ing. Francesco. — Espressione generale della forza nel movimento tautocrono. Torino, 1877.

Cuoghi Costantini Antonio. — Le acque minerali della Provincia di Modena. Modena, Moneti 1877.

Denza prof. Francesco. — La corrispondenza meteorologica italiana alpina-appenninica. Relazione. Roma 1878. — Rivista mensuale di meteorologia agraria per l' anno 1876-77. — Studi sulla climatologia

Digitized by Google

della Valle d' Aosta. Torino, Artigianelli 1877. — Commemorazione del P. Angelo Secchi. Torino 1878.

Ercolani e Tommasi. — Evoluzione, scienza e naturalismo. Napoli, Morano 1877.

Ferretti ab. Antonio. — L' uomo: sua primitiva barbarie, progressivo incivilimento ed assoluta antichità in base alla mitologia greca e latina. Milano, 1877.

Fornari Vito. — Della Vita di G. Cristo, Libro secondo. Firenze, Barbèra 1875.

Franchini Giuseppe. — Appendice al bozzetto *La terra non gira intorno al Sole*. Napoli, Jovene 1877.

Franciosi Giovanni. — Scritti varii. Firenze, Successori Le Monnier, 1878.

Frigieri ab. prof. Antonio. — Vittorio Emanuele. Due elogi funebri. Acireale 1878.

Frisiani prof. Paolo. — Su alcuni temporali osservati nell' Italia superiore (Estate 1876). Napoli 1877. — Sulla dipendenza dell' evaporazione dall' area e dalla figura della superficie liquida evaporante. Milano 1877. (Estr. dai Rendiconti dell' Istituto Lombardo).

Fusinieri Ambrogio. — Scritti varii, editi dal Comune e dall' Accademia Olimpica di Vicenza. Vicenza, Burato, 1878.

Gabelli A. — Gli Scettici della Statistica. (Estr. dall'Archivio di Statistica con aggiunte e correzioni. Anno II, T. I.)

Galassini A. — Discorso intorno ad Alfonso Varano. — Della vita e delle opere di P. Pindemonte. Modena, Vincenzi 1877.

Garbiglietti A. — I Pigmei della favola di Omero. Torino, Bona 1877.

Gaudi P. Casimiro. Davide Teniers, Commedia in 3 atti. Savigliano 1877. — Il matrimonio religioso e il matrimonio civile. Ravenna.

Grimelli G. — Malattia dominante col titolo *Difterite*. Modena, Società Tipografica 1876.

Lorenzoni G. — Santini Giovanni. La sua vita e le sue opere. Parma 1877.

Luppi dott. G. — Éducation hatée des vers à soie ec. Lyon, 1878.

Maggiora-Vergano P. — Di una moneta inedita di Acqui. Asti, Vinossa 1877. — Dominazione Viscontea in Asti, tre documenti. Asti. 1878.

Mancini Luigi. — Dio è vivo. Lettera ad un amico. Fano, 1878.

Martinetti Cardoni Gaspare. — Ravenna antica. Faenza, Conti 1878.

Morsolin Bernardo. — Giangiorgio Trissino. Vicenza, Burato 1878.

Muoni cav. Damiano. — Cenni sulle varie raccolte da lui possedute. Milano, Molinari 1874. — L' antico stato Romano di Lombardia. Milano, Brigola 1871. — Archivio di Stato in Milano, Milano 1874. — Tunisi: Spedizione di Carlo V Imperatore. Milano 1876.

Digitized by Google

NUNES-FRANCO ALBERTO. — Del Duello. Torino, Società Tipogr. edit. 1865.

OMBONI prof. G. — Le Marocche, antiche morene mascherate da frane. Padova, 1878.

PAPAROZZI Ing. FRANCESCO. — Risposta a una nota del prof. Macaluso sulla funzione della elettricità indotta. Milano, 1877.

PIETRO PAOLO FRANCESCO DA IRAPEA. — Due parole sul trascendentalismo e la filosofia dell' esperienza. Nell' autunno del 1877.

PUGLIA ALESSANDRO. — Sulla necessità di studii speciali nelle Scuole di Clinica medica. Modena, 1877.

PUGLIA G. — Sulla porpora visuale. Modena, Vincenzi e Nepoti 1878.

RAGONA D. Vedi MOHN.

RASELLI O. — Ancora de' testamenti di Alessandro Tassoni. (Estr. dalla Rivista Europea) Firenze 1877.

RICCARDI PAOLO. — Saggio di studi e di osservazioni intorno all' attenzione nell' uomo e negli animali. (Parte IV. L'attenzione negli alienati). Modena, Società Tipografica 1877. — Opuscoli varii in materia di Antropologia. — Studi antropologici intorno ad uno scheletro di Accinese. (Estr. dall' Archivio per l' Antropologia e la Etnologia. T. VIII, fasc. 2.) — Saggio di alcuni studi intorno ai crani della Toscana. (Estr. dal Giornale della R. Accad. di Medicina in Torino.) Torino 1878.

RICCARDI prof. PIETRO. — Memorie edilizie modenesi. (Estr. dagli Atti e Memorie della R. Deputazione di Storia Patria). Modena, Vincenzi 1878. — Biblioteca Matematica Italiana. Appendice alla Parte I. Modena, Società Tipografica 1878.

RICCÒ A. — Alcune eleganti esperienze ottiche. (Estr. dalle Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani, T. VI).

RIZZOLI prof. FRANCESCO. — Asportazione di estesa porzione di retto intestino per neoplasma fibrosa. (Estr. dalla Serie III, T. VIII delle Memorie dell' Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna).

RUFFINI F. P. — Sulla risoluzione delle due equazioni di condizione delle trasformazioni cremoniane delle figure piane. Bologna, Parmeggiani 1877. — Di un problema di analisi indeterminata che s'incontra nella teoria geometrica delle trasformazioni delle figure piane. Bologna, 1878.

SANDONNINI TOMMASO. — Della importazione del Frumentone. Firenze, Tip. della Gazzetta d' Italia, 1828.

SCHIAPARELLI G. V. — Osservazioni astronomiche e fisiche sull' asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte. Roma, Salvioni 1878.

SCHIAPARELLI e DENZA. — Osservazioni delle meteore luminose, Anno VI, VII, VIII, IX. 1875-77.

Digitized by Google

Siciliani Pietro. — Sul rinnovamento della filosofia positiva in Italia. Giudizi e lettere. Firenze, 1871.

Simonini G. — Ad Franciscum Gallium Sacerdotem in Collegio Caroliano Vicerectoris munus ineuntem kal. jan. ann. 1878. Mutinae, 1878.

Siragusa F. P. C. — La Clorofilla. Palermo 1878.

Sora-Delitala Carmine. — Concetto e attinenza della Ragion pubblica amministrativa. Sassari 1878.

Tamburini dott. Augusto. — Contribuzione alla fisiologia e patologia del linguaggio. Reggio-Emilia 1876. — Del concetto odierno della Fisiologia normale e della Patologia della mente: Prelezione. Firenze 1876. — Dei manicomi criminali. Reggio-Emilia 1876. — Pariencefalite fronte-parietale. Reggio-Emilia 1877.

Tommasi dott. Donato. — Azione dei raggi solari sui composti aloidi d'argento. (Estr. dai Rendiconti del R. Istituto Lombardo. Ser. II, T. XI, fasc. 14-15). — Riduzione del Cloralio. (Estr. Id.) — Sull'azione della così detta forza catalitica spiegata secondo la teoria termodinamica. — Riduzione del cloruro d'argento e del cloruro ferrico. — Riduzione dei clorati in cloruri senza l'intervento del preteso stato nascente dell'idrogeno. Nota. — Ricerche fisico-chimiche sui differenti stati ellotropici dell'idrogeno. (Estr. id.).

Vitantonio Giampietro. — Ultime memorie di Clinica medica pubblicate in vari giornali italiani. Napoli 1875-78.

Vittorio Emanuele II. — Discorsi al Parlamanto nazionale e Proclami di lui all'Esercito, raccolti e pubblicati a cura della Presidenza del Senato. Roma 1878.

Volpicelli Paolo. — Risposta alla Memoria di S. Palmieri sulle presenti condizioni della meteorologia elettrica. Roma 1875. — Note en réponse aux observations de M. Blavier. — L'illustre sig. Tyndall conferma la teorica di Melloni sulla elettrostatica induzione. (Estr. dal Vol. II, Serie 3. Transunti della R. Accademia dei Lincei). — Risposta alla Nota del socio G. Cantoni contro la teoria di Melloni sulla elettrostatica induzione. Roma, Salvioni 1877. — Risposta alle obiezioni fatte dal prof. G. Pisati contro la moderna teoria di Melloni sulla elettrostatica induzione. (Estr. dal Vol. I, Serie 3, Classe di Scienze fisiche della R. Accademia dei Lincei).

Volta Alessandro (Onoranze a). Pavia 1878.

Woena A. — Nozioni elementari di Sfera armillare e Cosmografia. Modena, Rossi 1868. — Strenna del' *Aurora*. Modena 1872. — *Aurora*, Giornale Anno VII, 1-10. Illustraz. dell'*Aurora*, Modena 1875. — La lotta del cuore. Romanzo intimo. Modena, Società Tip. Ind. 1875.

Digitized by Google

IV.

AUTORI STRANIERI

Anonimo. — Pharaoh' s Daughter: Drama. — London 1868. — London 1874 (2.ª ediz.).

Béthancourt (L'Abbé F.) — Des Chansons de Geste du Cycle de Charlemagne et en particulier de la Chanson de Roland. Naples 1877.

Clarke W. B. — Remarks on the Sedimentary Formations of New South Wales; Sydney 1878.

Diaz Nicolas de Bonjumea. — Discurso sobre el Palmerin de Inglaterra y su verdadero autor. Lisboa, 1876.

Döllinger S. V. — Aventin und seine Zeit. München 1877.

Fries Th. M. — Genmäle med anledning af Sällskapets pro Fauna et Flora Fennica; Notiser Häft V och VI. Upsala, 1862.

Gümbel D. C. W. — Die geognostische Durchforschung Bayerns. München 1877.

Hohugren F. — De la unité des couleurs dans ses rapports avec les Chemins de fer et la Marine. Stokolm 1877.

Jaffé Karl. — Ueber die Anwendung des *Ferrum candens* bei chronischen Gelenkkrankeiten. — Strassburg 1877.

Kasemeyer Rudolf. — Inaugural dissertation zur Erlangung der Medicinischen Doctorwürde ec. Strassburg 1877.

Kannengiener Paul. — Dogmatismus und Skepticismus. Elberfeld 1877.

Lambert doct. Ernest. — Morphologie du Systéme dentaire des races humaines dans ses rapports avec l' origine des races et la théorie de Darwin. Bruxelles, Hayez 1877.

Lamont doct. S. V. — Meteorologische und magnetische Beobachtungen der K. Sternwarte bei München. Jahrgang 1877. München, 1878.

Legrand doct. — La nouvelle société indo-chinoise fondée par M. le marquise de Croizier et son ouvrage: *L' Art Khmer.* Paris 1878.

Digitized by Google

LOBSTEIN P. — Die Ethik Calvins in ihren Grundzügen entworfen. Strassburg 1877.

MILLER JOHN. — Metaphysics, or the Science of perception. New Jork 1875.

MANGELSDORF march. GUILELMUS. — Anecdota chisiana de re metrica. — Carolsruhae 1876.

MELSENS. — Des paratonnerres à pointes, à conducteurs et à raccordements terrestres multiples. — Description détaillée des paratonnerres établis sur l'Hôtel de Ville de Bruxelles en 1865. Bruxelles, Hayez 1877.

MOHN H. — Elementi di Meteorologia. Versione italiana del prof. D. Ragona. Torino, Loescher 1878.

OHRTMANN CARL, F. MULLER, A. WANGERIN. — Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Heft 1-3; Berlin 1878.

PRANTL (von) CARL: Festgabe zum Doctor. — Jubiläum der Herrn Professor doct. Leonhard von Spengel. München 1877.

RIBEIRO JOSÉ SILVESTRE. — Historia dos Estabelecimentos scientificos, litterarios e artisticos de Portugal. T. I-VI; Lisboa 1871-1876.

SAMMET RUDOLF. — Inaugural dissertation: Der Ophthalmoskopische Befund bei Retinitis albuminurica in seinem Verhältniss zu demjenigen einiger anderer Netzhauter Krankungen. Darmstad 1876.

SPENGEL D. A. — Ueber die lateinische Komödie. München 1878.

STIEDA doct. WILHELM — Zur Entstehung des deutschen Zunftwesens. Jena, Frommann 1876.

SWIONTEK LEOPOLD. — Inaugural dissertation zur erlangung der medizinischen Doctorwürde. — Ueber den Zusammenhang der Pthisis pulmonum ec. — Strassburg 1877.

WENDT EDMUND C. — Uber die Harder' sche Drüse der Saügethiere: Inauguraldissertation ec. — Strassburg 1877.

WEYL THEODOR. — Beiträge zur Kenntniss thierischer und pflanzlicher Eiweisskörper: Inauguraldissertation. Strassburg 1877.

Digitized by Google

Digitized by Google

MEMORIE

DELLA

SEZIONE DI SCIENZE

Digitized by Google

Digitized by Google

SULLA
FACOLTÀ ELETTROMOTRICE DELL' ALLUMINIO

In una dotta memoria (1) sul *Principio di Volta* dell' Ingegner Augusto Righi, questi, dopo descritto un suo nuovo *Elettrometro ad induzione*, ed esposte le ingegnose esperienze, mercè le quali ha potuto confermare la verità del principio Voltiano, classifica ancora l'alluminio, quale inferiore allo zinco, nella scala degli elettromotori di 1.ª classe. L'Autore fa notare che nel contatto *Al-Zn* è l' alluminio che si comporta da metallo più ossidabile, mentre in realtà il più ossidabile è lo zinco. » Questo fatto, » aggiunge egli, è una nuova prova in favore della teoria del » contatto. Che la differenza poi non dipenda da proprietà speciali » della lastra da noi adoperata, può mostrarsi facilmente, ponendo » i due dischi in comunicazione coi capi di un galvanometro ed » immergendoli nell'acqua distillata pura od acidulata. Vedremo

(1) Sul principio di Volta. Memoria dell' Ingegnere Augusto Righi, assistente alla Cattedra di Fisica della R. Università di Bologna. — Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1873.

Digitized by Google

» che l'alluminio in questo caso si comporta a fronte dello zinco, » come farebbe il rame. »

Anche il Gaugain (1), citato dal Righi, in una sua memoria sulla elettricità di strofinamento dei metalli, la quale egli misura dallo stato elettrico assunto dai medesimi nel loro attrito con determinati coibenti, pone allo strofinamento l'alluminio inferiore allo zinco, ricordando però che egli sperimentava su alluminio del commercio e non alluminio chimicamente puro. Col qual metodo non pretende il Gaugain di dare una scala assoluta dell'elettricità di strofinamento dei metalli: dice potersi per tal guisa distinguere i metalli più positivi dai più negativi e che, in generale, i metalli più ossidabili sono negativi nelle pile, e positivi allo strofinamento colle resine.

L'osservazione del Righi, singolare conferma del Principio Voltiano, ove questo volesse ancora adottarsi nella teoria della pile, condurrebbe a supporre nell'alluminio, in presenza di liquidi, una somma prontezza ad alzarsi nella scala degli elettromotori. Perciò mi parve non inutil cosa tentare nuove ricerche sull'argomento, sì in via elettrostatica che elettrodinamica. Mi sono valso d'una lastra d'alluminio fornitami dal Tecnomasio di Milano ed altra, meno impura, proveniente dalla ditta Eberlein, somministratami gentilmente dal Ch. Prof. di Chimica in questo Istituto tecnico Provinciale, G. Costantini Cuoghi. I corpi semplici che sogliono a preferenza inquinare l'alluminio, sono il ferro, il silicio ed il carbonio: però dal complesso delle mie prove sono indotto a ritenere che, sui fenomeni riferentesi all'azione elettromotrice, le impurità dell'alluminio in commercio, in quanto sono maggiori o minori, non esercitano una notevole influenza.

Dapprima, facendo uso di un buon elettrometro condensatore e di dischi isolati di alluminio, zinco e rame, ben levigati e

---

(1) Annales de Chimie et Physique, IV Serie, Tom. VI, Sept. 1865.

Digitized by Google

puliti a pomice ed olio, ho ripetuto più e più volte la nota esperienza dei dischi Voltiani. Ho sempre trovato l'alluminio inferiore allo zinco: anzi, malgrado le difficoltà inerenti a questo genere di esperimenti, in un giorno sereno ed asciutto, ebbi il seguente risultato:

Con 10 contatti *Al. Zn.* 3° divergenza
" *Zn. Cu.* 9° "
" *Al. Cu.* 11° "

Potevasi forse in questo ultimo caso aspettare un angolo di 12°: ma, ad ogni modo, parmi che l'osservazione risponda abbastanza alle previsioni teoriche. Dopo, mediante un elettroscopio semplice di Bonhemberger, potei confermare la facoltà elettromotrice suddetta dell'alluminio, facendo un solo contatto. Tale risultato può anche ravvisarsi conforme al posto occupato dall'alluminio nella scala elettrica dei corpi semplici.

Sebbene al Galvanometro, come afferma il Righi, avessi già più volte veduto l'alluminio comportarsi, rispetto allo zinco, siccome il rame: e ciò sia montando le pile con acqua distillata, sia acidulando questa con acido solforico, o nitrico, o cloridrico; volli però confermare la cosa anche con esperimenti di tensione. Disposi quindi a cavalcioni degli orli attigui di otto bicchierini sette coppie *Al. Zn.* Due elettrodi di ottone ben terso, posti entro il primo e l'ultimo bicchiere, portavano due reofori terminanti ciascuno in una lastretta di rame ben pulito, e queste poi, nella prova, facevansi toccare contemporaneamente, l'una il piatto inferiore e l'altra il superiore del condensatore. Usando acqua leggermente acidulata, e caricando l'elettrometro per 1', ottenni la divergenza di quasi 6°, in senso positivo se col piatto inferiore comunicava l'elettrodo che trovavasi collo zinco nello stesso bicchiere; negativo, se vi comunicava quello che trovavasi coll'alluminio. Egual risultato ebbi usando l'acqua distillata. Con sette coppie rame e zinco, operando in tutto come sopra si è detto, e coll'acqua acidulata, la divergenza salì a 15°.

Digitized by Google

Ora conveniva indagare se potevasi addimostrare nell' alluminio una somma prontezza ad alzarsi al disopra dello zinco pel contatto coi liquidi suaccennati.

Presi i due soliti dischi di zinco e d'alluminio, mi proposi di bagnarli per brevissimo tempo col tenerli sulla superficie dell'acqua pura: indi, asciugatili al sole, cimentarne all' elettroscopio coi contatti la virtù elettromotrice. Ma sul disco d' alluminio, pulito a pomice ed olio, operando nel modo suindicato l'acqua non aderiva punto e non poteva ammettersi veruua azione chimica: cercai togliere ogni untuosità con acqua di sapone, e finalmente bagnati con acqua entrambi i dischi ed asciugatili al sole, ottenni tosto all' elettroscopio l'invertimento dei segni, cioè l' alluminio negativo nel contatto e lo zinco positivo. Ripuliti i dischi a pomice ed olio, ricomparvero subito i segni positivi per l' alluminio, negativi per lo zinco.

Ma il modo più semplice di ottenere queste alternative, senza mai toccare il disco di zinco, è quello di pulire il disco d'alluminio ora a pomice ed olio, ora a pomice ed acqua. Nel primo caso lo si troverà sempre positivo rispetto allo zinco: nel secondo caso se il disco d'alluminio viene assaggiato immediatamente dopo lo strofinamento, potrà ancora trovarsi positivo, però con segni più deboli: ma se appena pulito, lo si lasci un brevissimo tempo a contatto della superficie di livello d' acqua distillata, indi si fa asciugare al sole, si troverà costantemente l'alluminio negativo rispetto allo zinco. Mediante le alternative di pulimento ad olio e ad acqua, ho avuto più volte e con prontezza le due elettricità dalla stessa lastra d'alluminio.

Io ho cercato ancora di ottenere successivamente questi due stati elettrici al galvanometro: ma coll'acqua acidulata, anche debolmente, non vi sono riuscito: credo io per una pronta aderenza ed azione chimica sul metallo che trovasi immerso e circondato dal liquido. L' esperienza però mi è riuscita coll'acqua distillata. Presa una lastra d' alluminio (Eberlein) l'ho fatta pulire diligentemente a pomice ed olio e mediante il filo sottile

Digitized by Google

d'una bussola dei seni l'ho accoppiata ad una lastra di zinco bene amalgamato: le lastre poi erano immerse in acqua perfettamente distillata. Le deviazioni dell'ago sono state assai piccole come prevedeva, ma per maggior sicurezza le ho osservate con una lente d'ingrandimento: le prime due o tre oscillazioni si son fatte nel senso che mostrava l'alluminio fare da zinco: poi l'ago ha cambiato senso per eguale ampiezza d'oscillazione (circa $^1/_2$ grado al più) avendosi così una deviazione stabile nel senso che le prove galvanometriche sogliono mostrare, cioè tenendo l'alluminio le veci del rame (1).

I Voltiani possono quindi ancora dire che l'alluminio puro è positivo nel contatto collo zinco e, finchè tale si mantiene, lo è pure nelle pile idroelettriche: che però uua leggerissima e quasi impercettibile ossidazione è sufficiente in brevissimo tempo a portarlo al disopra dello zinco, ed è questo fatto che ordinariamente verificasi nelle pile. Il Marianini (2) vide già bastare un lievissimo grado di ossidazione per rendere il piombo superiore allo stagno splendente, come un leggero grado di ossidazione può portare lo stagno al disopra del piombo.

Ho voluto verificare direttamente l'ossidabilità considerevole dell'alluminio, almeno nelle piastre di cui poteva disporre, indipendeutemente dalla corrente e pel semplice fatto della immersione in acqua pura od acidulata. Senza stabilire alcuna comunicazione ho tenuto per due giorni circa in un bicchiere contenente acqua ben distillata due lastre d'alluminio (Eberlein) ed in altro simile una lastra d'alluminio ed una di zinco. Ho visto che per tal modo le lastre d'alluminio si coprono, più o meno, e specialmente in corri-

---

(1) Più tardi ho ripetuto la prova con analogo risultato, ma con movimenti di maggior ampiezza impiegando un galvanometro di molta resistenza.

(2) Memorie di Fisica sperimentale di Stefano Marianini. Bologna, Tipi Zanichelli 1874, Tom. I, pag. 111. — « Saggio di esperienze elettrometriche. Art. II, Sez. V.ª ».

Digitized by Google

spondenza del livello del liquido di fiocchi come in istato gelatinoso: le lastre di zinco invece si cuoprono di croste: e questi prodotti poi adagio adagio si staccano ed intorbidano l'acqua, mentre le piastre d' alluminio si vanno coprendo di una leggerissima patina appena tendente al bruno e pochissimo aderente. Tutto ciò avviene indipendentemente dalla corrente, almeno esterna, non volendo toccare la questione delle correnti interne che si potrebbero derivare dalla impurità delle lastre. Che se queste si stabiliscono in circuito esternamente chiuso, le alterazioni delle piastre e l'intorbidamento del liquido non cangiano notevolmente: solo è sembrato talvolta aumentarsi quest' ultimo, forse per una naturale ulteriore formazione di ossido di zinco.

Il sullodato ch.mo Prof. Cuoghi, cortesemente prestatosi ad un saggio analitico qualitativo rinveniva nel deposito del liquido del primo bicchierino, evaporato a secco, *alluminio e ferro*: ed in quello del secondo *zinco* e *ferro* principalmente ed ancora tracce d'*alluminio*.

Se ripetonsi le prove suddescritte coll'acqua leggermente acidulata e senza corrente esterna, non si ottengono più i fiocchi gelatinosi, il liquido si conserva limpido, ma a poco a poco prende un sapore amarognolo, gli zinchi anneriscono alquanto e pure sull'alluminio formasi una specie di poltiglia non poco aderente. Che se invece le lastre si pongono in comunicazione e si chiude il circuito esternamente, non notasi gran differenza a giudizio de' sensi nei fenomeni suddescritti: soltanto il liquido perde più prontamente la sua acidità, come è ben naturale.

Il Prof. G. Cuoghi a mia richiesta e colla sua usata gentilezza esaminò ancora il contenuto di quest'acqua acidulata, dopo alcuni giorni di immersione delle lestre, e senza che si fosse stabilita corrente esterna. Rinvenne solfati di ferro e d' allumina, dove non s' erano immerse che lastre d' alluminio, in corrispondenza degli ossidi trovati nel deposito dell'acqua pura. Dove erano state immerse le lastre d' alluminio e di zinco, rinvenne pure analogamente, solfato di zinco in gran copia, un po' di solfato di ferro e tracce di solfato alluminico.

Digitized by Google

Quanto alla patina nerastra sullo zinco, essa al Cuoghi diede segni caratteristici della presenza del solfo, cosicchè ei la sospettò risultare di solfuro di ferro con solfuro di piombo e forse anche piombo libero. Ma quanto alla patina più bruna che formasi sull' alluminio, il Cuoghi la trovò insolubile negli acidi e nell' acqua regia e la ritiene formata essenzialmente di carbonio, solito ad inquinare l' alluminio: potrebbe anche risultare in parte di silicio?

Noto però che l'aspetto delle lastre mi fa supporre che, sebbene in grado lievissimo, tale patina sull' alluminio si formi ancora nell' acqua distillata, quando l' alluminio semplicemente è ossidato, come pure il ferro in esso contenuto.

Tutti questi prodotti chimici sono affatto indipendenti dalla corrente generale delle lastre, poichè avvengono senza essa: e possono invocarsi a giustificare nel concetto Voltiano l' alterazione in senso elettrico delle lastre metalliche pel solo fatto della immersione nei liquidi.

Fenomeni interessanti ho pure osservato immergendo nei soliti liquidi e nel medesimo bicchierino, lastre d'alluminio e lastre di rame. Nell'acqua distillata e senza corrente, l' acqua intorbidasi, i fiocchi gelatinosi si depositano sull' alluminio, il rame imbruna: se le lastre si pongono in corrente, il rame si mantien lucido (forse per l' afflusso dell' idrogeno che ne impedisce l'ossidazione), sull' alluminio vedonsi aderenti molti fiocchi gelatinosi, e l' acqua mantiensi quasi limpida.

Nell' acqua acidulata senza corrente, quella mantiensi limpida, il rame lucente, salvo chiazze nerastre quà e là sparse, e l' alluminio copresi d' un velo di rame, che egli avrà quindi sostituito nel solfato di rame. Ma se avvi corrente, le chiazze nerastre sul rame ed il deposito di rame sull' alluminio mancano affatto.

Resta quindi direttamente confermata, sebbene in un grado minore che per lo zinco, l' ossidabilità dell' alluminio (almeno quale è in commercio) a contatto ancora dell' acqua ben distillata.

Digitized by Google

Seguendo il metodo indicato dal Prof. Stefano Marianini (1), usando acqua ben distillata e dopo essermi assicurato che gli elettrodi soli non davano alcuna corrente, ho più volte osservato con una bussola dei seni che tre coppie *Zn. Cu.* sono perfettamente elise da cinque coppie *Zn. Al.* poste in senso contrario. Secondo il Marianini (2), la tensione della coppia *Zn. Al.* sarebbe allora 5, 94 volte la tensione della coppia platino ed oro e quindi uguale a 0,00898 in gradi dell' elettrometro a paglie sottili del Volta: sicchè ammessa la tensione *Zn. Cu.* quale è data dal Marianini (3), quella *Al. Cu*, dovrebbe essere 0, 00616 in gradi c. s., cosicchè due coppie *Zn. Cu.*, dovrebbero venire elise da 5 coppie *Al. Cu.*, come ho più volte verificato. Onde nella scala degli elettromotori Voltaici, l' alluminio (potrebbe dirsi, bagnato, o quale solo può riscontrarsi in pila) verebbe tosto dopo il piombo, cui sarebbe appena superiore, calcolandosi dal Marianini la tensione *Zn. Pb.* 0, 00841. Troverebbesi fra lo stagno ed il piombo, ma vicinissimo a quest' ultimo (4).

Sebbene sprovvisto di mezzi necessarj per fare prove conformi allo stato attuale della scienza, ho studiato, in via di prima approssimazione, la facoltà termo-elettrica dell' alluminio. Ho creduto di constatare che nella giuntura scaldata la corrente si dirige dall' alluminio allo stagno, al rame, allo zinco, all' antimonio: presto però l' aumento di temperatura inverte la corrente alluminio-stagno. La corrente invece si dirige sull' alluminio dal bismuto e dal platino. L' alluminio occuperebbe al-

---

(1) Memorie succitate. Vol. I, pag. 253 e seg. « Delle facoltà elettromotrice « de' metalli che più di frequenti si adoperano nello studio degli elettromotori. »

(2) Loco cit.

(3) Loco cit.

(4) Jamin nel suo Cours de Physique ecc. Tome troisieme pag. 27. Paris. Mallet Bachelier 1861: citando Edm. Becquerel pone l' alluminio vicino per verità al piombo ed allo stagno, i quali per lui sono eguali, ma superiore, oltre a questi, anche al ferro.

Digitized by Google

l' incirca il posto del piombo nella scala termo-elettrica del Becquerel.

Come elemento della pila, l' alluminio è dotato d' una importante proprietà, cioè di non polarizzarsi sensibilmente sotto il passaggio della corrente elettrica, il che potrebbesi spiegare mediante un difetto di adesione al gas idrogeno.

Dapprima ho fatto passare per tre coppie inattive d' alluminio, la corrente di una pila ordinaria rame e zinco, di cinque o sei coppie con acqua acidulata. Dopo 5' almeno di corrente, ed in cinque prove fatte, la corrente mostrata dalle sole lastre d' alluminio fu debolissima nel senso della corrente polarizzante, e cambiava senso col cambiare l' ordine degli elementi nelle coppie; onde non potevasi attribuire che alle molteplici alterazioni dovute alle ineguali ossidazioni, e non a deposito di idrogeno.

In uno sperimento, laddove la corrente inversa o secondaria di tre coppie inattive di rame diede un arco impulsivo uguale alla differenza fra 62° e 13° ad una bussola dei seni, la corrente diretta delle tre coppie d' alluminio, dopo un tempo uguale, fu in arco impulsivo di soli 7° (1).

---

(1) Io ho veduto più volte che l'alluminio il quale in una pila rame e zinco facea da elettrodo negativo, e pescava nello stesso bicchiere coll' ultimo rame, era *inferiore* se veniva in seguito accoppiato coll' alluminio che nella stessa pila faceva da elettrodo o polo positivo. Questo fatto è contrario da una parte alla polarizzazione dell' alluminio, e può spiegarsi dall' altra, come dirò più avanti, considerando che la lastra d' alluminio, su cui in virtù della direzione della corrente, si portano in maggior copia gli elementi metalloidei, può venir riguardata, di fronte all' altra, come lastra bagnata di fronte all' asciutta. Questa almeno, come si vedrà, è la spiegazione che più naturale si presenta della corrente diretta ottenuta colle pile secondarie d' alluminio.

Altra volta la corrente di 5 coppie *Zn. Al.* fu fatta attraversare tre coppie d' Alluminio, e si usarono pure per elettrodi lastre d' alluminio. Queste tre coppie cogli elettrodi in acqua acidulata non davano alcuna corrente. Dopo 7' di passaggio della corrente, la quale frattanto avea variato da 47° a 33°, le coppie omogenee offrirono una lievissima corrente di polarizzazione misurata da un arco

Digitized by Google

Ho ancora costruito un voltametro a lastrette od elettrodi d'alluminio. Dalle lastrette di platino d'un voltametro comune, dopo prolungato la decomposizione dell'acqua per 5', si è avuta una corrente inversa di polarizzazione con arco impulsivo di 25° alla solita bussola. Da quelle del voltametro ad alluminio, dopo 10' di lavoro chimico, mentre l'alluminio positivo erasi sensibilmente disciolto, non ottenni indizio alcuno di corrente: e neppure dopo 6', servendomi di due coppie Bunsen per corrente scomponitrice.

In un altro esperimento le due lastrette del Voltametro ad alluminio erano già eterogenee sì da dare una corrente di 2° alla solita bussola. Feci attraversare le lastrette dalla corrente di due grandi coppie Bunsen, dirigendo l'idrogeno sulla lastretta che faceva da rame. Dopo 6' di corrente, e dopo raccolto 1 *c. c.* di idrogeno nella campanella, la corrente delle lastrette fu ancora nel senso di prima e colla stessa intensità.

Io conchiusi quindi potersi ritenere l'alluminio inalterabile, o quasi, per effetto della corrente, ossia adoperato siccome l'elemento negativo della coppia Voltaica. Esso quindi mostrerebbe sotto questo aspetto una qualche analogia collo zinco (1). Ritenendo perciò che la pila *Zn. Al.* fosse nella sua intensità assai meno variabile della pila *Zn. Cu.* ho fatto numerose prove comparative sul variare della corrente nelle pile *Zn. Cu*, *Zn. Al*, *Al. Cu.* coll'acqua distillata sia pura sia acidulata, sia con poche sia con molte coppie, e variando ancora l'intensità della corrente. La pila *Zn. Al.* offre il fatto abbastanza rimarchevole che, gene-

---

impulsivo di soli 3°. Messe in loro vece tre coppie di solo rame, le quali per se davano una corrente di 20° imp. contraria alla corrente polarizzante, dopo che questa si lasciò passare per 7' cominciando da $> 90°$ e fermandosi a 25°, la corrente secondaria delle lastre di rame diede un arco impulsivo di ben 45°.

(1) Marianini. Memorie succitate. Tom. I, pag. 290. — Sulle alterazioni prodotte dalle correnti Voltaiche nell'elettrotismo de' principali metalli. Parte II, Art. III.

Digitized by Google

ralmente dopo poche ore, la corrente in essa aumenta d'intensità sino a farsi talvolta ben piucchè doppia: indebolendosi poi col prevalere di tutte le cause solite a scemare la corrente delle pile.

Giova che gli elettrodi sieno d'alluminio: il periodo d'aumento mi si presentò assai variabile, talvolta di 22 ore, talvolta di 1 appena: l'aumento è rilevante, poichè ad un galvanometro di poca resistenza la corrente è salita in una prova da 44° a 65° ed in altra da 55° a 76°; ad una bussola di seni una volta si portò da 28° a 42°: rilevasi in fino tanto con acqua acidulata, quanto coll'acqua ben distillata. In una serie di 24 osservazioni, due volte sole trovo notato come continuamente decrescente la corrente *Zn. Al.*, senza però poter conchiudere che sulle prime non si verificasse l'aumento: perchè furono osservazioni fatte ad intervalli di tempo piuttosto lunghi, sicchè non furono segnate che alcune ordinate fra loro lontane dalla curva della corrente.

Io attribuisco questo fatto alla crescente adesione del liquido (acqua pura od acidulata) coi metalli e particolarmente dell'alluminio, la quale equivale ad una diminuzione di resistenza, nè è contrariata ne' suoi effetti dalla pronta polarizzazione dell'elemento negativo della coppia Voltiana (alluminio), siccome avviene col rame. Già notò il Belli (1) che coi metalli *tersi* l'acqua spiega una adesione minore della coesione con se stessa: immergendo lastre parallele e vicinissime di rame, zinco, zinco amalgamato ed alluminio in acqua acidula, dopo mezz'ora d'immersione prolungata, ho veduto esaltati i fenomeni di capillarità: e forse anche le azioni chimiche alla superficie delle lastre possono favorire l'adesione del liquido. Il fenomeno quindi si legherebbe a proprietà generali dei metalli: salvochè, trattandosi d'alluminio, interverrebbe a modificarli la pochissima o nessuna adesione all'idrogeno per parte di questo metallo.

---

(1) Corso elem. di Fisica. Milano. Vol. I. Sez. II, Cap. X, pag. 156.

Digitized by Google

In questa spiegazione io fui avvalorato dalle seguenti osservazioni tendenti ad eliminare la possibilità di altre cause.

Con un galvanometro di molta resistenza, e due lastre, una di rame e l'altra di zinco, che per la debole corrente e pel brevissimo tempo d'un arco impulsivo potevansi ritenere inalterabili, esplorai dapprima la conduttività dell' acqua distillata pura e di quella resa torbida dal lungo passaggio della corrente e dalla prolungata immersione delle lastre zinco ed alluminio. L'arco impulsivo col primo dei due liquidi fu di 91° a 92°: poi col secondo di soli 80°, e ripetendo ancora l' esperimento coll'acqua pura, risalì a 90°. Ne seguiva quindi, come potevasi prevedere, che nell' acqua distillata la conduttività và scemando coll' intorbidamento.

Prove analoghe ho fatto per l'acqua acidula, con un galvonometro di poca resistenza, paragonando la conduttività dell'acqua acidulata di fresco, coll'acqua già fattasi amarognola che avea servito ad una coppia *Zn. Al.*. la quale avea presentato il solito aumento. Due lastrine nuove *Zn. Al.* mi diedero in questo secondo liquido, con arco impulsivo di 65° uno definitivo di 5° a 6°, mentre nel primo esso fu $>$ 90°. Tali risultati mi si sono ripetuti più volte, provando lo scemare progressivo di conduttività del liquido della coppia. Restava così direttamente esclusa l' ipotesi, per vero dire ben poco probabile, che l'aumento nella corrente dipendesse da un aumento di conduttività del liquido.

Ho cercato allora d' indagare l' elettrotismo delle lastre e dopo il calo della corrente e nel momento della sua massima intensità. Ho fatto reiterate prove, notando lo sbilancio degli zinchi e degli alluminii adoperati nelle pile, prima e dopo la corrente, rispetto ad un dato zinco e ad un dato alluminio che tenevo come campioni. Per determinare questi sbilanci immergevo le lastre pel brevissimo tempo dell'arco impulsivo in un liquido costante (acqua acidula) posto sempre nello stesso bicchiere, onde tutte le condizioni, all' infuori dell' elettrotismo delle lastre, fossero sempre le stesse. In fine ho ancora indagato le

Digitized by Google

variazioni d'elettrotismo nelle lastre non riunite in pila e quindi attribuibili al semplice fatto della immersione: previo sempre l'asciugamento delle lastre prima di esplorarle.

Dopo due giorni di corrente in acqua pura d'una pila formata di una coppia *Zn. Al.* e due elettrodi d'alluminio, ho trovato lievemente alzato o fattosi più negativo un alluminio e molto più abbassati gli altri due: lo zinco appena offrì un piccolissimo aumento di elettrotismo. In acqua acidula due allumini s'abbassarono, fra i quali uno sul quale non dirigevasi l'idrogeno, e lo zinco s'alzò. E dopo due giorni di semplice immersione in acqua acidula, senza corrente, gli alluminj mostrarono un piccolo alzamento e lo zinco pure.

In altre prove con una sola coppia *Zn. Al.*, passato il massimo della corrente, dopo 1 o 2 giorni, l'alluminio mi si è sempre abbassato in elettrotismo e lo zinco un po' alzato. E nel momento del massimo di corrente l'alluminio talora mi si è mostrato alzato, talora abbassato.

Provate finalmente le alternative d'immersione di due lastre d'alluminio, legate al filo galvanometrico, in acqua distillata sì pura che acidulata, nella prima ho veduto tre volte consecutive la lastra bagnata alzarsi di fronte a quella che era stata levata dal liquido ed asciugata, ma con aumenti decrescenti: nella seconda ho visto la prima volta alzarsi la lastra bagnata di fronte all'asciutta, indi abbassarsi costantemente.

Molte volte ho ripetuto queste alternative d'immersione ed emersione in acqua acidula e per lo più, con grande preponderanza numerica di casi, la lastra bagnata riuscì positiva rispetto all'asciutta, anche con un solo minuto primo d'immersione. Una volta, in otto immersioni consecutive ed alternate per le due lastre, ciascuna durando il tempo necessario perchè si fermasse l'ago, ebbi sette volte abbassamento nella lastra bagnata ed alzamento una volta sola. In acqua distillata, col galvanometro di molta resistenza, dopo una immersione per 3′, si hanno chiari indizi dell'alterato elettrotismo.

Digitized by Google

Può dirsi che l'alluminio presenta in ciò un' altra analogia collo zinco, il quale, come pure il piombo, fu notato dal Marianini (1) abbassarsi in facoltà elettromotrice collo star immerso nell'acqua di mare.

Non è a tacere che tali osservazioni sono per sè difficili, dovendosi studiare le alterazioni subite mercè il solo arco impulsivo, il quale poi, per le resistenze dell'ago, per la possibile eterogeneità del liquido in senso verticale, per la obliquità del filo galvanometrico coll'ago, quando questo è un po' deviato, viene ad essere influenzato dalla velocità d'immersione delle lastre, che non può, nelle singole esperienze, mantenersi costantemente la stessa.

Parvemi però, pel complesso dei risultati, di potere escludere dal novero delle cause possibili dell' aumento della corrente *Zn. Al.*, le alterazioni in virtù elettromotrice delle lastre a contatto dei liquidi.

Mi restava di confermare con altri fatti la probabilità che il fenomeno dipendesse dall'aumento di adesione non contrariato ne' suoi effetti dalla polarizzazione dell' alluminio, che abbiamo veduto essere trascurabile.

Già m' accorsi che ripulendo bene le lastre d'alluminio con pomice ed acqua, l' aumento della corrente avveniva più rapidamente, sicchè una volta si giunse al massimo (da 64° e 77°) in meno di un' ora e quasi 11° d'aumento si ebbero nei primi 7'. Si può ancora stabilire che nell'acqua acidulata l' aumento è più pronto che nella distillata: e che il fenomeno è modificabile da azioni talora antagonistiche, giacchè l'aumento di adesione puo favorire l'abbassamento in elettrotismo dell'allumimio. Così, una sola volta però, ho veduto la corrente *Zn. Al.* diminuire sulle prime, indi aumentarsi. E malgrado la prontissima pola-

---

(1) Memorie del Prof. Stefano Marianini. Bologna. Tipi Zanichelli 1874, pag. 85. — Saggio di sperienze elettrometriche. Art. II, Sez. III.

Digitized by Google

rizzazione del rame, però una sola volta su venti e più prove, ho veduto aumentare la corrente *Zn. Cu.*, fatto che a mio avviso riesce a conferma delle spiegazioni e considerazioni fatte intorno al fenomeno, che l'alluminio, quasi impolarizzabile, mi ha costantemente offerto. E seguendo per molto tempo l'andamento d'una pila *Zn. Cu.* trovasi ordinariamente un periodo di decremento, indi un periodo quasi stazionario, cui succede un rapido e vistoso decremento. Il periodo stazionario potrebbe corrispondere ad una specie di equilibrio fra l'adesione del liquido coi metalli vicino a raggiungere il massimo suo valore, e la contraria influenza della polarizzazione del rame. Già s'intende che in tutte queste prove il circolo deve mantenersi sempre chiuso.

A questo punto sorgeva naturalmente la dimanda se mai l'idrogeno non aderisse all'alluminio sulle prime per difetto di adesione, ma vi aderisse in seguito coll'aumentare di questa, e lo potesse sensibilmente polarizzare.

Ho tornato a far passare per tre coppie inattive d'alluminio la corrente di cinque coppie *Zn. Cu.* per 7'. Essa fu nel suo principio di 47° ad una bussola di seni ed alla fine di 33°. Gli alluminj erano stati ben puliti con acqua e pomice, e ne ottenni una piccolissima corrente secondaria d'arco impulsivo di soli 3°. Per avere un termine di confronto, noterò che, sostituite lastre di rame agli alluminj, sebbene nei 7' la corrente polarizzante si mantenesse soltanto fra 25° e 20°, pure la corrente secondaria corrispose ad un arco impulsivo uguale alla differenza 45° – 20°.

Lasciate però le suddette lastre d'alluminio semplicemente immerse per due ore nell'acqua acidula, ed attraversate per 7' dalla corrente della solita pila, variante da 45° a 38° ¾. la corrente secondaria delle lastre d'alluminio fu segnata dall'arco impulsivo di 6°.

E rifacendo l'esperienza del voltametro a lastrine d'alluminio, ben pulite con pomice ed acqua, dopo 7' di corrente d'una coppia Bunsen, la quale mi diede 1 *c.° c.°* d'idrogeno, non ebbi

Digitized by Google

alcun indizio di corrente secondaria dalle medesime. Ma lasciatele immerse nel liquido, e dopo due ore rifatta l'esperienza in egual modo, mi si manifestò una piccola corrente di polarizzazione con arco impulsivo di 3° ½ alla solita bussola e definitivo di 1° ½.

Adunque l'aumentata adesione pare che faciliti infatti la polarizzazione dell'alluminio e questa circostanza può ammettersi che concorra colle altre alla degradazione finale della corrente *Zn. Al.* Ma bisogna pure ravvisare nell'alluminio, come una sua qualità speciale, una debolissima facoltà d'essere polarizzato, e trascurabile di fronte al rame, o al carbone, soliti elementi negativi delle coppie Voltaiche.

Nell'esperimento ultimo descritto, la seconda volta, nel Voltametro ottenni d'idrogeno *c. c.* 1 ½ anzichè 1 solo, sebbene il tempo fosse stato il medesimo, e la stessa la coppia Bunsen ed eguali tutte le altre circostanze. Pensai quindi che quella corrente Bunsen erasi rinvigorita la seconda volta, perchè l'adesione cresciuta del liquido agli elettrodi avea reso l'arco esterno più conduttore. Presi allora due coppie Bunsen e le caricai ciascuna cogli stessi liquidi. La corrente d'una di esse passava per un galvanometro semplice, e vi segnò costantemente la deviazione di 77°. La corrente dell'altra, prima di passare per la bussola dei seni, attraversava, mediante elettrodi d'alluminio sette coppie inattive d'alluminio immerse in acqua acidula. Questa corrente cominciò con arco definitivo di 32°, il quale andò crescendo e giunse al massimo di 40° crescenti in tre ore: nelle due prime ore li toccò quasi e nella prima ora raggiunse i 37°. Questi alluminj erano stati puliti con pomice ed acqua.

Già il Marianini (1) aveva notato una particolare resistenza

---

(1) Memorie di Stefano Marianini. Bologna. Tipi Zanichelli 1874. Tom. I. — « Saggio di esperienze elettrometriche. » Art. I, Sez. II, pag. 50 e « Sulle pile secondarie del Ritter » pag. 164.

Digitized by Google

alla corrente, nel passaggio da liquidi a solidi e viceversa, la quale ha origine, a mio avviso, appunto dalla polarizzazione delle lastre principalmente ed ancora dal variare dell'adesione nelle varie sezioni del circuito. La pochissima polarizzazione dell'alluminio, e la crescente adesione fra esso ed il liquido renderebbero sempre meno resistente, fino ad un dato limite, le alternative d'alluminio e liquido.

Segue da tutto l'anzidetto che l'alluminio potrebbe valere come a compensatore del pronto e vistoso degradamento del rame nelle pile ad un sol liquido. Se non chè sarebbe assai difficile ottenere la compensazione perfetta, almeno sul principio; pronta, come è a tutti noto, si fa la degradazione del rame, lento l'aumento di conduttività pel fatto dell'alluminio. Forse potrebbe rallentarsi la prima influenza coll'aumentare la superficie delle lastre di rame.

In via di fatto, io avea già notato che le pile *Al. Cu.* offrivano nelle prime due o tre ore un calo sensibile, poi duravano per giorni ancora, quasi colla stessa corrente, variante p. es. fra 10° e 9° ½, fra 1°, 5 ed 1°, fra 9° e 9° ¾ d'un dato galvanometro. Volli però fare ancora a tale scopo uno sperimento. Disposi con acqua acidula ed elettrodi di rame tre coppie *Zn. Cu.*, le quali ad un galvanometro semplice diedero dapprima una corrente di 36°.

Essa in ¾ d'ora si ridusse	a	26° 5
Dopo 1 ora e ½	»	24°
Dopo mezz'ora	»	21° 5
Dopo 2 ore e ¾	»	21° 25

Posi poi in corrente con egual liquido altre tre coppie *Zn. Cu.*, ma con elettrodi d'alluminio e facendo che la corrente attraversasse 5 coppie inattive d'alluminio lavate a pomice ed acqua,

Digitized by Google

prima di recarsi ad una bussola di seni. La corrente fu dapprima di 36°.

Dopo $^3/_4$ d' ora	27°
Dopo $^1/_2$ ora	30° $^3/_4$
Dopo 4 ore ed $^1/_4$	30°

Onde in questa ultima disposizione dopo solo 1 ora si ebbe una corrente sensibilmente costante per molto tempo sebbene di intensità minore della iniziale.

Per ultimo ho ripetuto l'esperimento descritto a pag. 10 onde determinare lo sbilancio elettrico *Zn. Al.*, adoperando lastre d' alluminio già immerse da due ore nell' acqua distillata, e precedentemente lavate a pomice ed acqua. Il risultato alla solita bussola dei seni fu il medesimo, e potevasi prevederlo. Con elettrodi perfettamente uguali, le tre coppie *Zn.* amalgamato e rame ben pulito equilibrarono perfettamente le cinque coppie zinco ed alluminio.

Riassumendo quindi, parmi si possa conchiudere:

I. L' alluminio ben pulito alla sua superficie è positivo nel contatto rispetto allo zinco, come ebbe già a trovarlo il Righi; e tale apparisce anche in pila, finchè azioni chimiche non lo alterano superficialmente.

II. L' alluminio ossidato superficialmente o comunque alterato da metalloidi (1) è tosto negativo nel contatto rispetto allo

---

(1) Usando per breve tempo il *bromo* come liquido della pila, ho visto l'alluminio pulito a pomice ed olio apparire negativo in faccia allo zinco. Ma vidi pure che tenute semplicemente immerse nel bromo per pochi secondi una lastra di alluminio pulita c. s. ed una di zinco: indi, bene asciugate con carta, e poste in acqua distillata, e congiunte mediante il filo galvanometro, l'alluminio fu negativo, e l'arco d'impulsione superò i 90°.

Digitized by Google

zinco e trovasi nella scala degli elettromotori di 1.ª classe, superiore al piombo ma ad esso vicinissimo.

III. Tale cangiamento nella facoltà elettromotrice dell'alluminio operasi con somma prontezza: però a contatto dell'acqua acidula più presto che a contatto dell' acqua pura.

IV. L'alluminio nella scala termo-elettrica del Becquerel occupa all'incirca il posto del piombo.

V. La polarizzazione dell' alluminio non è sensibile sul principio della corrente ed in seguito è assai inferiore a quella del rame.

VI. L' alterazione d' elettrotismo dell'alluminio per la semplice immersione prolungata è maggiore in acqua acidulata, che in acqua pura; ed è per lo più nel senso che la lastra bagnata è inferiore all' asciutta.

VII. L' arco formato di lastre d' alluminio alternate a strati di liquido (acqua pura od acidulata) va facendosi ordinariamente più conduttore sino ad un dato limite; e ciò ritiensi per adesione crescente del liquido al metallo non contrariata ne' suoi effetti da sensibile polarizzazione dell'alluminio.

Dagli studi del Marianini risulterebbe:

1. Che la deposizione di uno strato di idrogeno abbassa l' elettrotismo d' una piastrina.

2. Che l' ossidazione della medesima lo innalza fino a che si tratta di strato d' ossidazione aderente e conduttore.

3. Che ove l' ossido sia tale da sciogliersi o stemprarsi facilmente nel liquido e inzupparsi del medesimo e non aderire alla lastra, esso allora non ne alza l' elettrotismo; anzi una lastra così ossidata, pel solo fatto dell'immersione, venendo a perdere nei suoi punti dell' ossido stesso, può calare nell' elettrotismo.

4. Che perciò il tempo diverso d' immersione, le alternative d' immersione e d' emersione, lo stato d' ossidazione precedente, quello prodotto sopra una delle lastre dalla corrente stessa, infine la deposizione dell' idrogeno, e quindi cause sì dipendenti dalla corrente che indipendenti contribuiscono in generale a modifi-

Digitized by Google

care l'intensità delle correnti nelle pile. Ammesse queste leggi ed insieme la variabile e crescente adesione fra le piastrine metalliche ed il liquido della pila, sono interpretabili i fenomeni presentati dall' alluminio come elettromotore; il quale, comportandosi come lo zinco, può aggrupparsi elettricamente allo zinco, ferro, stagno, piombo, metalli che il Marianini trovò pure poco alterabili sotto la corrente e facilmente alterabili per la semplice immersione.

L. MALAVASI.

Digitized by Google

ANDAMENTO DIURNO E ANNUALE

DELLA

VELOCITÀ DEL VENTO

In varî tempi ho pubblicato, prima la descrizione dell'anemometrografo elettrico del R. Osservatorio di Modena, costruito in Parigi dal Salleron (1), poi la discussione di un biennio di osservazioni eseguite con questo pregevole apparecchio (2), posteriormente l' esposizione di un quinquennio di risultati (3). Questi antecedenti lavori, ai quali rimando il lettore, mi dispensano di entrare in minute particolarità relativamente all' apparecchio in discorso, ora che qui riunisco i risultati di un' undicennio di osservazioni da Dicembre 1866 a Novembre 1877.

I giorni sono contati astronomicamente, da 0 a 23, da un mezzodì all' altro. Per valutare con maggiore esattezza il periodo diurno, ho con massima scrupolosità eliminato tutti quei giorni

---

(1) V. Zeitschrift der oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie, V. Band. N. 4.

(2) V. Supplimenti alla Meteorologia Italiana anno 1870.

(1) V. *La velocità del vento* Milano Treves 1872. *I venti impetuosi* Milano Treves 1874. *Le variazioni del vento* Milano Treves 1874.

Digitized by Google

in cui vi è qualche lacuna, per una causa qualunque, nelle carte litografate dell' apparecchio. È perciò che talune decadi risultano di un numero di giorni inferiore a 10.

La disposizione delle 36 tavole seguenti, che contengono i risultati genuini dell' apparecchio, è molto semplice. In esse ritrovasi per ogni decade, o più esattamente pel numero dei giorni *completi* di ogni decade, la somma totale dei kilometri percorsi dal vento.

Ho scelto il sistema decadico anzichè il pentadico, giacchè in un elemento di estrema variabilità, quale è la velocità del vento, i medî pentadici avrebbero offerto salti e difformità molto sensibili.

Il medio generale della decade, cioè la media velocità kilometrica oraria corrispondente alla medesima, non è il medio aritmetico delle undici velocità kilometriche orarie decadiche, ma risulta dalla somma totale dei kilometri, divisa per la somma totale del numero dei giorni di osservazione, e riferita all' unità di tempo, cioè all' ora.

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 1.ª (1-10 Gennajo)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.e n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	96	104	85	69	65	55	62	65	56	62	57	47	47	48	59	56	55	51	57	70	70	69	74	77	1556	10	6.483
1868	81	85	77	74	68	85	80	72	75	73	87	96	110	96	95	92	94	99	96	94	103	104	103	94	2133	10	8.887
1869	73	68	55	50	55	52	48	63	66	67	59	64	75	85	89	84	101	93	79	78	82	65	63	65	1679	10	6.996
1870	46	34	33	36	34	36	36	42	49	44	39	51	63	53	49	54	62	62	64	68	56	39	42	44	1136	6	7.889
1871	73	64	70	72	85	82	102	111	103	97	98	95	117	96	87	81	70	75	73	76	77	72	65	66	2007	10	8.362
1872	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1873	58	55	50	53	44	48	49	49	64	82	85	78	96	79	68	71	83	78	81	77	71	57	61	58	1595	10	6.646
1874	75	69	59	39	44	40	58	66	67	68	70	67	71	64	54	62	77	78	75	80	63	67	54	62	1529	8	7.964
1875	66	70	68	65	58	54	66	72	68	71	84	82	60	66	73	65	57	56	63	69	62	73	68	61	1597	10	6.654
1876	48	45	59	59	50	62	82	70	82	73	58	63	59	61	84	79	76	73	65	47	36	34	40	51	1456	10	6.067
1877	86	69	67	57	52	46	50	50	47	56	65	72	64	66	63	70	64	57	48	59	44	54	65	79	1450	10	6.042
Somma	702	663	623	574	555	560	633	660	677	693	702	715	762	714	721	714	739	722	701	718	664	634	635	657	16138	94	7.153

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 2.ª (11-20 Gennajo)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5 6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23 0			
1867	120	101	123	126	119	117	106	101	98	106	99	101	107	112	94	87	77	83	85	79	82	87	126	130	2466	10	10.275
1868	76	71	69	61	53	44	63	83	84	97	97	81	84	62	55	62	67	70	65	84	73	83	73	81	1738	10	7.242
1869	85	79	74	70	55	64	53	53	62	72	78	72	85	80	79	83	79	76	69	66	74	66	71	62	1707	8	8.891
1870	40	48	43	40	42	47	41	50	55	46	37	36	51	50	39	37	45	38	41	32	33	34	42	39	1006	5	8.383
1871	68	63	75	77	74	90	87	63	74	79	62	74	81	76	77	101	80	86	72	75	74	75	93	88	1864	10	7.767
1872	37	43	37	34	35	35	42	42	45	45	41	38	39	50	65	53	52	57	51	36	36	47	37	32	1029	8	5.359
1873	50	42	41	30	38	52	46	52	42	45	40	34	40	42	39	42	42	47	46	37	39	39	36	41	1002	10	4.175
1874	41	46	45	47	47	51	48	47	44	53	48	56	44	47	45	50	54	49	46	52	48	50	35	29	1122	10	4.675
1875	47	51	51	42	45	42	42	45	37	41	46	63	60	50	54	52	53	55	58	56	55	55	59	64	1223	10	5.096
1876	59	63	71	63	57	71	66	82	77	90	93	97	88	76	76	81	85	81	77	61	66	62	53	51	1746	10	7.275
1877	67	57	57	56	56	54	51	63	85	66	73	87	96	105	104	89	76	87	75	81	87	76	73	89	1810	10	7.542
Somma	690	664	686	646	621	667	645	681	703	740	714	739	775	750	727	737	710	729	685	659	667	674	698	706	16713	101	6.895

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 3.ª (21-31 Gennajo)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵉ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	83	80	77	77	91	72	84	103	127	105	102	100	120	116	122	110	112	107	104	103	106	93	88	89	2371	11	8.981
1868	99	104	100	101	81	90	103	117	117	121	104	95	100	100	101	112	122	125	108	100	108	92	77	81	2458	10	10.241
1869	97	94	96	108	100	94	108	104	116	121	99	109	113	99	84	77	77	80	67	62	58	60	61	71	2155	11	8.163
1870	75	78	66	69	74	80	87	99	93	84	75	67	88	90	85	80	96	81	73	68	63	76	68	65	1880	11	7.121
1871	86	82	86	82	92	85	92	97	88	109	107	91	102	81	76	69	60	54	62	60	74	69	75	71	1950	11	7.386
1872	72	63	65	59	47	50	63	70	71	80	57	76	66	108	89	79	98	88	74	69	79	73	74	58	1728	11	6.546
1873	85	94	86	84	93	104	97	104	102	91	133	130	131	152	157	142	125	109	109	81	75	87	93	96	2560	11	9.697
1874	61	90	93	78	70	81	82	92	89	94	86	95	88	89	80	86	92	85	95	98	108	96	69	94	2091	11	7.920
1875	130	134	145	141	126	137	157	147	126	117	106	114	120	113	97	101	115	109	88	83	86	71	83	107	2753	11	10.428
1876	72	78	65	50	40	57	69	76	86	92	95	110	112	104	105	99	81	88	84	84	89	83	73	73	1965	11	7.443
1877	71	72	76	74	59	73	70	69	102	94	113	117	132	118	134	133	146	128	131	104	107	88	79	62	2352	11	8.909
Somma	931	969	955	923	873	923	1012	1078	1117	1108	1077	1104	1172	1170	1130	1088	1124	1054	995	912	953	888	840	867	24263	120	8.425

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 4.ª (1-10 Febbrajo)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	78	98	82	78	97	107	112	118	118	114	122	103	137	140	126	108	98	93	91	103	97	82	75	64	2441	10	10.171
1868	43	38	35	36	33	38	40	44	48	68	58	53	45	45	49	42	59	59	50	47	34	40	36	37	1077	7	6.411
1869	43	44	34	24	33	44	51	55	52	39	60	54	65	65	54	52	71	59	57	56	50	51	44	44	1201	8	6.255
1870	66	68	65	63	67	72	81	88	94	84	90	84	84	75	74	83	83	76	79	70	65	64	61	63	1799	10	7.496
1871	42	35	37	37	34	31	44	53	51	53	87	60	69	65	57	61	64	71	61	46	62	46	47	43	1256	10	5.232
1872	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1873	83	92	86	91	78	67	68	76	71	78	82	75	103	95	97	105	118	107	106	75	73	65	81	82	2054	8	10.698
1874	99	122	123	116	117	167	171	159	140	101	93	89	128	120	123	116	94	85	81	97	73	69	81	99	2663	10	11.096
1875	79	96	99	83	69	88	93	119	105	87	86	80	74	73	66	76	80	83	96	90	81	70	79	68	2020	10	8.417
1876	57	70	64	64	62	82	94	88	97	104	101	98	93	105	99	101	78	82	82	67	70	66	78	63	1965	10	8.187
1877	47	46	41	47	54	64	53	75	90	91	86	91	88	93	100	101	97	75	84	71	49	40	38	55	1676	10	6.983
SOMMA	637	709	666	639	644	760	807	875	866	819	865	787	886	876	845	845	842	790	787	722	654	593	620	618	18152	93	8.133

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 5.ª (11-20 Febbrajo)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵒ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	60	64	73	84	94	82	89	87	74	75	73	77	64	59	60	52	52	62	61	65	62	57	68	58	1652	10	6.883
1868	48	44	46	43	27	42	53	62	77	90	105	79	82	85	87	65	81	73	82	66	51	49	59	53	1549	10	6.454
1869	42	46	50	41	41	43	54	59	75	74	81	74	85	75	75	73	71	74	63	74	61	36	39	48	1454	10	6.058
1870	41	43	49	33	27	24	28	32	34	47	51	50	57	63	57	44	49	48	46	42	38	32	28	43	1006	7	5.988
1871	55	65	53	46	43	39	49	58	65	69	68	61	70	59	61	71	87	82	87	77	55	42	48	48	1458	9	6.750
1872	65	54	63	64	48	44	46	67	74	73	66	72	77	81	89	92	74	60	57	75	64	71	87	75	1638	10	6.825
1873	71	46	50	39	42	29	46	60	80	95	83	84	86	86	94	91	90	77	74	90	87	67	78	84	1729	9	8.005
1874	57	66	70	74	82	89	103	99	74	64	81	83	80	82	84	92	88	86	80	90	80	85	75	73	1937	9	8.968
1875	113	123	127	120	110	108	119	121	101	80	79	94	91	84	79	75	82	78	88	76	77	71	80	71	2247	10	9.362
1876	46	50	54	63	69	66	71	74	82	72	73	78	90	88	72	86	73	61	75	67	64	50	42	45	1611	10	6.712
1877	58	71	88	98	97	84	104	118	100	83	73	68	67	78	61	82	70	70	59	87	76	53	62	93	1900	10	7.917
SOMMA	656	672	723	705	680	650	762	837	836	822	833	820	849	840	819	823	817	771	772	809	715	613	666	691	18181	104	7.284

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 6.ª (21-28 Febbrajo)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵒ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	68	70	69	70	56	54	76	65	68	60	62	55	81	84	72	63	59	67	75	64	69	56	56	68	1587	8	8.266
1868	53	50	54	64	51	38	53	69	80	73	78	81	82	86	88	93	104	98	93	92	65	46	45	52	1688	9	7.815
1869	51	54	65	69	75	62	42	57	49	53	69	70	86	71	64	69	81	84	75	58	51	44	39	44	1482	8	7.719
1870	64	68	85	84	50	65	50	48	45	54	52	44	53	65	74	79	84	90	84	77	84	78	67	61	1605	7	9.554
1871	32	33	33	39	36	37	38	53	62	66	60	65	76	57	66	65	57	63	60	56	41	36	31	33	1195	7	7.113
1872	59	71	72	58	51	51	51	51	40	43	31	49	66	48	57	46	42	39	31	36	39	43	48	41	1163	9	5.384
1873	48	55	44	57	60	51	74	77	66	72	65	65	75	62	59	68	75	73	62	71	68	49	47	47	1490	8	7.760
1874	41	47	48	66	64	74	65	58	61	56	59	55	61	46	59	57	44	42	37	38	33	32	30	31	1204	8	6.271
1875	49	46	56	68	60	60	65	69	78	77	77	86	84	84	76	60	62	51	61	58	56	50	55	46	1534	8	7.990
1876	80	92	85	90	80	78	81	93	79	73	56	72	81	83	77	60	54	52	58	59	49	56	84	81	1753	8	9.130
1877	74	67	61	81	86	65	78	67	82	90	83	80	97	99	86	75	66	74	98	92	80	57	59	66	1863	8	9.703
Somma	619	653	672	746	669	635	673	707	710	717	692	722	842	785	778	735	728	733	734	701	635	547	561	570	16564	88	7.843

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 7.ª (1-10 Marzo)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵉ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	133	113	129	144	129	116	107	111	116	123	141	141	141	130	120	110	115	114	156	143	137	130	137	126	3062	10	12.758
1868	111	109	97	85	101	95	125	152	159	131	130	138	150	150	151	149	149	126	108	100	80	80	80	98	2854	10	11.892
1869	128	141	131	131	126	137	139	145	126	110	105	90	126	120	112	104	114	113	105	106	138	141	132	112	2932	10	12.217
1870	55	86	87	86	100	108	100	87	85	88	80	78	93	95	84	89	81	75	55	48	54	53	48	56	1871	10	7.796
1871	74	74	63	62	62	71	78	84	77	70	71	64	88	91	94	90	82	78	67	52	52	57	55	52	1708	10	7.117
1872	100	113	114	127	107	107	111	114	101	93	93	98	94	105	104	101	81	69	68	61	52	48	67	88	2216	10	9.233
1873	67	71	73	65	68	73	76	72	72	77	65	66	71	66	63	59	54	58	61	51	45	31	42	47	1493	9	6.912
1874	54	74	77	92	106	101	98	97	92	76	90	97	108	90	78	82	75	73	69	66	51	42	46	53	1887	10	7.863
1875	58	57	64	74	69	75	76	80	92	87	73	81	81	91	88	83	84	79	78	65	70	69	78	86	1838	9	8.509
1876	131	133	130	131	134	139	151	176	179	158	153	129	123	128	109	116	110	113	92	93	94	99	118	123	3062	10	12.758
1877	130	115	99	109	86	76	96	101	97	102	121	116	132	117	124	130	130	107	93	86	84	95	118	156	2620	10	10.917
Somma	1041	1086	1064	1106	1088	1098	1157	1219	1196	1115	1122	1098	1207	1183	1127	1113	1075	1005	952	871	857	845	921	997	25543	108	9.855

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 8.ª (11-20 Marzo)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	70	81	96	116	100	91	86	94	91	87	99	99	97	96	96	94	108	104	95	93	90	99	97	87	2266	10	9.442
1868	99	110	126	151	160	165	143	150	131	107	91	88	99	85	87	81	83	98	97	88	86	97	100	110	2632	10	10.967
1869	125	120	119	113	115	101	111	100	101	112	122	105	96	88	96	97	72	81	77	87	92	128	148	140	2546	10	10.608
1870	77	81	87	78	84	90	106	130	128	131	126	133	155	135	124	126	119	115	104	81	75	69	71	82	2507	10	10.446
1871	93	83	74	92	87	92	94	102	115	82	70	82	92	79	77	97	109	100	107	92	96	98	98	101	2212	10	9.217
1872	83	89	95	88	85	92	104	115	113	112	98	81	90	120	110	88	89	96	102	102	96	113	117	102	2380	10	9.917
1873	138	136	130	143	139	117	101	97	122	100	96	97	87	88	106	95	98	87	79	89	79	84	99	107	2514	10	10.475
1874	126	134	126	122	111	111	117	101	105	94	102	104	105	92	101	98	76	82	92	93	79	75	84	94	2424	10	10.100
1875	65	73	70	74	66	60	80	105	99	96	86	98	93	65	65	84	78	66	61	66	60	47	51	60	1768	10	7.367
1876	148	155	159	166	158	156	163	152	124	112	123	121	126	91	98	70	85	88	78	93	92	99	92	94	2843	10	11.846
1877	104	113	127	113	101	97	101	109	105	98	106	101	95	81	76	78	80	71	52	54	45	54	74	102	2137	10	8.904
Somma	1128	1175	1209	1256	1206	1172	1206	1255	1234	1131	1119	1109	1135	1020	1036	1008	997	988	944	938	890	963	1031	1079	26229	110	9.985

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 9.ª (21-31 Marzo)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵉ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	109	106	103	110	116	115	106	111	96	114	127	109	99	106	121	119	126	107	78	57	72	89	80	76	2452	10	10.217
1868	133	143	129	113	99	110	121	115	115	123	123	136	149	148	149	140	141	146	129	100	105	119	132	129	3047	11	11.542
1869	172	148	167	161	148	142	136	121	104	90	87	82	110	108	104	101	101	96	101	100	98	108	124	159	2868	11	10.864
1870	122	140	137	135	143	137	127	121	120	110	86	93	102	98	100	88	77	80	95	79	71	97	109	109	2576	10	10.733
1871	167	154	149	145	123	122	102	93	103	91	92	105	142	127	132	141	131	126	123	127	117	124	132	146	3014	11	11.417
1872	124	131	139	129	126	129	123	129	132	128	114	116	88	127	107	99	89	87	87	69	69	73	74	91	2580	11	9.773
1873	89	100	92	91	108	89	78	81	85	80	57	67	57	61	64	62	68	57	48	39	38	36	60	71	1678	10	6.992
1874	112	106	112	134	136	130	120	124	136	135	129	114	103	110	101	93	78	66	58	51	55	56	74	84	2417	11	9.155
1875	163	160	180	181	162	137	128	138	133	133	125	127	138	123	128	139	114	117	122	115	118	136	156	167	3340	11	12.652
1876	141	161	149	140	126	119	130	139	145	128	121	90	137	156	145	142	121	110	109	107	110	116	115	146	3103	11	11.754
1877	155	148	120	143	125	115	119	112	102	117	94	109	75	93	87	83	89	100	111	118	107	117	167	180	2786	11	10.553
Somma	1487	1497	1477	1482	1412	1345	1290	1284	1271	1249	1155	1148	1200	1257	1238	1207	1135	1092	1061	962	960	1071	1223	1358	29861	118	10.544

Digitized by Google

SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 10.ª (1-10 Aprile)

ANNI	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19 20	20-21	21-22	22-23	23-0	SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
1867	164	140	146	152	131	117	110	127	131	143	156	153	127	128	109	106	111	112	87	90	101	119	136	154	3055	10	12.729
1868	133	130	138	134	124	154	145	151	142	122	112	90	97	94	102	110	89	75	67	46	74	101	130	149	2719	10	11.329
1869	130	121	124	117	112	103	99	84	101	109	107	96	124	119	127	104	118	107	95	89	87	88	86	101	2548	10	10.617
1870	126	133	124	131	144	145	133	134	141	116	90	80	63	70	81	53	44	50	43	45	55	68	97	102	2278	9	10.546
1871	63	66	66	68	76	80	78	85	95	79	84	65	89	67	57	52	72	63	48	42	23	38	46	52	1559	9	7.218
1872	130	124	135	127	110	115	116	116	128	139	119	105	110	117	96	89	78	98	84	87	83	93	125	134	2661	10	11.088
1873	98	90	84	61	64	57	62	58	65	66	51	60	62	79	58	58	81	56	44	42	36	39	71	88	1530	7	9.108
1874	107	93	95	120	104	88	118	121	121	94	96	107	82	82	77	66	74	68	88	84	100	121	118	124	2338	9	10.824
1875	94	84	76	111	114	124	114	95	94	96	86	70	69	87	99	102	87	89	89	73	74	78	96	93	2194	10	8.142
1876	150	167	162	150	122	105	104	99	112	116	109	112	97	92	86	97	92	107	88	96	98	118	143	132	2744	10	11.433
1877	154	136	129	123	134	125	117	112	108	133	102	95	85	95	78	88	90	75	76	75	70	81	104	166	2553	10	10.637
Somma	1359	1284	1279	1294	1245	1214	1196	1182	1238	1218	1112	1038	1005	1030	970	925	936	900	809	759	806	944	1152	1289	26179	104	10.488

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 11.ª (11-20 Aprile)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	95	119	140	167	154	147	125	135	144	142	128	115	105	106	112	105	102	98	99	84	81	99	105	108	2815	10	11.729
1868	99	99	120	111	89	77	91	90	98	115	128	139	132	129	109	85	85	78	77	70	80	90	89	93	2373	10	9.887
1869	86	92	100	100	110	104	85	71	88	96	108	113	113	92	91	72	80	95	91	82	87	98	85	80	2217	10	9.237
1870	116	130	124	150	177	159	133	129	126	104	97	119	129	117	121	93	95	98	78	66	66	81	88	106	2702	9	12.509
1871	96	96	104	89	90	97	112	125	118	100	84	84	83	87	74	74	61	62	58	52	57	59	62	77	2001	10	8.337
1872	95	115	117	121	112	76	87	82	92	97	95	90	75	70	70	66	64	70	65	70	56	66	64	72	1987	10	8.279
1873	78	84	84	79	88	97	92	79	76	60	51	44	37	51	63	68	65	68	49	56	57	61	63	71	1621	8	8.443
1874	123	149	142	155	163	153	121	148	152	136	108	83	74	86	84	89	89	93	90	89	104	128	135	115	2809	10	11.704
1875	92	90	97	91	90	87	106	169	140	141	115	103	92	87	82	73	76	82	76	51	68	83	98	114	2303	10	9.596
1876	110	117	134	151	163	150	150	135	162	152	129	112	103	126	126	86	83	89	84	37	66	68	73	98	2734	10	11.391
1877	105	80	109	105	108	113	121	106	97	101	104	101	112	93	89	84	71	66	70	59	59	87	79	83	2202	10	9.175
Somma	1095	1171	1271	1319	1344	1260	1223	1269	1293	1244	1147	1103	1055	1044	1021	895	871	897	837	746	781	920	941	1017	25754	107	10.033

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 12.ª (21-30 Aprile)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	81	100	113	112	113	110	112	91	87	85	79	76	70	73	66	72	72	66	60	52	71	51	56	83	1951	8	10.161
1868	89	85	74	70	83	77	67	89	82	76	69	83	104	87	78	74	74	61	76	64	62	61	65	74	1824	10	7.600
1869	114	112	112	130	118	127	111	93	95	88	105	98	109	99	87	92	98	87	61	60	57	67	77	92	2289	10	9.537
1870	79	91	110	131	130	119	123	134	125	91	78	75	88	84	79	83	98	81	68	80	88	91	98	85	2309	9	10.690
1871	73	65	65	70	72	62	64	69	76	80	84	78	79	57	55	59	37	49	29	34	69	80	91	89	1586	7	9.440
1872	115	135	137	126	133	119	118	92	90	69	52	48	96	94	73	91	95	79	79	66	66	73	89	106	2241	10	9.337
1873	115	114	105	81	81	89	99	74	81	74	101	118	97	100	104	98	95	77	67	80	81	88	102	130	2251	10	9.379
1874	78	114	124	128	123	136	119	129	115	112	80	101	108	102	83	78	91	85	80	68	72	71	65	74	2336	10	9.733
1875	89	105	112	106	109	104	104	115	112	116	112	93	89	87	78	56	60	58	54	58	63	78	88	96	2142	10	8.925
1876	106	101	103	102	125	116	113	111	135	106	119	112	120	102	99	96	84	84	75	67	68	68	85	85	2382	9	11.028
1877	87	90	87	103	99	108	118	109	103	98	86	70	79	84	82	64	34	30	34	33	40	53	71	73	1835	9	8.495
SOMMA	1026	1112	1142	1159	1186	1167	1148	1106	1101	995	965	952	1039	969	884	863	838	757	683	662	737	781	887	987	23146	102	9.455

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 13.ª (1-10 Maggio)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	80	98	102	104	108	100	105	132	132	116	110	114	122	106	106	92	82	81	73	60	71	64	71	70	2299	10	9.579
1868	109	109	104	107	105	109	112	123	118	97	95	94	78	63	73	61	69	67	56	63	79	96	104	118	2209	10	9.204
1869	121	122	138	129	121	154	144	126	128	121	118	82	92	86	90	87	65	63	56	65	80	76	71	90	2425	10	10.104
1870	164	164	167	180	171	155	111	109	108	107	88	80	82	79	64	59	77	84	67	63	86	114	115	135	2629	10	10.954
1871	136	132	142	150	165	173	176	157	143	140	128	113	133	98	90	86	67	74	57	72	89	98	111	107	2837	10	11.821
1872	88	85	67	72	59	53	46	47	40	24	24	25	47	51	48	35	41	46	51	38	26	38	46	64	1161	6	8.062
1873	88	79	95	66	82	88	75	105	115	110	107	95	105	96	78	70	79	82	65	66	76	64	57	62	2005	8	10.443
1874	107	117	127	112	138	123	109	109	115	112	112	81	101	98	75	69	77	78	84	85	91	92	83	102	2397	10	9.987
1875	80	91	106	89	87	87	97	104	108	98	79	50	63	50	43	45	61	63	50	47	55	60	71	78	1762	10	7.342
1876	143	169	158	151	137	138	145	120	119	97	97	79	86	96	90	81	89	92	81	88	87	94	98	117	2652	10	11.050
1877	98	76	79	76	99	111	118	113	117	91	81	97	82	70	64	65	72	83	69	54	70	87	86	97	2055	10	8.562
Somma	1214	1242	1285	1236	1272	1291	1238	1245	1243	1113	1039	910	991	893	821	750	779	813	709	701	810	883	913	1040	24431	104	9.788

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 14.ª (11-20 Maggio)																						SOMMA Σ	GIORNI di osserv.' n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	84	92	96	109	128	110	114	115	108	94	85	75	85	89	75	65	79	73	55	65	73	77	67	79	2093	10	8.721
1868	124	123	117	112	97	86	82	86	91	97	88	92	110	120	119	118	103	106	72	75	91	112	112	119	2446	10	10.192
1869	104	114	118	101	94	97	78	83	89	86	84	54	65	59	70	58	58	80	60	44	53	51	82	84	1864	10	7.767
1870	82	86	81	78	71	80	84	93	75	62	57	66	68	89	97	101	81	89	55	55	61	62	65	72	1810	10	7.542
1871	112	122	117	132	126	113	105	120	115	102	83	106	111	86	66	58	67	70	67	88	97	103	99	107	2372	10	9.883
1872	60	74	91	115	114	97	72	74	68	74	90	97	84	87	83	75	68	77	76	67	60	62	70	75	1910	9	8.843
1873	53	59	56	57	77	86	103	104	89	90	73	79	87	100	93	102	66	55	50	66	62	93	90	79	1869	9	8.653
1874	97	99	115	104	93	93	72	79	105	104	92	87	102	107	102	97	93	109	109	9?	100	103	123	115	2392	10	9.967
1875	74	78	94	105	112	122	117	126	109	101	91	73	80	64	68	48	41	37	24	30	42	56	71	59	1822	10	7.592
1876	118	119	121	127	111	122	124	123	124	119	115	105	93	104	88	84	83	75	66	79	97	101	106	108	2517	10	10.488
1877	98	97	95	98	108	111	101	98	86	91	104	103	84	71	87	82	73	90	60	63	79	76	76	97	2128	10	8.867
SOMMA	1006	1063	1101	1138	1131	1117	1052	1101	1059	1020	960	937	972	976	948	891	812	855	694	724	815	896	961	994	23223	108	8.959

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 15.ª (21-31 Maggio)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵒ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	134	157	176	165	159	153	143	117	116	113	116	107	125	115	104	87	93	111	112	109	92	92	117	120	2933	11	11.110
1868	76	88	105	114	103	108	83	90	96	95	93	73	96	92	100	92	75	67	50	57	66	60	61	75	2015	11	7.633
1869	133	140	160	176	188	161	144	128	112	102	93	70	84	72	83	95	65	75	52	56	78	92	92	103	2554	11	9.674
1870	94	108	127	126	122	149	135	139	141	127	116	85	95	96	87	88	87	93	53	56	79	83	92	99	2477	11	9.383
1871	141	150	147	151	157	150	124	137	154	135	123	129	122	92	73	70	94	91	74	87	92	99	121	124	2847	11	10.784
1872	169	166	165	200	210	183	131	105	104	88	89	112	86	85	95	103	79	76	57	56	61	99	136	131	2786	10	11.608
1873	105	99	86	70	76	76	92	128	128	129	96	83	97	87	98	87	73	85	100	95	90	80	98	94	2252	10	9.383
1874	77	88	87	89	89	95	86	100	117	97	89	106	86	98	91	79	75	74	58	60	65	75	68	82	2031	11	7.693
1875	119	118	130	129	147	141	128	127	134	121	115	104	110	105	109	90	71	79	78	64	76	86	89	106	2576	11	9.758
1876	131	126	118	115	144	163	138	107	124	113	105	104	103	92	89	88	79	67	53	67	83	102	118	118	2547	11	9.648
1877	120	104	106	107	112	126	102	106	109	110	92	80	76	76	68	61	59	58	59	59	75	107	122	127	2221	11	8.413
Somma	1299	1344	1407	1442	1517	1505	1306	1284	1335	1230	1127	1053	1080	1010	997	940	850	876	746	766	857	975	1114	1179	27239	119	9.537

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 16.ª (1-10 Giugno)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5 6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23 0			
1867	89	85	99	110	123	102	96	90	106	109	116	115	103	106	72	87	81	71	48	59	53	74	84	86	2169	10	9.037
1868	93	119	134	108	93	90	89	86	81	73	81	81	87	82	74	82	77	68	74	54	68	66	75	91	2026	10	8.442
1869	102	105	118	96	103	98	103	99	112	99	103	89	111	109	86	71	71	77	72	80	78	93	94	87	2256	10	9.400
1870	94	109	118	115	108	113	116	100	102	100	85	73	79	82	71	75	65	63	70	87	89	74	81	85	2154	10	8.975
1871	115	112	149	152	130	108	101	93	86	83	79	82	87	66	63	59	52	61	72	78	74	72	80	83	2137	10	8.904
1872	81	73	63	77	81	76	68	51	64	78	54	51	50	61	67	64	58	54	48	53	60	71	78	75	1556	10	6.483
1873	104	109	101	97	115	99	86	91	93	92	83	69	69	55	42	47	51	29	37	52	91	112	99	106	1929	10	8.037
1874	66	78	89	65	63	74	70	80	97	89	122	106	117	126	104	98	80	81	61	55	63	72	64	69	1989	10	8.288
1875	76	86	89	93	86	70	61	62	64	73	78	84	81	68	76	68	69	59	53	48	49	76	88	79	1736	10	7.233
1876	98	102	90	101	89	94	98	93	107	101	110	105	113	105	90	100	81	76	63	68	74	85	97	93	2233	10	9.304
1877	101	93	99	99	95	89	81	77	78	83	79	70	73	86	77	95	98	91	80	53	58	67	68	95	1985	10	8.271
Somma	1019	1071	1149	1113	1086	1013	969	922	990	980	990	925	975	946	822	846	783	730	678	687	757	862	908	949	22170	110	8.398

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 17.ª (11-20 Giugno)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	103	97	92	132	140	141	151	139	140	114	109	97	82	63	73	60	39	52	49	59	56	71	85	93	2237	10	9.321
1868	110	121	107	89	87	90	71	53	57	78	77	87	102	76	80	77	80	86	67	71	69	65	95	93	1988	10	8.283
1869	85	75	96	93	92	120	122	109	92	101	89	68	75	81	84	79	69	67	79	93	108	120	135	135	2267	9	10.495
1870	85	92	97	83	101	101	79	69	80	89	90	74	86	79	70	72	78	86	84	63	60	65	65	71	1919	10	7.996
1871	131	143	151	162	155	144	109	110	94	108	87	89	74	66	52	52	46	52	41	52	57	60	69	92	2196	10	9.150
1872	88	97	98	95	98	106	110	98	105	111	78	104	95	89	87	77	57	40	27	26	21	32	48	65	1852	10	7.717
1873	119	121	108	94	107	112	110	82	73	73	77	88	90	80	72	70	80	70	68	64	57	55	65	89	2024	10	8.433
1874	91	87	71	85	70	79	108	135	115	103	120	132	148	118	124	103	111	96	93	100	104	97	90	81	2461	10	10.254
1875	82	89	74	89	100	102	105	103	85	78	61	57	49	57	47	45	59	57	52	56	49	77	98	96	1767	10	7.362
1876	91	84	65	73	91	83	88	63	79	82	67	69	73	72	84	85	68	64	61	57	55	70	77	81	1782	10	7.425
1877	122	109	104	103	106	113	122	112	127	127	118	127	104	78	96	85	80	90	72	51	62	60	88	138	2394	10	9.975
Somma	1107	1115	1063	1098	1147	1191	1175	1073	1047	1064	973	992	978	859	869	805	767	760	693	692	698	772	915	1034	22887	109	8.749

Digitized by Google

SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 18.ª (21-30 Giugno)

ANNI	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵒ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
1867	68	64	73	94	105	101	103	87	92	103	90	93	113	127	113	87	89	88	104	90	87	91	83	73	2208	10	9.200
1868	88	98	83	82	91	90	86	87	93	93	103	139	105	94	95	99	89	61	50	47	69	74	97	90	2103	10	8.762
1869	87	101	110	117	112	117	115	155	146	110	87	64	94	72	79	68	86	77	67	74	71	68	85	91	2253	10	9.387
1870	81	99	106	88	100	98	115	118	128	129	109	98	86	64	48	50	67	48	33	42	50	60	64	68	1949	9	9.023
1871	91	91	100	102	117	101	87	88	91	91	86	68	60	62	51	51	53	49	64	80	100	86	75	82	1926	10	8.025
1872	76	84	74	86	83	78	82	97	120	111	92	78	50	57	44	51	46	42	28	31	42	50	53	65	1620	10	6.750
1873	98	100	100	77	82	83	79	83	95	104	92	75	95	98	91	78	85	78	61	67	69	74	81	77	2022	10	8.425
1874	146	163	150	145	159	140	124	125	121	132	131	127	100	92	113	107	81	74	71	80	88	101	101	115	2786	10	11.608
1875	78	115	113	123	121	114	103	92	81	79	90	94	90	80	83	99	83	82	65	68	70	70	62	71	2131	10	8.879
1876	92	98	101	111	100	93	85	85	88	103	80	76	84	67	66	62	61	62	57	64	69	70	74	71	1919	10	7.996
1877	81	102	94	95	101	113	116	111	113	109	108	105	93	99	101	86	79	75	66	65	78	77	64	98	2234	10	9.308
Somma	986	1115	1104	1110	1171	1128	1100	1128	1168	1164	1068	1017	975	912	884	838	819	736	666	708	793	821	839	901	23151	109	8.850

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 19.ª (1-10 Luglio)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	70	80	88	80	92	98	103	98	123	137	126	115	107	88	76	94	81	74	59	72	77	79	82	78	2177	10	9.071
1868	97	109	111	122	117	90	74	78	92	86	96	104	116	86	89	77	91	86	76	81	78	78	83	91	2208	10	9.200
1869	89	89	97	78	73	70	80	93	120	111	101	74	99	76	64	59	71	67	49	33	46	52	57	59	1807	10	7.529
1870	83	77	103	115	126	133	127	128	133	130	99	80	73	67	56	73	68	42	32	40	55	64	65	75	2044	10	8.517
1871	73	83	83	92	114	120	119	99	97	88	76	59	61	59	40	40	43	35	36	49	56	61	71	80	1734	10	7.225
1872	61	61	79	111	98	89	71	73	86	91	75	78	49	62	85	88	75	66	58	59	69	94	72	76	1826	10	7.608
1873	68	77	73	64	80	77	74	75	83	83	80	69	70	65	59	54	51	45	29	28	45	57	63	74	1543	10	6.429
1874	72	75	77	85	101	109	107	99	113	101	87	94	90	90	86	92	96	95	65	61	66	69	66	67	2063	10	8.596
1875	73	111	125	116	84	90	71	73	70	65	59	58	54	51	57	59	54	61	46	46	70	81	87	95	1754	10	7.308
1876	99	93	109	108	97	86	108	91	95	95	83	91	90	89	84	74	68	49	39	46	50	62	75	83	1964	10	8.183
1877	81	69	70	88	92	94	123	113	107	94	77	67	84	76	75	54	52	51	45	46	48	57	63	86	1812	10	7.550
SOMMA	866	924	1015	1059	1074	1056	1057	1020	1119	1081	959	889	893	809	771	764	750	671	534	561	660	754	784	862	20932	110	7.929

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 20.ª (11-20 Luglio)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	91	87	82	91	112	129	154	155	149	124	115	103	94	82	78	78	92	64	63	77	80	86	83	96	2365	10	9.854
1868	68	68	72	58	84	82	98	82	70	75	83	85	115	90	80	86	79	77	45	59	59	60	63	63	1801	10	7.504
1869	96	109	100	109	118	116	130	130	142	129	94	75	78	69	79	63	46	50	52	61	75	77	78	89	2165	9	10.023
1870	89	94	105	108	101	117	122	124	109	100	108	115	108	94	102	99	95	77	55	56	66	72	73	83	2272	10	9.467
1871	78	81	74	78	77	91	85	86	90	93	80	79	96	66	50	44	42	41	40	38	51	68	79	74	1681	9	7.782
1872	61	67	55	59	66	80	74	65	74	66	68	41	59	51	46	44	53	45	38	31	31	43	51	59	1327	7	7.899
1873	99	98	94	90	121	121	134	119	126	116	94	87	92	90	76	75	76	81	71	76	75	78	80	91	2260	10	9.417
1874	81	93	96	120	103	88	86	97	98	83	85	75	89	87	85	80	67	58	44	41	56	76	71	65	1924	10	8.017
1875	52	69	77	64	71	74	70	58	60	71	51	51	64	52	44	61	41	46	32	39	43	58	71	65	1384	10	5.767
1876	113	115	119	120	114	107	99	97	110	115	101	89	96	86	90	96	101	95	73	54	64	86	88	95	2323	10	9.679
1877	101	89	104	100	106	114	133	130	106	95	102	95	96	68	71	66	55	63	53	50	53	65	66	106	2087	10	8.696
Somma	929	970	978	997	1073	1119	1185	1143	1134	1067	981	895	987	835	801	792	747	697	566	582	653	769	803	886	21589	105	8.567

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 21.ª (21-31 Luglio)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	90	92	100	115	128	119	119	110	111	116	104	96	73	53	59	72	95	69	47	44	61	66	69	70	2078	10	8.658
1868	102	104	100	115	110	124	123	131	132	116	103	88	96	86	99	120	97	78	72	87	84	95	94	95	2451	11	9.284
1869	85	90	89	95	98	108	113	141	139	128	94	92	97	93	95	90	87	84	60	57	63	72	83	80	2233	11	8.458
1870	96	109	107	121	122	133	134	130	119	111	88	86	91	95	91	88	79	72	51	46	58	74	92	103	2296	11	8.697
1871	138	148	134	140	139	146	134	128	113	103	89	97	83	75	57	54	58	57	58	58	68	82	108	128	2395	11	9.072
1872	112	124	112	122	126	139	159	150	141	142	125	111	71	90	85	76	69	68	55	48	69	86	83	91	2454	11	9.295
1873	76	81	91	81	83	90	116	123	100	97	88	103	102	97	62	73	79	77	55	51	61	74	79	79	2018	11	7.644
1874	96	107	141	121	128	142	124	103	103	113	135	131	118	126	120	93	87	84	68	65	74	94	103	116	2592	11	9.818
1875	94	90	105	106	106	111	105	110	112	116	127	117	102	101	72	79	81	79	68	58	75	77	81	88	2260	11	8.561
1876	102	100	101	108	109	108	101	109	115	131	135	115	102	94	89	98	92	73	65	68	83	93	104	103	2398	11	9.083
1877	118	110	119	108	114	114	111	114	126	126	111	95	82	99	96	102	68	85	81	60	60	60	71	116	2346	11	8.886
Somma	1109	1155	1199	1232	1263	1334	1339	1349	1311	1299	1199	1131	1017	1009	925	945	892	326	680	642	756	873	967	1069	25521	120	8.861

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 22.ª (1-10 Agosto)																								SOMMA	GIORNI di osserv.ne	MEDIO
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23 0	Σ	n	$\frac{\Sigma}{24n}$
1867	78	76	54	71	66	64	68	68	66	57	25	25	50	58	47	48	37	51	39	49	58	67	76	73	1371	7	8.161
1868	63	64	74	65	67	57	55	59	52	53	64	61	63	59	56	69	69	59	45	41	41	46	59	73	1414	8	7.365
1869	72	81	73	92	95	88	101	105	106	106	70	52	60	79	67	58	66	66	57	56	63	64	68	61	1809	9	8.375
1870	67	76	60	68	72	81	67	63	57	76	96	107	92	96	85	71	70	69	52	56	78	70	61	62	1742	10	7.258
1871	112	122	127	129	124	120	97	102	111	109	104	90	75	63	57	50	45	60	75	59	62	72	91	89	2135	10	8.895
1872	71	79	87	101	102	94	89	88	96	74	64	76	91	77	70	91	64	67	51	41	45	47	53	61	1779	9	8.236
1873	112	101	85	69	87	89	100	126	133	123	86	74	90	87	78	72	77	55	47	48	72	85	98	109	2103	10	8.762
1874	103	113	115	112	99	109	94	94	101	92	93	93	107	92	79	76	72	73	63	56	69	72	90	92	2159	10	8.996
1875	79	79	101	91	76	71	74	86	94	98	97	114	112	112	90	87	88	72	82	74	70	81	81	94	2103	10	8.762
1876	81	91	86	78	79	70	70	85	85	91	84	72	73	92	101	86	98	88	54	39	45	55	61	56	1820	10	7.583
1877	87	86	125	94	83	90	91	93	85	100	95	80	72	75	96	79	58	45	34	28	46	66	57	78	1843	10	7.679
Somma	925	968	987	970	950	933	906	969	956	979	868	844	885	890	826	787	744	705	599	547	652	725	785	848	20279	103	8.204

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 23.ª (10-21 Agosto)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵒ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	94	99	111	102	121	108	102	131	130	117	110	91	99	97	96	94	73	64	59	59	78	92	92	95	2314	10	9.642
1868	90	93	86	98	99	96	88	81	72	68	71	84	75	59	66	64	62	56	67	56	55	70	73	83	1812	10	7.550
1869	96	117	116	115	115	115	107	115	135	138	100	98	134	113	117	190	94	86	74	66	68	69	75	72	2525	10	10.521
1870	52	52	61	74	66	67	47	57	79	83	89	90	100	102	96	111	87	68	42	37	46	37	42	47	1632	10	6.800
1871	57	53	64	84	115	100	85	82	94	84	88	88	75	66	54	53	56	75	69	61	54	39	43	45	1684	10	7.017
1872	56	56	62	71	64	90	96	109	104	95	78	48	75	77	58	55	66	52	43	32	49	45	44	49	1574	8	8.198
1873	102	101	94	76	99	99	123	120	125	109	92	64	53	58	60	59	62	87	73	60	72	76	82	88	2034	10	8.475
1874	116	103	107	108	99	109	119	128	117	107	93	97	96	97	78	81	81	88	82	63	68	82	94	92	2305	10	9.604
1875	64	71	75	76	64	88	105	119	111	98	84	83	82	75	69	66	62	65	50	32	40	48	63	65	1755	10	7.312
1876	71	71	78	92	96	111	122	121	103	114	81	54	74	67	73	81	68	55	41	46	51	57	59	51	1837	10	7.654
1877	68	66	55	51	47	58	44	69	81	83	70	53	48	54	84	89	73	49	40	43	52	58	54	64	1453	10	6.054
Somma	866	882	909	947	985	1041	1038	1132	1151	1096	956	850	911	865	851	943	784	745	640	555	633	673	721	751	20925	108	8.073

Digitized by Google

SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 24.ª (21-31 Agosto)

ANNI	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
1867	60	65	74	84	62	58	86	89	78	73	67	66	67	79	87	81	65	68	70	49	64	68	65	60	1685	9	7.801
1868	90	98	97	96	104	106	105	102	108	93	90	93	96	95	85	83	70	67	64	46	51	62	74	74	2049	11	7.761
1869	114	114	102	101	87	104	104	111	114	104	106	96	90	87	99	75	82	84	81	61	50	64	93	124	2247	11	8.511
1870	94	91	94	83	65	71	73	85	88	76	55	67	104	106	110	104	85	64	55	54	50	56	73	80	1883	11	7.133
1871	96	93	97	97	105	123	143	150	143	122	99	76	85	101	87	85	66	57	45	39	44	51	68	80	2152	11	8.152
1872	87	87	109	139	149	114	103	100	116	107	107	87	69	71	73	74	75	64	57	69	60	67	82	85	2151	11	8.148
1873	83	83	75	77	94	93	94	90	80	91	77	79	95	91	98	61	83	82	65	67	64	81	77	72	1952	11	7.394
1874	72	90	102	102	93	79	86	101	107	92	102	90	96	83	73	73	58	67	58	44	43	55	74	78	1918	11	7.265
1875	100	92	95	103	84	97	92	114	104	104	84	87	91	85	88	74	68	79	78	67	66	80	94	89	2115	11	8.011
1876	97	86	106	107	106	122	98	126	130	114	105	132	117	103	105	97	97	97	103	82	94	84	94	110	2512	11	9.515
1877	78	64	55	52	50	55	86	116	103	98	105	87	82	72	81	84	84	80	73	73	65	62	60	62	1827	11	6.920
Somma	971	963	1006	1041	999	1022	1070	1184	1171	1074	997	960	992	973	986	891	833	809	749	651	651	730	854	914	22491	119	7.875

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 25.ª (1-10 Settembre)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵉ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	58	53	54	46	53	54	68	75	79	79	75	92	96	101	101	95	98	96	96	74	63	57	58	54	1775	10	7.396
1868	94	99	113	104	97	82	94	105	98	78	59	60	84	86	88	97	87	82	78	57	69	68	87	91	2057	10	8.571
1869	101	107	110	107	108	106	108	124	118	107	93	77	96	86	73	73	69	59	59	42	58	68	77	88	2114	10	8.808
1870	95	80	95	93	86	103	110	100	106	99	99	86	113	86	78	64	58	68	68	51	63	73	79	94	2047	10	8.529
1871	43	57	62	70	68	70	87	82	73	52	45	43	49	40	42	44	53	36	21	17	22	30	35	37	1178	8	6.135
1872	58	61	60	65	68	82	102	134	121	111	73	48	46	69	72	66	59	55	46	38	38	48	44	53	1617	10	6.737
1873	91	104	98	79	122	117	113	112	123	98	85	72	64	64	43	45	50	49	56	49	57	73	80	78	1922	10	8.008
1874	61	61	68	87	131	128	134	130	128	88	61	68	63	69	69	63	69	75	67	51	42	60	55	59	1887	10	7.862
1875	69	92	111	117	120	116	127	143	132	110	98	94	107	121	102	83	74	63	46	41	44	60	65	82	2217	10	9.237
1876	90	88	90	101	89	88	76	84	104	80	70	101	95	103	79	72	57	73	63	42	59	78	81	88	1951	10	8.129
1877	101	94	97	97	111	115	107	119	117	104	96	96	92	90	77	72	75	86	77	56	51	74	97	108	2209	10	9.204
Somma	861	896	958	966	1053	1061	1126	1208	1199	1006	854	837	905	915	824	774	749	742	677	518	566	689	758	832	20974	108	8.092

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 26.ª (11-20 Settembre)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	70	72	69	65	61	66	78	86	94	93	100	85	82	92	58	57	57	61	67	44	50	62	75	78	1722	8	8.969
1868	51	49	54	64	79	72	69	84	87	77	87	80	92	70	57	69	73	82	70	56	60	62	74	73	1691	10	7.046
1869	63	83	82	92	86	102	86	110	94	70	60	55	78	69	60	52	50	60	41	48	45	56	55	48	1645	10	6.854
1870	67	74	85	87	82	79	89	107	120	99	95	99	121	91	78	81	79	83	63	59	53	57	59	60	1967	10	8.196
1871	82	86	84	93	114	106	100	82	76	67	51	58	52	62	61	63	55	40	44	45	47	65	76	76	1685	9	7.801
1872	65	56	65	65	55	63	80	104	86	76	63	71	78	93	87	69	75	81	74	67	67	74	71	83	1768	10	7.367
1873	76	84	95	71	91	98	106	118	109	85	58	34	54	52	52	57	59	82	90	102	88	75	79	70	1885	10	7.854
1874	115	125	122	116	119	103	144	145	155	129	107	85	82	89	77	74	78	83	91	76	64	83	117	107	2486	10	10.358
1875	72	84	86	103	100	95	125	127	123	103	92	83	74	78	83	86	76	75	65	47	33	49	71	67	1997	10	8.321
1876	60	53	65	81	62	53	57	89	88	87	84	78	66	62	78	79	83	72	50	51	44	48	55	54	1599	10	6.663
1877	95	78	72	69	69	73	95	112	105	99	93	72	71	72	67	45	45	58	69	56	52	52	47	61	1727	10	7.196
Somma	816	844	879	906	918	910	1029	1164	1137	985	890	800	850	830	758	732	730	777	724	651	603	683	779	777	20172	107	7.855

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 27.ª (21-30 Settembre)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.e n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	97	105	99	84	76	91	96	100	89	86	110	108	103	112	97	91	97	80	70	66	67	69	91	95	2179	10	9.079
1868	102	99	105	97	83	80	70	88	92	109	90	86	92	84	78	79	76	69	66	64	68	70	80	97	2024	10	8.433
1869	44	47	54	45	41	36	52	60	58	41	46	45	64	75	63	56	51	63	51	46	51	47	52	40	1228	8	6.396
1870	97	91	86	91	84	93	91	106	115	99	91	79	102	97	94	91	89	100	91	81	75	72	80	96	2191	10	9.129
1871	51	50	52	53	51	52	44	48	39	33	43	32	33	41	47	49	43	36	48	33	32	30	35	33	1008	6	7.000
1872	71	94	105	86	86	83	98	106	95	70	54	77	70	86	71	62	32	34	48	53	32	44	45	38	1640	10	6.833
1873	83	101	87	81	77	81	85	80	71	53	38	27	27	29	33	36	32	22	36	31	19	32	49	66	1276	9	5.907
1874	69	66	82	105	104	93	112	110	93	84	66	59	63	57	53	61	67	70	65	48	53	64	62	58	1764	10	7.350
1875	71	74	82	81	81	99	108	107	93	87	95	101	84	77	74	80	59	49	55	57	50	44	57	63	1828	10	7.617
1876	55	58	63	56	63	67	68	86	84	80	76	64	62	56	52	56	66	70	57	39	31	55	56	96	1516	10	6.317
1877	101	100	103	103	82	75	88	108	107	98	83	76	91	89	88	70	54	74	90	66	58	55	61	82	2002	10	8.342
Somma	841	885	918	882	828	850	912	999	936	840	792	754	791	803	750	731	666	667	677	584	536	582	668	764	18656	103	7.547

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 28.ª (1-10 Ottodre)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5 6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	109	110	98	104	115	97	102	113	113	94	106	97	114	105	91	93	82	112	115	111	101	109	127	107	2525	10	10.521
1868	68	76	74	58	54	59	69	78	73	64	65	58	62	56	59	62	74	90	92	76	75	72	57	64	1635	8	8.516
1869	53	56	50	42	49	53	60	84	72	68	60	52	58	53	51	54	50	44	45	38	34	30	33	39	1228	9	5.685
1870	88	116	123	120	122	100	103	91	83	83	86	79	128	107	81	86	90	98	103	85	73	67	75	78	2265	10	9.437
1871	77	83	86	89	88	90	74	65	69	72	65	53	29	49	58	43	40	52	58	52	46	48	49	66	1501	8	7.818
1872	76	77	81	83	88	92	109	116	132	133	108	92	72	100	93	85	66	60	61	50	51	48	54	71	1998	10	8.325
1873	44	59	59	47	40	37	49	58	60	50	55	65	68	61	57	59	64	74	59	57	60	65	43	39	1329	7	7.911
1874	58	61	66	62	71	64	65	69	70	76	84	76	83	72	79	75	81	73	79	67	69	75	49	47	1671	10	6.962
1875	71	90	101	99	85	113	133	127	107	117	94	74	75	61	48	57	43	47	37	28	27	41	64	77	1816	10	7.567
1876	66	66	68	70	71	87	104	125	111	79	72	84	104	89	78	83	79	63	66	43	31	52	45	60	1796	10	7.483
1877	150	166	169	168	143	128	134	136	107	118	120	105	93	93	91	81	96	104	89	102	74	91	106	143	2807	10	11.695
Somma	860	960	975	942	926	920	1002	1062	997	954	915	835	886	846	786	778	765	817	804	709	641	698	702	791	20571	102	8.403

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 29.ª (11-20 Ottobre)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	62	57	51	49	44	45	59	66	68	60	73	69	53	61	60	68	67	50	56	76	61	70	70	69	1464	10	6.100
1868	67	69	78	77	70	66	66	68	65	69	53	77	86	75	71	67	65	54	76	52	40	51	72	79	1613	10	6.721
1869	39	51	53	72	70	62	89	91	100	109	93	104	68	75	67	69	53	52	60	55	41	32	50	42	1597	10	6.654
1870	98	84	89	105	103	106	94	98	89	80	74	75	89	85	81	65	63	63	68	59	65	67	80	80	1960	10	8.167
1871	52	47	45	61	66	68	79	89	82	92	78	44	51	52	54	42	35	37	36	36	40	41	37	37	1301	8	6.776
1872	68	93	79	67	62	83	75	61	62	52	55	52	49	57	46	45	45	50	75	65	58	58	55	50	1462	6	10.152
1873	54	69	70	67	69	47	65	62	61	64	60	39	42	49	54	49	50	46	53	48	50	54	47	47	1316	8	6.854
1874	66	77	75	53	52	61	61	74	61	48	59	44	63	70	56	67	50	64	54	45	45	37	47	63	1392	10	5.800
1875	83	80	95	103	86	79	82	82	87	76	82	92	90	86	86	78	64	64	73	74	68	58	73	76	1917	10	7.987
1876	55	41	49	54	47	63	82	89	82	77	70	77	80	79	85	80	73	71	64	62	53	44	48	67	1592	10	6.633
1877	74	66	77	67	65	84	97	93	86	95	97	86	78	84	82	73	85	79	77	56	43	37	42	68	1791	10	7.463
Somma	718	734	761	775	734	764	849	873	843	822	794	759	749	773	742	703	650	630	692	628	564	549	621	678	17405	102	7.110

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 30.ª (21-31 Ottobre)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵉ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	82	77	85	87	85	97	102	91	101	104	99	124	118	114	110	115	127	107	108	121	102	81	68	70	2375	10	9.896
1868	95	93	98	91	89	90	91	75	72	64	67	48	60	67	69	72	84	79	112	102	85	76	56	73	1908	11	7.227
1869	59	89	88	74	70	67	70	70	58	72	75	67	75	82	74	61	57	66	60	54	42	46	43	51	1565	9	7.245
1870	114	111	113	84	78	79	127	140	130	124	116	94	107	114	111	123	119	116	103	99	103	105	95	103	2608	11	9.879
1871	98	104	117	103	96	97	114	105	96	88	70	66	72	69	69	70	78	78	85	69	56	62	59	74	1995	11	7.562
1872	84	121	99	94	83	80	77	89	102	98	111	109	112	110	112	90	87	96	100	107	98	94	86	80	2319	11	8.784
1873	90	110	123	109	105	111	98	91	79	92	84	87	105	98	107	101	95	90	76	85	99	84	88	90	2297	11	8.701
1874	56	56	51	57	61	80	67	58	67	84	91	86	96	82	80	74	74	73	86	70	57	59	59	53	1677	11	6.352
1875	95	116	121	108	88	95	97	84	81	75	77	79	78	91	93	80	80	76	78	89	78	80	94	105	2138	11	8.098
1876	52	72	74	80	87	95	94	114	111	99	103	91	85	76	74	85	82	67	48	47	43	40	54	73	1846	11	6.992
1877	66	56	56	54	54	64	79	92	109	92	87	89	86	86	85	84	78	92	75	77	66	58	64	69	1818	11	6.886
Somma	891	1005	1020	941	896	955	1016	1009	1006	992	980	940	994	989	984	955	961	940	931	920	829	785	766	841	22546	118	7.943

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 31.ª (1-10 Novembre)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	75	86	85	78	74	76	88	108	98	103	97	110	100	88	90	98	83	70	78	46	46	37	45	64	1923	10	8.013
1868	83	82	66	70	89	93	98	84	89	95	102	92	85	81	89	82	100	100	71	71	74	73	83	98	2050	10	8.542
1869	32	50	57	50	45	59	60	57	69	83	77	81	98	73	72	83	79	95	93	80	63	45	47	44	1592	10	6.633
1870	86	79	78	75	75	66	71	66	74	86	78	70	69	68	63	70	66	62	55	66	47	56	73	76	1675	10	6.979
1871	73	60	59	72	69	72	89	89	80	87	89	98	82	90	94	91	88	76	78	70	55	65	70	70	1866	10	7.775
1872	62	51	47	55	46	65	75	85	71	72	84	83	92	78	63	68	97	100	85	83	61	52	56	58	1689	10	7.037
1873	89	117	98	90	84	74	88	100	88	82	96	81	79	72	64	71	97	96	96	105	102	95	95	120	2179	10	9.079
1874	32	33	33	32	45	63	72	70	79	84	98	105	86	72	80	81	76	82	69	66	44	30	29	35	1496	10	6.233
1875	57	64	64	41	31	50	72	83	84	75	68	63	59	70	74	65	66	74	62	41	42	43	48	65	1461	10	6.087
1876	88	89	85	81	69	72	80	77	65	70	69	73	64	71	73	74	67	73	75	84	64	57	64	88	1772	9	8.204
1877	52	43	40	42	48	60	63	66	73	75	93	87	80	76	79	66	56	70	73	63	55	50	55	46	1511	10	6.296
Somma	729	754	712	686	675	750	856	885	870	912	951	943	894	839	841	849	875	898	835	775	653	603	665	764	19214	109	7.345

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 32.ª (11-20 Novembre)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	68	56	50	58	57	61	51	53	44	50	44	56	52	55	71	83	90	87	98	90	74	64	65	85	1562	10	6.508
1868	68	73	66	71	73	83	80	90	89	88	89	76	102	102	99	95	87	83	83	90	86	67	66	56	1962	10	8.175
1869	63	65	58	37	32	45	56	59	73	89	74	70	84	82	71	72	53	35	49	55	51	36	36	48	1393	10	5.804
1870	71	68	67	71	76	83	111	105	97	92	81	73	76	81	81	71	59	57	51	61	49	49	69	65	1764	9	8.167
1871	86	100	95	94	98	82	84	90	87	113	112	105	87	103	119	104	95	80	63	72	92	89	83	93	2226	8	11.593
1872	100	100	85	89	97	90	91	112	99	88	90	76	83	84	58	52	66	76	83	92	99	91	80	92	2073	10	8.637
1873	76	92	84	80	75	96	84	86	90	81	80	79	72	63	65	70	74	65	69	68	70	60	42	60	1781	10	7.421
1874	102	125	136	109	138	134	130	128	103	93	91	93	86	91	90	105	105	101	121	98	95	92	106	108	2580	10	10.750
1875	76	100	100	89	88	93	81	93	113	118	104	118	117	98	95	89	84	80	74	75	69	73	74	79	2180	10	9.083
1876	66	57	63	63	60	66	74	62	56	51	56	50	60	64	60	72	75	59	74	73	64	54	60	65	1504	10	6.267
1877	69	46	64	55	58	67	88	92	96	89	87	76	72	76	79	75	81	80	79	79	80	68	77	83	1816	10	7.567
Somma	845	882	868	816	852	900	930	970	947	952	908	872	891	899	888	888	869	803	844	853	829	743	758	834	20841	107	8.116

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 33.ª (21-30 Novembre)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.' n	MEDIO Σ / 24 n
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1867	70	64	49	49	44	44	47	53	58	58	68	60	56	71	70	70	94	72	74	81	72	62	53	43	1482	10	6.175
1868	44	53	56	60	61	66	60	53	58	57	62	63	52	69	58	55	63	67	62	74	75	57	48	53	1426	9	6.602
1869	108	125	105	105	107	103	97	86	83	72	77	79	58	74	86	75	75	102	99	103	90	100	129	121	2259	10	9.412
1870	69	65	70	68	61	70	61	68	78	81	79	80	103	90	78	77	90	97	92	85	80	84	84	84	1894	10	7.892
1871	40	34	36	46	48	45	59	61	61	54	69	67	53	60	53	51	46	50	46	46	43	42	36	36	1182	7	7.036
1872	42	46	43	37	33	47	39	35	56	60	48	54	48	53	36	46	44	54	74	78	72	75	73	65	1258	10	5.242
1873	75	86	99	80	82	85	95	102	85	98	94	88	91	88	85	112	123	111	94	103	100	103	81	81	2241	10	9.338
1874	81	84	79	75	80	74	75	77	68	71	70	78	67	67	79	76	68	66	74	65	61	66	60	64	1725	10	7.187
1875	62	68	59	70	68	69	61	68	65	64	65	71	63	54	74	55	58	46	56	54	54	47	60	78	1489	10	6.204
1876	74	68	65	61	60	61	58	72	76	76	74	74	87	79	82	88	81	86	92	74	71	67	77	94	1797	10	7.488
1877	102	70	51	60	63	70	83	86	100	98	108	121	132	109	103	99	93	88	100	89	98	95	95	100	2213	10	9.221
Somma	767	763	712	711	707	734	735	761	788	789	814	835	810	814	804	804	835	839	863	852	816	798	796	819	18966	106	7.455

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 34.ª (1-10 Dicembre)																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵉ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
1866	69	60	65	73	63	72	65	62	70	64	63	47	58	46	51	52	50	54	51	62	60	54	56	54	1421	9	6.579
1867	51	48	63	50	67	70	70	66	65	70	74	67	85	76	69	75	68	72	73	83	70	45	44	50	1571	8	8.182
1868	100	99	86	77	67	73	60	58	72	73	73	74	51	66	66	72	89	85	64	59	63	62	69	89	1747	10	7.279
1869	78	70	68	75	78	59	63	78	75	66	68	66	73	65	63	58	56	51	50	41	49	62	52	59	1523	9	7.051
1870	57	51	58	62	54	51	56	59	67	80	76	57	68	73	65	70	63	56	57	45	35	22	25	30	1337	7	7.958
1871	47	52	49	46	48	49	61	83	67	68	51	58	80	105	104	107	99	95	77	72	71	65	61	62	1677	8	8.734
1872	135	123	127	157	103	109	99	101	111	128	113	101	102	135	125	75	73	93	135	95	106	111	111	114	2682	10	11.175
1873	105	129	119	92	86	95	97	125	116	127	148	144	123	123	121	122	123	112	107	119	109	113	116	83	2754	10	11.475
1874	81	80	100	92	83	81	94	93	90	85	102	93	78	87	91	85	86	77	72	80	85	81	80	86	2062	10	8.592
1875	84	78	76	71	65	71	70	72	92	96	90	84	75	79	74	68	63	59	70	72	73	73	82	78	1815	10	7.563
1876	54	42	51	65	70	77	61	79	81	60	72	71	91	103	100	95	86	81	85	77	70	69	79	80	1799	10	7.496
SOMMA	861	832	862	860	784	807	796	876	906	917	930	862	884	958	929	879	856	835	841	805	791	757	775	785	20388	101	8.411

Digitized by Google

ANNI	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 35.ª (11-20 Dicembre)																							SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ᵒ n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5 6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23 0			
1866	74	71	58	58	63	72	75	59	59	94	90	98	79	78	82	97	101	105	101	92	108	102	89	90	1995	9	9.236
1867	81	68	61	66	85	97	94	91	96	96	106	102	110	123	127	126	102	94	97	83	111	84	81	88	2269	10	9.454
1868	67	67	64	49	48	42	41	60	63	60	63	69	71	78	76	77	65	68	59	68	74	73	66	68	1536	10	6.400
1869	48	45	51	51	58	59	54	45	56	49	48	48	53	46	43	50	50	52	59	51	60	52	41	38	1207	9	5.588
1870	45	61	68	59	46	45	49	54	64	66	59	51	56	61	49	53	59	61	55	40	49	36	37	34	1257	9	5.819
1871	39	33	34	32	40	38	46	55	64	65	57	54	52	61	64	61	64	69	56	59	50	40	33	37	1203	5	10.025
1872	89	77	66	71	81	78	77	77	73	74	67	73	66	81	64	44	43	44	53	56	67	80	63	64	1628	8	8.479
1873	64	62	57	39	57	62	64	80	87	101	96	98	88	83	84	88	89	104	92	102	100	81	66	52	1896	10	7.900
1874	85	87	92	86	80	75	70	74	64	72	74	84	77	84	76	81	89	99	92	88	86	79	82	98	1974	10	8.225
1875	64	67	34	35	43	51	55	53	72	74	74	75	93	70	66	80	71	53	48	53	61	49	54	46	1441	10	6.004
1876	81	62	67	50	56	63	64	57	59	77	69	71	63	73	80	83	74	88	74	64	68	71	78	88	1680	10	7.000
Somma	737	700	652	596	657	682	689	705	757	828	803	823	808	838	811	840	807	837	786	756	834	747	690	703	18086	100	7.536

Digitized by Google

SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nella Decade 36.ª (21-31 Dicembre)

ANNI	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	SOMMA Σ	GIORNI di OSSERV.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
1866	51	51	50	35	50	47	76	87	90	96	86	83	91	93	88	86	76	95	98	90	65	70	61	50	1765	10	7.354
1867	51	59	59	52	60	76	60	50	59	62	59	66	60	60	74	94	92	75	73	76	74	62	54	48	1555	11	5.890
1868	81	77	84	59	58	70	79	66	65	66	54	57	51	54	48	53	66	56	52	58	68	70	60	69	1520	11	5.758
1869	131	127	120	110	112	110	129	107	92	86	82	105	128	120	110	116	115	114	109	107	100	122	135	115	2702	11	10.235
1870	76	62	59	51	60	79	71	78	73	72	71	81	96	88	81	78	76	77	65	73	76	67	73	72	1755	11	6.648
1871	17	24	16	15	19	19	21	22	25	25	21	26	20	28	24	14	17	21	16	21	15	15	11	11	463	4	4.823
1872	34	42	34	27	33	38	29	32	37	39	43	47	37	56	53	48	43	40	36	34	30	36	38	42	928	7	5.524
1873	66	47	50	57	45	35	41	59	47	60	60	52	67	78	70	68	71	70	66	82	71	70	52	25	1409	11	5.337
1874	121	120	123	105	95	90	94	97	104	102	103	107	104	107	113	111	114	119	120	112	113	102	104	114	2594	11	9.826
1875	60	55	57	58	46	60	65	76	79	76	74	103	102	109	105	87	84	80	65	68	83	79	63	65	1799	11	6.814
1876	88	66	69	72	64	63	65	71	62	71	74	86	74	88	68	57	68	75	83	89	95	93	101	88	1830	11	6.931
Somma	776	730	720	641	642	687	730	745	733	755	727	813	830	881	834	812	822	822	783	810	790	786	752	699	18320	109	7.003

Digitized by Google

Le 36 tavole precedenti contengono, come si è detto, i risultati genuini delle osservazioni. Riunisco nelle tavole che seguono i valori relativi alle 4 stagioni. Il metodo è sempre lo stesso, cioè si prende costantemente la somma totale dei kilometri percorsi nell'intervallo che si considera, sia decade, sia mese, sia stagione.

Digitized by Google

DECADI e Mesi	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nei mesi di Dicembre, Gennaio e Febbraio.																						SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
24	861	832	862	860	784	807	796	876	906	917	930	862	884	958	929	879	856	835	841	805	791	757	775	785	20388	101	8.411
25	737	700	652	596	657	682	689	705	757	828	803	823	808	838	811	840	807	837	786	756	834	747	690	703	18086	100	7.536
26	776	730	720	641	642	687	730	745	733	755	727	813	830	881	834	812	822	822	783	810	790	786	752	699	18320	109	7.003
Dicem.	2374	2262	2234	2097	2083	2176	2215	2326	2396	2500	2460	2498	2522	2677	2574	2531	2485	2494	2410	2371	2415	2290	2217	2187	56794	310	7.634
1	702	663	623	574	555	560	633	660	677	693	702	715	762	714	721	714	739	722	701	718	664	634	635	657	16138	94	7.153
2	690	664	686	646	621	667	645	681	703	740	714	739	775	750	727	737	710	729	685	659	667	674	698	706	16713	101	6.895
3	931	969	955	923	873	923	1012	1078	1117	1108	1077	1104	1172	1170	1130	1088	1124	1054	995	912	953	888	840	867	24263	120	8.425
Genn.	2323	2296	2264	2143	2049	2150	2290	2419	2497	2541	2493	2558	2709	2634	2578	2539	2573	2505	2381	2289	2284	2196	2173	2230	57114	315	7.555
4	637	709	666	639	644	760	807	875	866	819	865	787	886	876	845	845	842	790	787	722	654	593	620	618	18152	93	8.133
5	656	672	723	705	680	650	762	837	836	822	833	820	849	840	819	823	817	771	772	809	715	613	666	691	18181	104	7.284
6	619	653	672	746	669	635	673	707	710	717	692	722	842	785	778	735	728	733	734	701	635	547	561	570	16564	88	7,843
Febbr.	1912	2034	2061	2090	1993	2045	2242	2419	2412	2358	2390	2329	2577	2501	2442	2403	2387	2294	2293	2232	2004	1753	1847	1879	52897	285	7.733

Digitized by Google

DECADI e Mesi	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nei mesi di Marzo, Aprile e Maggio.																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.^{e} n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
7	1041	1086	1064	1106	1088	1098	1157	1219	1196	1115	1122	1098	1207	1183	1127	1113	1075	1005	952	871	857	845	921	997	25543	108	9.855
8	1128	1175	1209	1256	1206	1172	1206	1255	1234	1131	1119	1109	1135	1020	1036	1008	997	988	944	938	890	963	1031	1079	26229	110	9.935
9	1487	1497	1477	1482	1412	1345	1290	1284	1271	1249	1155	1148	1200	1257	1238	1207	1135	1092	1061	962	960	1071	1223	1358	29861	118	10.544
Marzo	3656	3758	3750	3844	3706	3615	3653	3758	3701	3495	3396	3355	3542	3460	3401	3328	3207	3085	2957	2771	2707	2879	3175	3434	81633	336	10.123
10	1359	1284	1279	1294	1245	1214	1196	1182	1238	1213	1112	1038	1005	1030	970	925	936	900	809	759	806	944	1152	1289	26179	104	10.488
11	1095	1171	1271	1319	1344	1260	1223	1269	1293	1244	1147	1103	1055	1044	1021	895	871	897	837	746	781	920	941	1017	25764	107	10.033
12	1026	1112	1142	1159	1186	1167	1148	1106	1101	995	965	952	1039	969	884	863	838	757	683	662	737	781	887	987	23146	102	9.455
Aprile	3480	3567	3692	3772	3775	3641	3567	3557	3632	3452	3224	3093	3099	3043	2875	2683	2645	2554	2329	2167	2324	2645	2980	3293	75089	313	9.996
13	1214	1242	1285	1236	1272	1291	1238	1245	1243	1113	1039	910	991	893	821	750	779	813	709	701	810	883	913	1040	24431	104	9.788
14	1006	1063	1101	1138	1131	1117	1052	1101	1059	1020	960	937	972	976	948	891	812	855	694	724	815	896	961	994	23223	108	8.959
15	1299	1344	1407	1442	1517	1505	1306	1284	1335	1230	1127	1053	1080	1010	997	940	850	876	746	766	857	975	1114	1179	27239	119	9.537
Magg.	3519	3649	3793	3816	3920	3913	3596	3630	3637	3363	3126	2900	3043	2879	2766	2581	2441	2544	2149	2191	2482	2754	2988	3213	74893	331	9.428

Digitized by Google

SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nei mesi di Giugno, Luglio ed Agosto.

DECADI e Mesi	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24\,n}$
1 a	1019	1071	1149	1113	1086	1013	969	922	990	980	990	925	975	946	822	846	783	730	678	687	757	862	908	949	22170	110	8.398
17	1107	1115	1063	1098	1147	1191	1175	1073	1047	1064	973	992	978	859	869	805	767	760	693	692	698	772	915	1034	22887	109	8.749
18	986	1115	1104	1110	1171	1128	1100	1128	1168	1164	1068	1017	975	912	884	838	819	736	666	708	793	821	839	901	23151	109	8.850
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Giugno	3112	3301	3316	3321	3404	3332	3244	3123	3205	3208	3031	2934	2928	2717	2575	2489	2369	2226	2037	2087	2248	2455	2662	2884	68208	328	8.665
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	866	924	1015	1059	1074	1056	1057	1020	1119	1081	959	889	893	809	771	764	750	671	534	561	660	754	784	862	20932	110	7.929
20	929	970	978	997	1073	1119	1185	1143	1134	1067	981	895	987	835	801	792	747	697	566	582	653	769	803	886	21589	105	8.567
21	1109	1155	1199	1232	1263	1334	1339	1349	1311	1299	1199	1131	1017	1009	925	945	892	826	680	642	756	873	967	1069	25521	120	8.861
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Luglio	2904	3049	3192	3288	3410	3509	3581	3512	3564	3447	3139	2915	2897	2653	2497	2501	2389	2194	1780	1785	2069	2396	2554	2817	68042	335	8.463
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	925	968	987	970	950	933	906	969	986	979	868	844	885	890	826	787	744	705	599	547	652	725	785	848	20278	103	8.204
23	866	882	909	947	985	1041	1038	1132	1151	1096	956	850	911	865	851	943	784	745	640	555	633	673	721	751	20925	108	8.073
24	971	963	1006	1041	999	1022	1070	1184	1171	1074	997	960	992	973	986	891	833	809	749	651	651	730	854	914	22491	119	7.875
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Agosto	2762	2813	2902	2958	2934	2996	3014	3285	3308	3149	2821	2654	2788	2728	2663	2621	2361	2259	1988	1753	1936	2128	2360	2513	63694	330	8.042

Digitized by Google

DECADI e Mesi	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento nei mesi di Settembre, Ottobre e Novembre.																								SOMMA	GIORNI di osserv.e	MEDIO
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0	Σ	n	$\frac{\Sigma}{24n}$
25	861	896	958	966	1053	1061	1126	1208	1199	1006	854	837	905	915	824	774	749	742	677	518	566	689	758	832	20974	108	8.092
26	816	844	879	906	918	910	1029	1164	1137	985	890	800	850	830	758	732	730	777	724	651	603	683	779	777	20172	107	7.855
27	841	885	918	882	828	850	912	999	936	840	792	754	791	803	750	731	666	667	677	584	536	582	668	764	18656	103	7.547
Settem	2518	2625	2755	2754	2799	2821	3067	3371	3272	2831	2536	2391	2546	2548	2332	2237	2145	2186	2078	1753	1705	1954	2205	2373	59802	318	7.837
28	860	960	975	942	926	920	1002	1062	997	954	915	835	886	846	786	778	765	817	804	709	641	698	702	791	20571	102	8.403
29	718	734	761	775	734	764	849	873	843	822	794	759	749	773	742	703	650	630	692	628	564	549	621	678	17405	102	7.110
30	891	1005	1020	941	896	955	1016	1009	1006	992	980	940	994	989	984	955	961	940	931	920	829	785	766	841	22546	118	7.943
Ottobr	2469	2699	2756	2658	2556	2639	2867	2944	2846	2768	2689	2534	2629	2608	2512	2436	2376	2387	2427	2257	2034	2032	2089	2310	60522	322	7.832
31	729	754	712	686	675	750	856	885	870	912	951	943	894	839	841	849	875	898	835	775	653	603	665	764	19214	109	7.345
32	845	882	868	816	852	900	930	970	947	952	908	872	891	899	888	888	869	803	844	853	829	743	758	834	20841	107	8.116
33	767	763	712	711	707	734	735	761	788	789	814	835	810	814	804	804	835	839	863	852	816	798	796	819	18966	106	7.455
Novem	2341	2399	2292	2213	2234	2384	2521	2616	2605	2653	2673	2650	2595	2552	2533	2541	2579	2540	2542	2480	2298	2144	2219	2417	59021	322	7.637

Digitized by Google

Mesi e Stagioni	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento in Inverno e Primavera																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.° n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
Dicem.	2374	2262	2234	2097	2083	2176	2215	2326	2396	2500	2460	2498	2522	2677	2574	2531	2485	2494	2410	2371	2415	2290	2217	2187	56794	310	7. 634
Genn.	2323	2296	2264	2143	2049	2150	2290	2419	2497	2541	2493	2558	2709	2634	2578	2539	2573	2505	2381	2289	2284	2196	2173	2230	57114	315	7. 555
Febb.	1912	2034	2061	2090	1993	2045	2242	2419	2412	2358	2390	2329	2577	2501	2442	2403	2387	2294	2293	2232	2004	1753	1847	1879	52897	285	7. 733
Inverno	6609	6592	6559	6330	6125	6371	6747	7I64	7305	7399	7343	7385	7808	7812	7594	7473	7445	7293	7084	6892	6703	6239	6237	6296	I66805	910	7. 637
Marzo	3656	3758	3750	3844	3706	3615	3653	3758	3701	3495	3396	3355	3542	3460	3401	3328	3207	3085	2957	2771	2707	2879	3175	3434	81633	336	10. 123
Aprile	3480	3567	3692	3772	3775	3641	3567	3557	3632	3452	3224	3093	3099	3043	2875	2683	2645	2554	2329	2167	2324	2645	2980	3293	75089	3I3	9. 996
Magg.	3519	3649	3793	3816	3920	3913	3596	3630	3637	3363	3126	2900	3043	2879	2766	2581	2441	2544	2149	2191	2482	2754	2988	3213	74893	331	9. 428
Primavera	10655	I0974	11235	1I432	11401	11I69	10816	I0945	10970	10310	9746	9348	9684	9382	9042	8592	8293	8183	7435	7129	7513	8278	9143	9940	231615	980	9. 848

Digitized by Google

Mesi e Stagioni	SOMMA dei Kilometri percorsi dal vento in Estate e Autunno																								SOMMA Σ	GIORNI di osserv.ne n	MEDIO $\frac{\Sigma}{24n}$
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-0			
Giugno	3112	3301	3316	3321	3404	3332	3244	3123	3205	3208	3031	2934	2928	2717	2575	2489	2369	2226	2037	2087	2248	2455	2662	2884	68208	328	8.665
Luglio	2904	3049	3192	3288	3410	3509	3581	3512	3564	3447	3139	2915	2897	2653	2497	2501	2389	2194	1780	1785	2069	2396	2554	2817	68042	335	8.463
Agosto	2762	2813	2902	2958	2934	2996	3014	3285	3308	3149	2821	2654	2788	2728	2663	2621	2361	2259	1988	1753	1936	2128	2360	2513	63694	330	8.042
Estate	8778	9163	9410	9567	9748	9837	9839	9920	10077	9804	8991	8503	8613	8098	7735	7611	7119	6679	5805	5625	6253	6979	7576	8214	199944	993	8.390
Sett.	2518	2625	2755	2754	2799	2821	3067	3371	3272	2831	2536	2391	2546	2548	2332	2237	2145	2186	2078	1753	1705	1954	2205	2373	59802	318	7.837
Ottob.	2469	2699	2756	2658	2556	2639	2867	2944	2846	2768	2689	2534	2629	2608	2512	2436	2376	2387	2427	2257	2034	2032	2089	2310	60522	322	7.832
Nov.	2341	2399	2292	2213	2234	2384	2521	2616	2605	2653	2673	2650	2595	2552	2533	2541	2579	2540	2542	2480	2298	2144	2219	2417	59021	322	7.637
Autunno	7328	7723	7803	7625	7589	7844	8455	8931	8723	8252	7898	7575	7770	7708	7877	7214	7100	7113	7047	6490	6037	6130	6513	7100	179345	962	7.768

Digitized by Google

Per conoscere il movimento orario, naturalmente bisogna prendere il medio di due quantità adjacenti. Per esempio la velocità kilometrica oraria dell' ora 2, è il medio dei kilometri percorsi da 1 a 2, e da 2 a 3. In inverno i giorni di osservazione completa sono stati 910, quindi il medio aritmetico di due ore contigue si deve dividere per 910, ossia la somma dei kilometri percorsi in due ore adjacenti, si deve dividere per 1820. Per esempio in inverno, la media velocità kilometrica *osservata* dell' ora 1 è,

$$\frac{6609 + 6592}{1820} = 7.253$$

quella dell' ora 2 è,

$$\frac{6592 + 6559}{1820} = 7.226$$

e così di seguito. In questo modo si sono ottenuti, per le quattro stagioni, i valori contenuti nel seguente specchietto (1)

---

(1) Si noti che in questo specchietto, e in quelli che seguono, si è tolta la virgola. Le velocità sono espresse in millesimi di kilometro. Per esempio 7091 significa 7 kilometri e 91 millesimi di kilometro.

Digitized by Google

Velocità kilometrica oraria osservata

Ore	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Ore	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
0	7091	10507	8556	7499	12	8348	9710	8618	7976
1	7253	11035	9034	7823	13	8582	9728	8414	8045
2	7226	11331	9352	8070	14	8465	9400	7972	7840
3	7082	11565	9505	8019	15	8279	8997	7727	7584
4	6843	11650	9725	7907	16	8197	8615	7417	7440
5	6866	11515	9862	8021	17	8098	8406	6948	7387
6	7208	11217	9907	8471	18	7899	7968	6286	7360
7	7643	11103	9949	9036	19	7679	7431	5755	7036
8	7950	11181	10069	9176	20	7470	7470	5981	6511
9	8079	10857	10010	8823	21	7111	8057	6663	6324
10	8100	10232	9464	8394	22	6855	8888	7329	6571
11	8092	9742	8809	8042	23	6886	9736	7951	7075

Escursioni totali della velocità del vento, cioè differenza tra le massime e le minime velocità assolute, nelle quattro stagioni.

Inverno	Primavera	Estate	Autunno
1739	4219	4314	2852

Dagli antecedenti valori osservati, si sono dedotte le formule seguenti, che rappresentano con massima esattezza l' andamento diurno della velocità del vento nelle quattro stagioni.

Digitized by Google

Inverno

$$V = 7.637 + 0{,}7565\ Sen\ (251°\ 37'\ 22'' + H) + 0{,}0954\ Sen\ (50°\ 25'\ 31'' + 2H) + 0{,}0482\ Sen\ (40°\ 45'\ 31'' + 3H) + 0{,}1682\ Sen\ (359°\ 44'\ 40'' + 4H) + 0{,}0311\ Sen\ (234°\ 28'\ 49'' + 5H) + 0{,}0299\ Sen\ (23°\ 59'\ 42'' + 6H)$$

Primavera

$$V = 9.848 + 1{,}7916\ Sen\ (5°\ 6'\ 8'' + H) + 0{,}5444\ Sen\ (27°\ 48'\ 2'' + 2H) + 0{,}2464\ Sen\ (90°\ 53'\ 28'' + 3H) + 0{,}0121\ Sen\ (229°\ 29'\ 4'' + 4H) + 0{,}1441\ Sen\ (183°\ 0'\ 59'' + 5H) + 0{,}0857\ Sen\ (5°\ 24'\ 41'' + 6H)$$

Estate

$$V = 8.388 + 1{,}8388\ Sen\ (351°\ 33'\ 4'' + H) + 6{,}3401\ Sen\ (45°\ 28'\ 35'' + 2H) + 0{,}2962\ Sen\ (96°\ 53'\ 56'' + 3H) + 0{,}0988\ Sen\ (224°\ 27'\ 11'' + 4H) + 0{,}0635\ Sen\ (223°\ 11'\ 37'' + 5H) + 0{,}1030\ Sen\ (2°\ 35'\ 47'' + 6H)$$

Autunno

$$V = 7.768 + 0{,}9442\ Sen\ (328°\ 30'\ 29'' + H) + 0{,}1114\ Sen\ (319°\ 51'\ 15'' + 2H) + 0{,}3090\ Sen\ (63°\ 3'\ 18'' + 3H) + 0{,}2069\ Sen\ (19°\ 36'\ 10'' + 4H) + 0{,}1083\ Sen\ (196°\ 18'\ 9'' + 5H) + 0{,}0349\ Sen\ (208°\ 5'\ 48'' + 6H)$$

Digitized by Google

Con queste formule si sono calcolati i seguenti valori orarî, che sono quelli rappresentati dalle curve delle Tavole I.ª e 2.ª In queste ultime, la retta M parallella alle ascisse, indica il medio corrispondente alla stagione, e le due ordinate N e T denotano il nascere e il tramonto del sole.

Velocità kilometrica oraria calcolata

Ore	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Ore	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
0	7076	10498	8547	7501	12	8368	9704	8585	7997
1	7272	11029	9061	7840	13	8535	9737	8387	8004
2	7245	11333	9339	8046	14	8477	9421	8031	7866
3	7038	11558	9518	8035	15	8306	8948	7666	7595
4	6861	11658	9739	7908	16	8179	8658	7411	7408
5	6892	11507	9876	8008	17	8078	8407	6976	7408
6	7183	11221	9881	8486	18	7920	7933	6263	7364
7	7625	11119	9950	9026	19	7698	7459	5770	7018
8	7984	11150	10105	9172	20	7428	7470	5973	6524
9	8086	10878	9984	8847	21	7123	8044	6660	6319
10	8048	10233	9439	8362	22	6881	8891	7347	6578
11	8130	9737	8867	8056	23	6865	9749	7934	7064

Dopo la raccolta di questi importanti elementi, per completare i dati che ci serviranno alla discussione dell' andamento diurno e annuale della velocità del vento, bisogna premettere le opportune notizie riguardanti i venti impetuosi. Come altra volta ho specificato (1), per l' orizzonte di Modena devono intendersi per venti impetuosi, quelli la di cui velocità kilometrica è di 30

(1) V. l' Opuscolo *I venti impetuosi* ecc.

Digitized by Google

e più kilometri ad ora. Nella tavola seguente trovasi il notamento dei venti impetuosi osservati in Modena da Dicembre 1866 a Novembre 1877. Questa tavola divisa per mesi, contiene nella 1ª colonna l' anno, nella 2ª il giorno, nella 3ª l' intervallo in cui si è osservato il vento impetuoso, nella 4ª la durata del medesimo in ore, nella 5ª la massima velocità kilometrica oraria avvenuta in tale intervallo, nella 6ª il vento corrispondente a questa massima velocità oraria.

Gennajo

1867	14	22-23	1	34	E
	15	3-4	1	38	SE
	»	23-1	2	37	S
	16	2-3	1	32	SW
	31	8-9	1	42	W
	»	12-14	2	33	W
1869	22	3-6	3	36	NE
	»	8-10	2	36	SE
1871	17	15-16	1	30	SE
	18	22-23	1	33	SE
1873	21	10-11	1	38	SW
	»	14-15	1	35	NW
1875	22	6-7	1	32	NW
	26	3-4	1	31	W
	»	5-8	3	32	W
	»	11-13	2	33	W
	30	23-0	1	31	NE
	31	1-5	4	47	NE
1876	4	14-18	4	40	E

Febbrajo

1867	7	5-11	6	36	W
	»	12-15	3	41	W
	13	4-5	1	30	E
1870	21	17-22	5	38	W
1870	21	23-4	5	50	N
1873	1	17-18	1	30	NW
	2	8-10	2	31	NW
1874	1	12-14	2	35	S
	10	5-9	4	60	NE
1875	17	2-3	1	34	SE
	»	18-19	1	33	E
	»	20-23	3	36	NE
	18	1-4	3	36	NE
	»	7-8	1	32	NE
1876	23	22-0	2	36	W
	24	1-2	1	35	W
1877	20	23-0	1	33	W
	27	4-5	1	32	NW
	28	10-11	1	30	W

Marzo

1867	1	3-4	1	34	E
	»	18-20	2	41	E
	»	21-1	4	45	E
	2	3-7	4	39	E
	»	10-11	1	30	E
	»	12-16	4	34	E
	»	18-19	1	31	E
	»	20-22	2	31	E
	8	12-13	1	30	E
	27	9-10	1	31	SE
	28	0-1	1	31	W

Digitized by Google

1868	6	7-8	1	31	W
	»	10-11	1	31	W
	8	14-17	3	33	W
	10	6-7	1	31	W
	18	4-10	6	36	E
	19	5-6	1	30	E
1869	2	21-22	1	31	N
	14	21-23	1	37	NE
	20	22-23	1	33	NW
	26	1-2	1	30	E
	28	2-3	1	30	SE
1870	20	9-14	5	33	E
	24	10-11	1	30	N
	28	22-2	4	39	NE
1871	1	6-7	1	30	NE
	15	15-17	2	33	SW
	28	13-4	15	52	E
	29	23-4	5	44	NE
1872	7	3-4	1	33	SE
	20	8-9	1	32	W
1873	13	1-2	1	31	SE
	17	19-22	3	32	E
	18	0-1	1	36	E
1874	15	0-3	3	34	W
	24	3-4	1	31	NE
1875	4	22-0	2	38	SE
	25	3-5	2	33	NE
	28	15-1	10	45	NE
	29	2-3	1	30	NE
	»	23-0	1	35	NE
1876	7	8-15	7	39	W
	»	16-17	1	34	NW
	8	4-5	1	30	NW
	9	23-0	1	32	SW
	10	1-2	1	35	SW
	»	3-4	1	32	SW
	»	5-6	1	33	SW
	»	7-9	2	42	SW
	11	5-6	1	33	SW
	13	1-2	1	32	SW
	18	1-8	7	49	NE
1876	24	14-15	1	30	NE
	»	23-0	1	31	NE
	25	1-6	5	34	NE
	»	7-9	2	35	NE
1877	7	23-1	2	40	E
	8	3-4	1	30	NE
	»	10-11	1	36	NE
	»	12-16	4	33	NE
	19	23-0	1	31	SE
	21	23-0	1	38	E
	26	22-23	1	31	SW

Aprile

1867	8	20-11	15	52	NE
	9	21-1	3	35	W
	15	22-23	1	32	E
	17	3-4	1	30	W
	22	1-3	2	36	NE
	27	20-21	1	31	NE
	28	5-6	1	30	NE
1868	8	22-4	6	38	SW
	20	10-13	3	49	W
1870	4	22-2	4	34	SE
	11	4-5	1	33	SE
	15	3-9	6	42	SE
	27	2-3	1	30	SW
	28	4-5	1	30	NE
	»	8-9	1	32	E
1871	30	22-1	3	31	NW
1872	4	23-14	15	46	E
	9	0-1	1	35	SE
	21	2-3	1	31	NW
1873	6	16-17	1	32	S
	9	8-9	1	32	NE
	»	13-14	1	37	NE
	»	15-16	1	33	NE
	»	23-1	2	36	E
	16	5-6	1	31	E
	17	0-2	1	32	NE

Digitized by Google

1873	17	4-5	1	30	NE
1874	4	20-4	8	37	SE
	11	5-6	1	30	E
	»	16-21	5	40	NE
	12	5-6	1	31	E
	13	21-5	8	43	NE
	28	1-3	2	33	NE
	»	4-6	2	41	NE
1875	8	3-4	1	31	SW
	9	22-0	2	33	SE
	13	6-11	5	72	NE
	»	23-0	1	43	NE
1876	5	1-3	2	38	NE
	7	21-23	2	38	SE
	12	6-7	1	30	SW
	»	8-9	1	34	S
	16	9-10	1	30	NE
	21	8-9	1	31	NE
	»	11-14	3	35	NE
	24	5-6	1	30	NE
1877	6	23-0	1	30	NW
	9	23-2	3	32	NE
	24	5-6	1	37	SW

Maggio

1867	23	2-7	5	45	SW
	»	18-20	2	44	NW
1868	14	21-0	2	31	E
1869	5	6-7	1	35	NE
	»	8-10	2	34	NE
	29	3-4	1	31	E
1870	2	21-22	1	30	SW
	3	3-4	1	31	NW
	26	8-9	1	31	SE
	»	14-15	1	30	NE
1871	1	2-3	1	30	NW
	»	4-5	1	35	NE
	5	9-10	1	30	E
	17	1-4	3	35	NE
1872	19	2-5	3	34	E
	21	2-3	1	33	E
	»	22-2	4	37	NW
	30	3-4	1	30	W
1873	8	12-15	3	37	W
	»	2-3	1	41	E
	13	13-16	3	38	E
	20	22-23	1	35	E
	30	18-19	1	32	NE
1874	7	2-3	1	31	NE
	15	17-21	4	36	W
1875	11	4-5	1	32	E
	27	5-8	3	41	NE
1876	18	23-0	1	30	NE
	19	1-2	1	32	NE
	23	3-6	3	36	SW
	25	22-23	1	32	SW
	26	5-6	1	31	SW
1877	30	22-23	1	30	SE

Giugno

1867	1	11-12	1	30	NE
	17	4-5	1	30	NE
1868	9	1-2	1	30	NE
	28	11-12	1	45	E
1869	2	2-3	1	30	NE
	10	19-20	1	30	NE
	14	21-4	7	53	S
	29	7-8	1	36	NE
1870	25	9-10	1	35	NW
1871	18	23-0	1	30	SW
	19	2-5	3	40	SW
1873	7	20-22	2	34	E
1874	8	10-11	1	32	NE
	13	7-9	2	42	NE
	»	11-12	1	31	NE
	14	20-22	2	32	NE
	22	1-3	2	38	SW
1875	22	23-0	1	32	NE

Digitized by Google

1875	23	1-2	1	30	NE
	»	4-5	1	30	NE
1876	1	6-7	1	38	SE
1877	1	16-17	1	30	SW
	15	23-0	1	37	NE
	24	20-21	1	33	NE
	26	1-2	1	33	NE

Luglio

1867	6	21-23	2	35	NE
	19	19-20	1	30	E
1870	12	7-8	1	30	NE
1871	24	23-2	3	36	SW
1872	2	21-22	1	30	SE
	4	3-4	1	30	E
1873	19	6-7	1	33	NE
1874	29	13-14	1	30	SE
	30	2-3	1	34	NW
1875	8	23-0	1	33	W

Agosto

1869	10	23-0	1	31	NE
	23	0-1	1	32	NE
	26	7-8	1	30	NE
1870	13	13-14	1	33	E
1871	27	7-9	2	31	NE
	»	11-12	1	30	NE
1872	3	14-16	2	36	W
1874	15	1-2	1	34	NW
1876	31	1-3	2	30	SW
	»	12-13	1	38	SW

Settembre

1867	17	10-11	1	30	NE
	20	5-8	2	45	SW
	26	1-3	2	31	NE
	»	10-11	1	30	NE
1868	19	10-11	1	39	SW
	21	3-4	1	33	NE
	22	9-10	1	31	SE
1869	6	23-0	1	31	NE
1870	7	18-3	9	40	NW
1872	21	0-3	3	35	W
	26	2-5	3	37	SW
1873	7	1-2	1	32	SW
	15	19-20	1	30	SW
1874	7	4-5	1	33	NE
	13	6-9	3	52	E
	»	22-0	2	35	NE
	14	1-5	4	40	NE
1875	2	4-5	1	30	NE
	24	11-13	2	36	NE
	»	14-15	1	30	NE
1876	8	2-6	4	40	SW
	30	23-1	2	40	SW
1877	3	1-2	1	30	SW

Ottobre

1867	3	22-23	1	33	W
	4	0-2	2	36	W
	10	12-13	1	40	NE
	»	14-15	1	30	NE
	21	11-15	4	36	NE
	»	16-17	1	31	NE
	»	18-20	2	31	NE
	28	5-6	1	35	SW
1868	2	17-18	1	36	NE
	3	19-20	1	40	E
	4	3-4	1	32	SE
	18	4-5	1	31	E
	27	18-20	2	48	NE
1869	20	8-12	4	50	NE
	27	0-1	1	34	W
	»	2-4	2	38	W

Digitized by Google

1870	11	4-5	1	31	E
	26	21-22	1	30	W
	27	1-2	1	33	W
1871	2	0-2	2	31	W
1872	4	9-10	1	31	SE
	5	9-11	2	32	E
	»	18-14	1	34	E
	13	18-21	3	42	SE
	19	17-18	1	30	NE
1873	16	10-11	1	32	NE
	28	2-3	1	33	NE
1877	6	1-3	2	35	NE
	»	22-23	1	32	NE
	7	0-2	2	32	NE
	9	3-4	1	32	NE
	»	23-0	1	45	NE

Novembre

1867	9	1-3	2	32	W
	16	16-17	1	32	E
1868	7	3-6	3	36	SE
	»	9-11	2	32	SE
1869	4	18-19	1	33	W
	21	8-9	1	33	NE
	»	10-11	1	31	NE
	»	14-15	1	30	NE
	28	22-2	4	48	W
1870	1	23-1	2	32	NE
	30	21-22	1	30	NE
1871	11	22-0	2	31	SE
	13	1-3	2	33	NE
	17	11-12	1	30	NE
	»	13-18	5	60	NE
1872	10	17-18	1	30	W
	30	18-22	4	33	SE
1873	10	16-19	3	44	NE
1874	19	22-9	11	42	W
1875	11	11-13	2	31	W
	12	1-3	2	39	W
1876	9	23-0	1	35	W
1877	25	10-13	3	36	W

Dicembre

1866	14	15-18	3	35	W
1867	13	0-1	1	32	NE
1868	10	0-4	4	39	E
1869	22	6-7	1	33	SE
1870	1	3-4	1	32	E
	»	9-11	2	43	NE
1871	1	7-8	1	39	SW
	»	12-16	4	41	NW
1872	1	20-22	2	34	SE
	2	0-1	1	31	SE
	»	2-4	2	34	SE
	»	8-10	2	35	S
	»	17-19	2	51	SW
	3	13-14	1	30	E
	9	3-4	1	35	W

Digitized by Google

I risultati di questo registro, sono compendiati nello specchietto seguente:

MESI	Numero totale	di giorno	di notte	Massima durata	Massima velocità	Direzione corrispon. alla massima velocità
Dicembre	15	7	8	4^h	51^{kil}	SW
Gennajo	19	9	10	4	47	NE
Febbrajo	19	12	7	6	60	NE
Marzo	63	43	20	15	52	E
Aprile	49	37	12	15	72	NE
Maggio	33	27	6	5	45	SW
Giugno	25	20	5	7	53	S
Luglio	10	9	1	3	36	SW
Agosto	10	5	5	2	38	SW
Settembre	23	16	7	9	52	E
Ottobre	32	21	11	4	50	NE
Novembre	23	11	12	11	60	NE
Inverno	53	28	25	6	60	NE
Primavera	145	107	38	15	72	NE
Estate	45	34	11	7	53	S
Autunno	78	48	30	11	60	NE
Anno	321	217	104	15	72	NE

Dunque nell' undicennio i venti impetuosi sono stati 321, $^2/_3$ dei quali si sono manifestati di giorno, e solamente $^1/_3$ di notte. In tutto questo intervallo, la massima durata dei venti impetuosi è stata di 15 ore di seguito, e la massima quantità di 72 kilometri ad ora.

Si è veduto che in termine medio annuale, i venti impetuosi sono in maggior numero di giorno anzichè di notte. Ma il rapporto dei venti impetuosi notturni e diurni, varia nelle diverse stagioni. Rappresentando con 100 il numero dei venti im-

Digitized by Google

petuosi avvenuti di notte, il numero di quelli che si verificano di giorno è nelle diverse stagioni il seguente:

Inverno	112
Primavera	282
Estate	309
Autunno	160

La massima prevalenza dei venti diurni avviene dunque in estate. Però anche in primavera sono più che doppî dei diurni. In inverno i venti impetuosi diurni e notturni sono prossimamente in numero uguale, ma questa quasi uguaglianza trovasi nel medio dei tre mesi invernali, giacchè in Dicembre e Gennajo i venti notturni superano in numero i diurni.

Se si prende il medio delle velocità kilometriche orarie contenute nell' antecedente registro, si perviene al seguente notevole risultato:

	Velocità media dei venti impetuosi kil.
Inverno	35, 901
Primavera	34, 614
Estate	33, 488
Autunno	35, 115

Dunque in primavera vi possono essere dei venti impetuosi isolati forniti della massima delle massime velocità, ma in media i venti impetuosi d' inverno hanno la più grande velocità, e quelli di estate la più piccola.

I venti impetuosi di maggior durata avvengono in Aprile (durata media $2^h 63$), quelli di minor durata in Luglio ($1^h 30$). In riguardo alle varie stagioni, la durata media è come segue:

	h
Inverno	1, 98
Primavera	2, 22
Estate	1, 36
Autunno	2, 02

Digitized by Google

Resta ad esaminare l' antecedente registro in relazione alla direzione del vento. Se per ciascuna stagione si fa uguale a 100 il numero totale dei venti impetuosi osservati, questi ultimi sono distribuiti nel modo seguente:

Venti	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
N	1,88	1,38	....	....
NE	16,98	33,79	53,32	46,15
E	13,21	23,45	11,12	8,98
SE	16,98	10,34	6,67	10,26
S	5,66	1,38	2,22	....
SW	7,55	13,10	15,56	11,54
W	26,42	9,66	4,44	21,79
NW	11,32	6,90	6,67	1,28

In inverno adunque i venti impetuosi predominanti sono di W, e nelle altre stagioni sono di NE. L' estate è la stagione del massimo predominio dei venti impetuosi di NE. Siccome sono questi i venti generalmente predominanti nel corso dell' anno, se ne inferisce, che nelle varie stagioni sono i venti d' altronde più frequenti, che, sotto date condizioni, a preferenza divengono impetuosi. Se consideriamo separatamente il semiorizzonte orientale N, NE, E, SE, S da una parte, e dall' altra parte il semiorizzonte occidentale S, SW, W, NW, N, e si fa in ogni stagione uguale a 100 il numero dei venti occidentali, quello dei venti orientali sarà nelle varie stagioni come segue:

	Occidentali	Orientali
Inverno	100	104
Primavera	100	217
Estate	100	254
Autunno	100	189

Ossia in inverno è quasi uguale il numero dei venti impetuosi che vengono dai due semiorizzonti, mentre nelle altre sta-

Digitized by Google

gioni sempre predominano i venti del semiorizzonte orientale, predominio che è massimo in estate.

Finalmente dal registro antecedente ricavasi, che in medio avvengono in ciascun anno 29 casi di venti impetuosi, e che se questo numero si fa uguale a 100, i venti impetuosi sono così distributi nelle varie stagioni:

Inverno	17
Primavera	45
Estate	14
Autunno	24

Restando fermo il principio di ricavare direttamente dalle sole osservazioni le leggi dell'andamento diurno della velocità del vento, ho riputato indispensabile esporre le formule relative alle quattro stagioni, in primo luogo perchè i valori calcolati coincidono quasi con gli osservati, e in secondo luogo per avere occasione di determinare quei massimi e minimi che possono chiamarsi virtuali. Questi ultimi, quantunque non siano massimi e minimi effettivi, riescono di massima utilità perchè corrispondono a punti critici degli elementi meteorologici. In più occasioni difatti ho dimostrato la somma importanza delle semisomme delle epoche di di due inflessioni adjacenti, nelle curve calcolate con la maggiore approssimazione possibile, per la dichiarazione dei fenomeni relativi così al periodo diurno come al periodo annuale, e di ciò in questo scritto si avranno evidenti conferme.

Esaminando le curve calcolate corrispondenti alle quattro stagioni (tav. 1ª e 2ª), a prima giunta sembra che esistano nelle medesime tali confusioni ed irregolarità, da non permettere sicure illazioni sull'andamento del fenomeno. Però una attenta ispezione, ci fa conoscere a mano a mano importanti proprietà del movimento diurno della velocità del vento.

I massimi e minimi effettivi che presentano le figure, e che direttamente ricavansi dalle formule, sono i seguenti:

Digitized by Google

(S)

STAGIONI	Max.	min.	Max.	min.	Max.	min.	Max.	min.
	h	h	h	h	h			h
Inverno . .	1.38	4.35	9.23	9.82	13.24	—	—	22.57
Primavera .	3.90	7.27	7.60	12.00	12.59	—	—	19.48
Estate . .	—	—	8.06	—	—	—	—	19.21
Autunno . .	2.45	4.06	7.81	12.39	12.55	—	—	20.94

Si vede dunque che in inverno, primavera ed autunno, vi sono in un giorno tre massimi effettivi e tre minimi effettivi, e che solamente in estate manifestasi un solo massimo e un solo minimo. Una più attenta disamina ci fa scorgere, che realmente i massimi e minimi diurni sono otto in tutte le stagioni, ma che in taluni casi, indicati nello specchietto antecedente con le lineette —, non sono massimi e minimi effettivi, ma semplici sinuosità, più o meno sensibili, delle curve esattamente calcolate, sinuosità che non sono accidentali, come vedremo, ma corrispondono a cause naturali molto distinte. Insomma in tutto l' anno esistono nel corso del giorno otto azioni particolari, che tendono alternativamente ad accrescere e a diminuire la velocità del vento. Però in una data epoca, giammai le otto azioni anzidette operano con eguale energia. Mentre una di esse produce i suoi massimi effetti, altre si appalesano con effetti secondarï, altre si manifestano per una semplice tendenza a una fase speciale, altre si trovano in uno stato transitorio di quiescenza.

Si vedrà appresso che i vuoti dello specchietto (S), sono riempiti al posto corrispondente, dalle semisomme delle inflessioni, in modo da armonizzare completamente con l' andamento complessivo degli altri massimi e minimi, che sono più forti, e che manifestansi con una effettiva cresta della curva, e coi quali formano rispettivamente un sistema. Taluni massimi e minimi

Digitized by Google

effettivi sono vicinissimi, cioè si succedono quasi immediatamente l' uno all' altro, mentre altri sono discosti di più ore. Però nel corso del giorno vi è in tutto l' anno, un sistema di massimi e un sistema di minimi, che possono dirsi fondamentali. Questi due sistemi, che 15 volte sopra 24, sono massimi dei massimi e minimi dei minimi, sono il 2° Massimo ed il 4° minimo, i quali distano fra loro quasi esattamente di 12 ore.

Si è detto che le semisomme delle epoche delle inflessioni adjacenti, vengono a completare lo specchietto (S), riempendo i vuoti che trovansi nelle colonne 1, 2, 4, 5, e le colonne 6 e 7, in modo che si conosce che nel corso del giorno vi sono in tutto l' anno, tra effettivi e virtuali, quattro massimi e quattro minimi. Nella sola estate manifestasi una piccola e trascurabile anomalia, giacchè in essa, oltre a questi otto massimi e minimi, che armonizzano coi corrispondenti valori del resto dell' anno, la curva manifesta impercettibili sinuosità tra le 10 mattina e le 3 p. m, cioè nelle ore più calde del giorno. Questo fatto è consentaneo alle nozioni che possediamo sulla mobilità delle molecole aeree prodotta dalla rarefazione, e sulle forti correnti ascendenti che si formano nelle ore più calde dell' epoca estiva.

Si è dichiarato che la confusione ed irregolarità che mostrano le curve anemometriche è apparente, e che, bene interpretate, ogni parte delle medesime ci rivela una conoscenza importante. Eccone taluni esempi.

Le quattro curve delle Tav. 1ª e 2ª hanno di comune, che il nascere del sole, che è anche l' epoca della temperatura minima, è a poca distanza seguito da un minimo di velocità. Questa distanza è in inverno di $3^h,3$, in primavera di $2^h,2$, in estate di $2^h,6$, in autunno di $2^h,4$. I minimi di velocità che seguono a poca distanza il nascere del sole, sono in ogni stagione i minimi dei minimi.

Hanno anche di comune, che il tramonto del sole è seguito a poca, ma più variabile distanza, da un massimo di velocità. Questa distanza è in inverno $4^h,5$ ma si riduce in primavera a

Digitized by Google

$0^h,9$, in estate a $0^h,7$, e poi crescendo nuovamente diviene in autunno $2^h,3$. Questi massimi che seguono a poca distanza il tramonto del sole, sono massimi dei massimi solamente in estate ed in autunno.

Le quattro curve hanno anche di comune, che le due ore del giorno in cui la velocità del vento è uguale alla media, sono distanti l' una dall' altra prossimamente di 12 ore. In estate queste due ore sono vicine al mezzodì e alla mezzanotte.

La curva relativa alla estate, rende evidente l' azione esclusiva del sole sulla velocità del vento in questa stagione. Di giorno, dopo il minimo, la velocità va gradatamente crescendo, e di notte, dopo il massimo, va gradatamente diminuendo. In inverno si rende ostensibile un' altra azione occulta, che influisce sulla velocità del vento. Difatti in prossimità al tramonto del sole, la velocità che era in fase discendente, non continua a decrescere, ma invece aumenta sino a un' ora del mattino. Di giorno, la velocità che verso un' ora della sera era in fase ascendente, continuando a trovarsi il sole sopra l' orizzonte non segue a crescere, ma invece diminuisce sino alle 4 della sera.

Potrebbe credersi che l' elevazione della curva notturna della velocità del vento nei mesi freddi, sia dovuta all' azione dei venti impetuosi, che in inverno sono di notte più numerosi che di giorno, e hanno la massima velocità annuale. Crediamo invece, permutando la causa in effetto, che esiste nelle lunghe notti invernali una azione da determinarsi, che accresce generalmente la velocità del vento, azione che tra le altre cose determina la maggior quantità dei venti impetuosi relativamente al giorno, e che rende più forti del consueto quei venti impetuosi che si manifestano nelle notti invernali. Questa opinione è corroborata dal fatto, che l' ora del massimo assoluto nelle notti invernali (Dicembre, Gennajo, Febbrajo) non è un avvenimento isolato, ma, come appresso si mostrerà, fa parte di un sistema (V^a Efficienza) che ricorre in tutto l' anno, manifestandosi ora con un massimo secondario, come in Marzo, Agosto ed Ottobre (mesi in

Digitized by Google

cui di giorno il numero dei venti impetuosi è doppio di quelli che avvengono di notte), ora con forti inflessioni. Questo sistema, ovvero questa efficienza, producente massimi di velocità, trascorrendo l'anno diviene nelle notti invernali sede di un *maximum maximorum*, appunto in conseguenza della causa occulta che accresce nelle lunghe notti invernali la velocità del vento. D'altronde questa ultima è maggiore di notte, relativamente al giorno, non solo in inverno, ma tranne la primavera, anche nelle altre stagioni. Difatti la velocità media del vento, di giorno e di notte, è nelle varie stagioni la seguente:

	Di notte	Di giorno	Not. — Gior.
Inverno . . .	7,967	7,125	+ 0,842
Primavera . .	9,817	9,858	— 0,041
Estate . . .	8,673	8,189	+ 0,484
Autunno . . .	8.114	7,350	+ 0,764

Le stesse quantità si ottengono così coi valori calcolati come con gli osservati. Da ciò si ricava il fatto abbastanza notevole, che la velocità del vento è quasi sempre maggiore di notte che di giorno. La velocità media del vento diurno in inverno, estate ed autunno, è di giorno inferiore alla media generale della stagione, e di notte superiore. In primavera così la velocità media diurna, come la velocità media notturna, sono uguali alla media generale della stagione.

Dopo questo esame delle curve calcolate relative alle quattro stagioni, ci faremo a considerare le condizioni dei singoli mesi. Le quantità corrispondenti trovansi, per ogni mese, nelle ultime quattro tabelle numeriche, ricavando col solito metodo le velocità kilometriche orarie. Per esempio in Settembre i giorni di osservazione furono 318, e la somma dei kilometri percorsi dal vento fu

1954 da 21^h a 22^h
2205 da 22^h a 23^h

Digitized by Google

Quindi la velocità kilometrica oraria *osservata*, è per l' ora 22 in settembre

$$\frac{1954 + 2205}{2 \times 318} = 6.539$$

Tutti questi valori osservati trovansi nel quadro seguente ove *M* indica il massimo assoluto, ed *m* il minimo assoluto.

Velocità kilometriche orarie mensili osservate

Ore	Dicembre	Gennajo	Febbrajo	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre
0	7356	7227	6651	10550	10820	10169	9140	8539	7992	7690	7421	7388
1	7477	7332	6923	11033	11257	10828	9776	8885	8447	8086	8025	7360
2	7252	7238	7184	11172	11596	11242	10087	9315	8659	8459	8470	7284
3	6985	6995	7282	11301*M*	11923	11494	10117	9672	8879	8662	8407	6995
4	6742*m*	6654*m*	7163	11235	12056*M*	11686	10251	9997	8927	8731	8096	6905
5	6769	6665	7084	10895	11847	11832*M*	10268*M*	10327	8985	8836	8067	7171
6	7082	7048	7521	10815	11514	11343	10024	10582	9106	9258	8550	7616
7	7324	7475	8177	11028	11380	10915	9706	10587*M*	9544	10123	9023*M*	7977
8	7616	7803	8475	11100	11484	10977	9646	10561	9989*M*	10445*M*	8991	8107
9	7897	7997	8368	10708	11316	10574	9776	10464	9783	9596	8717	8165
10	8000	7990	8330	10255	10714	9802	9511	9830	9045	8439	8474	8270*M*
11	7997	8017	8279	10070	10091	9103	9093	9036	8295	7747	8110	8265
12	8097	8360	8607	10263	9891	8977	8936	8675	8245	7763	8017	8144
13	8385	8481*M*	8909*M*	10420	9812	8946	8605	8284	8358	8009	8132	7992
14	8469*M*	8273	8672	10210	9454	8527	8067	7687	8168	7673	7950	7896
15	8234	8122	8500	10013	8879	8077	7719	7460	8006	7184	7683	7879
16	8090	8114	8403	9725	8511	7586	7406	7298	7548	6890	7472	7950
17	8031	8060	8212	9363	8305	7530	7005	6840	7000	6810	7396	7949
18	7910	7756	8047	8991	7800	7089	6498	5931	6435	6628	7475	7891
19	7711	7413	7939	8524	7182	6556*m*	6287*m*	5321*m*	5668	6024	7273	7798
20	7719	7259	7432	8152*m*	7174*m*	7059	6608	5752	5589*m*	5437*m*	6663	7419
21	7589	7111	6591	8312	7938	7909	7169	6664	6158	5753	6314*m*	6897
22	7269	6935	6316*m*	9009	8986	8674	7800	7388	6800	6539	6399	6775*m*
23	7103	6989	6537	9835	10021	9367	8454	8016	7383	7198	6831	7199

Digitized by Google

Pei singoli mesi, ad oggetto di procedere più rigorosamente, prenderemo per base delle nostre ricerche i valori direttamente somministrati dalla osservazione. Abbiamo fatto precedere la discussione delle curve calcolate delle quattro stagioni, come si è detto, per le opportune dilucidazioni che ne risultano. La tavola 3ª contiene i diagrammi mensili, giusta le quantità contenute nell' ultimo quadro. A prima giunta queste curve mensili si presentano con molta confusione ed irregolarità. Però dietro attenta disamina, si giunge a trovare le leggi fondamentali di questo fenomeno.

In tutto il corso dell' anno esistono, come si è esposto, otto azioni particolari alternanti, quattro delle quali producono i massimi della velocità del vento, mentre le altre quattro determinano i minimi della medesima. Queste azioni le chiamo convenzionalmente col nome di *efficienze*.

Le efficienze in discorso hanno la singolare proprietà, che trascorrendo il periodo annuale da un capo all' altro, cioè dal 1 Gennajo al 31 Dicembre, gradatamente modificansi, così per l' ora in cui si manifestano, come per la intensità con cui agiscono. Una sola esercita potentemente la sua azione in tutto il corso dell' anno. Le altre si trasformano quasi incessantemente da un mese all' altro, e sono bisognevoli i più delicati artifici del calcolo per iscorgerne l' effetto in quelle curve mensili in cui sono di debolissima intensità, o in assoluta quiescenza. Talune producono in qualche mese, o in una serie di mesi, il massimo dei massimi o il minimo dei minimi, ma nei mesi seguenti, prima generano massimi o minimi secondari, e ulteriormente perdono quasi del tutto la loro energia, per un' intervallo più o meno lungo, per poi successivamente riprenderla a gradi. Quando non producono massimi o minimi secondari, generalmente se ne scorge l' effetto nelle curve mensili, ne' luoghi corrispondenti, per mezzo di sensibili sinuosità delle curve medesime. Esamineremo successivamente queste otto efficienze, e per essere più esatti, in quei casi in cui l' effetto delle medesime si appalesa

Digitized by Google

per mezzo di inflessioni, ricaveremo le epoche critiche dalle formule sopra esposte, calcolate sino al sesto termine, relative alle quattro stagioni.

I.ª Efficienza (*Max.*)

La prima efficienza è rappresentata dalla formula

$$\begin{aligned} I = 3^h,00 &+ 2^h,226\ Sen\ (290°\ 52' + M) \\ &+ 0^h,333\ Sen\ (\ 0°\ \ 0' + 2M) \\ &+ 0^h,235\ Sen\ (\ 0°\ \ 0' + 3M) \end{aligned}$$

ove M è contato a partire dal principio dell' anno. Pei dodici mesi si ottiene:

	h	
Gennajo	1, 54	
Febbraio	2, 59	
Marzo	3, 23	*
Aprile	3, 97	*
Maggio	4, 87	*
Giugno	5, 22	*
Luglio	4, 80	
Agosto	4, 07	
Settembre . . .	3, 11	
Ottobre	1, 69	
Novembre . . .	0, 47	
Dicembre	0, 44	

È apposto un asterisco a quelle ore alle quali corrisponde un massimo dei massimi. L'ora di questa efficienza è massima (cioè più lontana dal mezzodì) al solstizio di estate, minima al solstizio di inverno, e quasi uguale al medio annuo negli equinozi di primavera e di autunno. Essa tende ad accrescere la velocità del vento. E difatti osservando i diagrammi della tavola 3ª vedesi che nelle

Digitized by Google

ore somministrate da questa formula vi è un massimo nella velocità del vento. Anzi nei quattro mesi di Marzo, Aprile, Maggio e Giugno, questo massimo è il *maximum maximorum*. Nei mesi di Agosto e Settembre, l' effetto di questa efficienza si rende manifesto nella curva della velocità per mezzo di una piccola sinuosità. Nel solo mese di Luglio non se ne scorge l' effetto, in conseguenza delle anomalie che, come sopra si è dimostrato, manifestansi nei mesi più caldi dell' anno, sotto la sferza dei raggi solari, per la rarefazione dell' aria e per le correnti ascendenti.

Questa prima efficienza è nei due equinozi coincidente con l' epoca della massima temperatura. Nel semestre da Marzo ad Agosto la segue, col massimo ritardo al solstizio di estate. Nel semestre da Settembre a Febbrajo la precede, col massimo avanzo al solstizio d' inverno. Però in media l' epoca di questa prima efficienza, coincide con quella della massima temperatura, giacchè quest' ultima, in termine media annuale, è in Modena a $2^h,90$, e la formola dà per l' epoca media della prima efficienza $3^h,00$. Questa efficienza coincide nel solstizio di estate con l' epoca del minimo barometrico della sera, ma la precede in tutto il corso dell' anno, con la massima precedenza al solstizio d' inverno. In modo che le due epoche sempre più si allontanano da Giugno a Dicembre, e sempre più si avvicinano da Dicembre a Giugno. Il medio annuale del minimo barometrico della sera è in Modena $4^h,42$.

II.ª Efficienza (*min.*)

La seconda efficienza è rappresentata dalla formula:

$$\begin{aligned} II = 5^h,72 &+ 1^h,644\ Sen\ (293°\ 6' + M) \\ &+ 0^h,102\ Sen\ (265°\ 31' + 2M) \\ &+ 0^h,061\ Sen\ (347°\ 46' + 3M) \end{aligned}$$

dalla quale pei singoli mesi ricavansi le ore seguenti:

Digitized by Google

	h	
Gennajo	4, 37	*
Febbrajo	5, 15	
Marzo	6, 01	
Aprile	6, 78	
Maggio	7, 29	
Giugno	7, 32	
Luglio . . , . .	6, 89	
Agosto . . . · .	6, 28	
Settembre	5, 61	
Ottobre	4, 85	
Novembre	4, 17	
Dicembre	3, 96	*

Questa efficienza che tende a diminuire la velocità del vento, è in relazione, come l'antecedente, con la posizione del Sole nella sua orbita, perchè l'ora della medesima è massima (cioè più lontana dal mezzodì) al solstizio di estate, minima al solstizio di inverno, e media, molto prossimamente, agli equinozi di primavera e di autunno.

Comparando le ore di questa efficienza coi diagrammi, si vede che esse corrispondono mirabilmente ai primi minimi delle curve anemometriche diurne mensili. In Luglio, Agosto e Settembre, corrispondono a questa efficienza sensibili inflessioni. Questa seconda efficienza è distante in medio dalla prima di $2^h, 72$. Però la minima differenza $2^h, 09$ succede in Luglio, e la massima $3^h, 70$ in Novembre.

III.ª Efficienza (*Max.*)

La terza efficienza è rappresentata dalla formula:

$$\begin{aligned} III = {} & 8^h,58 + 1^h,084\ Sen\ (\ 96°\ 43' + M) \\ & + 0^h,960\ Sen\ (126°\ 23' + 2M) \\ & + 0^h,374\ Sen\ (108°\ 23' + 3M) \end{aligned}$$

Digitized by Google

La terza efficienza tende ad accrescere la velocità del vento. Da questa ultima formola si ricavano i seguenti valori pel secondo massimo:

	h	
Gennajo	10, 17	
Febbraio	8, 38	
Marzo	7, 61	
Aprile	8, 10	
Maggio	8, 44	
Giugno	8, 13	
Luglio	7, 82	*
Agosto	7, 70	*
Settembre	7, 64	*
Ottobre	8, 24	*
Novembre	9, 81	*
Dicembre	10, 95	

A differenza di tutte le altre efficienze, che nel loro andamento annuale seguono una curva a un solo massimo e un solo minimo, questa terza efficienza corrisponde ad una curva annuale a due massimi e due minimi. I due massimi dei tempi sono ai due solstizî, e i due minimi ai due equinozi.

Confrontando coi diagrammi, si scorge che vi è esatta coincidenza, per dieci mesi consecutivi, tra i massimi effettivi, e quelli desunti da questa formola. Solamente in Dicembre e Gennajo non si scorge nelle curve l'effetto di questa efficienza, perchè vicinissimo a quello della 4.ª efficienza che tende a diminuire la velocità del vento.

Esaminando i diagrammi, si vede che questa terza efficienza è così energica da produrre il *maximum maximorum* nei mesi di Luglio, Agosto, Settembre, Ottobre e Novembre.

Questa terza efficienza è in termine medio posteriore di $2^b, 50$ al tramonto del sole, e coincidente col secondo medio diurno della temperatura.

Digitized by Google

IV.ª Efficienza (*min.*)

Delle otto efficienze, talune appartengono ad una classe particolare di azioni, le quali o richiedono un numero considerevole di anni di osservazione per essere nettamente ostensibili nelle curve, ovvero realmente corrispondono a una specie di tendenza al massimo o al minimo, e che in tutti i casi, come è confermato da molte prove, sono poste in chiaro evidentemente dalle semisomme delle inflessioni. Si sà che il massimo è preceduto da un cambiamento di segno delle seconde differenze da + a —, e seguito da un cambiamento di segno delle medesime da — a +. La semisomma delle epoche di questi due cambiamenti, talvolta corrisponde a un massimo effettivo della curva, talvolta però a una tendenza, più o meno pronunziata, della medesima al massimo. Lo stesso, con segno contrario, si dica pel minimo. Queste semisomme riescono sempre di molto vantaggio nella discussione delle leggi cui obbediscono i fenomeni meteorologici. Le quattro efficienze 4. 5. 6. 7, sempre nettamente somministrate dalle semisomme in discorso, corrispondono in taluni casi a massimi effettivi (che sono tre volte massimi dei massimi), o a minimi effettivi, e in taluni altri casi sono indicati da una tendenza della curva, ai posti corrispondenti, al massimo o al minimo.

La quarta efficienza è molto singolare, per la specialità di essere indipendente o quasi indipendente, dalla epoca dell'anno. Essa difatti si manifesta quasi nell' ora medesima in tutto l'anno. In sette delle curve mensili (Gennajo, Febbrajo, Marzo, Agosto, Settembre, Ottobre, Dicembre) essa corrisponde, come ricavasi dalla tavola dei diagrammi (Tavola 3.ª), a effettivi minimi secondari.

Le curve (Tav. 1.ª e 2.ª) relative alle quattro stagioni, calcolate per mezzo della formula Besseliana a sei termini, somministrano per le ore delle inflessioni corrispondenti alla quarta efficienza le quantità seguenti:

Digitized by Google

		Inverno	Primavera	Estate	Autunno
		h	h	h	h
Istante del cambiamento di segno nelle 2.e diff.e	Da — a +	9, 54	9, 71	10, 09	9, 47
	Da + a —	11, 69	12, 16	12, 35	12, 31
Semisomma = IV Efficienza		10, 61	10, 93	11, 22	10, 89

Questo minimo, che talvolta è effettivo (7 volte sopra 12), talvolta manifestasi per mezzo di una semplice sinuosità della curva, è quasi all'ora medesima in tutto l'anno, (cioè in numeri rotondi alle 11 della sera) come ricavasi dalle semisomme delle inflessioni, e dai diagrammi dei sette mesi anzidetti. Il confronto con lo specchietto (S), ci offre un'esempio di un fatto di cui in appresso faremo cenno, e del quale tratteremo in altra occasione, cioè della non coincidenza che talvolta verificasi, per condizioni da determinarsi e degne di attenzione, tra le semisomme e i massimi effettivi. Questa quarta efficienza è in relazione col primo massimo barometrico.

V.ª Efficienza (*Max.*)

Il medesimo carattere, e anche in modo più spiccato, manifestasi nella quinta efficienza. Dalle formole delle quattro stagioni ricavasi

		Inverno	Primavera	Estate	Autunno
		h	h	h	h
Istante del cambiamento di segno nelle 2.e diff.e	Da + a —	11, 69	12, 16	12, 35	12, 31
	Da — a +	14, 72	14, 46	14, 08	14, 61
Semisomma = V Efficienza		13, 20*	13, 31	13, 21	13, 46

Dunque in numeri rotondi sempre a un'ora del mattino. I diagrammi della tavola 3.ª ci fanno conoscere che questa efficienza in sette mesi corrisponde a un massimo effettivo, e in tre (Dicembre, Gennajo, Febbraio) a un massimo dei massimi.

Digitized by Google

La proprietà delle due efficienze IV e V è molto singolare, ma non è nuova in meteorologia. Per esempio l'ora del medio serotino della temperatura è in Modena in inverno $8^h, 5$, primavera $8^h, 5$ estate $8^h, 8$, autunno $8^h, 6$, ossia è in tutto il corso dell'anno quasi all'ora medesima. Ma anche il primo massimo barometrico oscilla in Modena tra limiti ristrettissimi, avendo ritrovato in Modena per l'inverno $10^h, 6$, la primavera $11^h, 2$, l'estate $11^h, 3$, l'autunno $10^h, 8$, anno $10^h, 9$.

VI.ª Efficienza (*min.*)

Bisogna ricorrere alle formole delle quattro stagioni per avere una conferma di questa efficienza.

		Inverno	Primavera	Estate	Autunno
Istante del cambiamento di segno nelle 2.e diff.e	Da — a +	h 14, 72	h 14, 46	h 14, 08	h 14, 61
	Da + a —	16, 31	16, 11	15, 38	16, 81
Semisomma = VI Efficienza		15, 51	15, 28	14, 73	15, 71

Le due efficienze I e VI sono in relazione coi due minimi diurni del barometro. Si ha difatti:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
Eff. VI — Eff. I	h 14, 0	h 11, 3	h 10, 0	h 13, 9
2.° min. bar. — 1.° min. bar.	14, 4	11, 4	10, 0	13, 1

VII.ª Efficienza (*Max.*)

Dalle formole delle quattro stagioni ricavasi:

		Inverno	Primavera	Estate	Autunno
Istante del cambiamento di segno nelle 2.e diff.e	Da + a —	h 16, 31	h 16, 11	h 15, 38	h 16, 81
	Da — a +	20, 36	17, 63	17, 56	19, 34
Semisomma = VII Efficienza		18, 33	16, 87	16, 47	18, 07

Digitized by Google

Relativamente alle efficienze VI e VII, vedi nella tavola 3.ª i diagrammi dei mesi di Ottobre e Novembre.

Le due efficienze II e VII sono in relazione con le lunghezze delle notti. Si ha difatti:

	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
	h	h	h	h
Eff. VII — Eff. II	13, 8	10, 2	9, 6	13, 2
Lunghezza della notte	14, 6	10, 6	9, 2	13, 0

VIII.ª Efficienza (*min.*)

L'ottava efficienza è la più notevole, perchè non manca mai in tutto il periodo annuale, perchè in dieci mesi consecutivi corrisponde alla medesima il *minimum minimorum* della velocità del vento, e perchè è sempre di 12 ore equidistante dalla terza efficienza. Questa ottava efficienza, che tende a diminuire la velocità del vento, è rappresentata dalla formula

$$\begin{aligned} VIII = {} & 20^h,58 + 1^h,898\ Sen\ (101°\ 33' + M) \\ & + 0^h,440\ Sen\ (\ 79°\ \ 7' + 2M) \\ & + 0^h,120\ Sen\ (\ \ 0°\ \ 0' + 3M) \end{aligned}$$

dalla quale pei varî mesi si ricavano i seguenti valori:

	h	
Gennajo	22, 78	
Febbraio	21, 63	*
Marzo	20, 28	*
Aprile	19, 40	*
Maggio	19, 00	*
Giugno	18, 94	*
Luglio	19, 21	*
Agosto	19, 70	*
Settembre . . .	20, 22	*
Ottobre	20, 93	*
Novembre . . .	22, 00	*
Dicembre	22, 90	

Digitized by Google

L'ora di questa efficienza è massima al solstizio di inverno, e minima al solstizio di estate. L'epoca è uguale nei due equinozî.

Confrontando coi diagrammi si vede, che le ore ricavate da questa formola sono esattamente quelle in cui avviene nei varî mesi un minimo di velocità, anzi per dieci mesi di seguito, da Febbraio a Novembre, questa efficienza produce il minimo dei minimi. Questa 8.ª efficienza è in termine medio posteriore di $2^h,66$ al nascere del Sole, e di $0^h,80$ anteriore al primo medio diurno della temperatura.

Prima di passare avanti esporrò talune considerazioni sulle efficienze sopra considerate. Queste efficienze si distinguono l'una dall'altra per le loro proprietà caratteristiche. Talune hanno un'azione molto pronunziata in una parte dell'anno, azione che gradatamente si indebolisce, per poi ritornare gradatamente alla primitiva intensità. Ma l'estensione delle varie fasi, cioè la durata dei massimi e minimi effettivi, e quella dei massimi e minimi virtuali, cambia nelle varie efficienze. Due sole si manifestano incessantemente in tutto il periodo annuale, con massimi e minimi effettivi, e sono le III e VIII, che chiamo fondamentali, anzi l'ultima si mantiene molto prossimamente di forza costante in tutto il corso dell'anno. Diversificano ancora in ciò, che sono rappresentate, nel loro corso annuale, relativamente all'ora in cui manifestansi, talune da una linea prossimamente retta, altre da una curva a un massimo e un minimo, e una sola da una curva a due massimi e due minimi.

Vi è una notevole differenza tra i massimi e i minimi sotto il punto di vista, che mentre i minimi dei minimi quasi tutti sono prodotti dalla ottava efficienza, e due solamente (quelli di Dicembre e Gennajo) dalla seconda, i massimi dei massimi al contrario vagano tra limiti molto più estesi. Quelli dell'inverno appartengono alla quinta efficienza, quelli della primavera e principio dell'estate alla prima, e quelli della fine dell'estate e dell'autunno alla terza.

Digitized by Google

Sei delle otto efficienze sono legate fra loro da una legge semplicissima. I medî annuali delle medesime, sono a due a due distanti tra loro quasi di 12 ore. Ciò si verifica per le seguenti:

I ($3^h,00$) e VI ($15^h,31$)
II ($5^h,72$) e VII ($17^h,43$)
III ($8^h,58$) e VIII ($20^h,58$)

Rimangono le due efficienze IV ($10^h, 91$) e V ($13^h 29$), la prima delle quali è in relazione evidentemente col primo massimo diurno del barometro, mentre la V si riferisce ai notevoli fenomeni che presenta il barometro nell' ora corrispondente, massime nei mesi invernali, fenomeni sui quali il sig. Rykatchew ha per la prima volta attirato l'attenzione dei meteorologisti (1).

Le efficienze II e V hanno una singolarità che le rende degne di attenzione. Traversando il periodo annuale, sono di nullo o di debole effetto nella calda stagione, ma agiscono poderosamente in inverno. Insomma queste due azioni trovano, per così dire, nella fredda stagione tutte le condizioni propizie al loro libero svolgimento, tanto che si manifestano allora con caratteri opposti a quelli generalmente predominanti nell'anno. Difatti i massimi dei massimi invernali prodotti dalla V efficienza, avvengono nel cuor della notte, e i minimi dei minimi invernali prodotti dalla II efficienza, sono i soli che si allontanano dalla legge generale, sopra specificata, pei min^m min^m ($N\odot + 2^h, 66$). Le efficienze VI e VII sono le sole che più si mostrano povere di massimi e minimi effettivi, che si riducono per ciascuna a 3 sopra 12, ma quasi in tutto l'anno non mancano, nei luoghi corrispondenti, sinuosità più o meno pronunziate nelle curve anemometriche. Dippiù sono le sole, che nei pochi massimi e minimi effettivi che manifestano, presentano sensibili oscillazioni, e anche

(1) V. Annuario della Società Meteorologica Italiana Vol. I, pag. 97, 139, 206.

Digitized by Google

sensibili differenze coi valori dedotti dalle formole delle quattro stagioni. Però l'esistenza di queste due efficienze non può mettersi in dubbio, pei massimi e minimi effettivi che ad esse appartengono, per le semisomme corrispondenti delle formole delle quattro stagioni, per le sinuosità delle curve mensili ai posti relativi, e per l'evidente legame che le unisce alla I e II.

Nelle trentasei tabelle numeriche sopra esposte, trovansi i medî finali delle trentasei decadi. Questi medî non possono usarsi immediatamente pel calcolo della formola Besseliana. Essi devono munirsi di due successive correzioni, che sono la prima per ridurre ciascun medio al *mezzo* della decade corrispondente, e la seconda per ridurre le trentasei quantità così ottenute, a trentasei epoche esattamente equidistanti nel corso dell'anno. Per amor di brevità omettiamo tutta la farragine di cifre che è necessaria per questa doppia correzione, ed anche perchè dovremo fra non molto, in apposito lavoro, svolgere la parte teorica relativa a queste correzioni, insieme coi corrispondenti esempî numerici. Eseguite tutte le operazioni, e apposte le cennate correzioni ai valori osservati, trovasi la seguente espressione generale dello andamento annuale della velocità del vento in Modena.

$$\begin{aligned} V = 8^{k},408 &+ 1^{k}.0491\ \mathit{Sen}\ (328^{\circ}\ 36'\ 29'' + M) \\ &+ 0^{k},5568\ \mathit{Sen}\ (253^{\circ}\ 45'\ 8'' + 2M) \\ &+ 0^{k},4109\ \mathit{Sen}\ (187^{\circ}\ 46'\ 37'' + 3M) \end{aligned} \qquad N$$

Da questa formola, facendo uso delle quantità angolari M, contenute a pag. 9 della Memoria *Sulle variazioni non periodiche della pressione atmosferica*, si ottengono i valori di V per ogni giorno dell'anno contenuti nella tabella seguente.

Digitized by Google

Velocità Kilometrica Oraria Normale per ogni giorno dell'anno.

Gennajo				Febbrajo				Marzo			
Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità	Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità	Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità
		1	7266			1	7612			1	9024
		2	7256		7	2	7648			2	9079
	1	3	7248			3	7686			3	9134
		4	7240			4	7725		13	4	9189
		5	7233			5	7766			5	9243
		6	7227			6	7808			6	9297
		7	7222		8	7	7852			7	9350
	2	8	7219			8	7897			8	9402
		9	7217			9	7943		14	9	9454
		10	7217			10	7991			10	9504
1			**7234**	4			**7793**	7			**9268**
		11	7218			11	8039			11	9553
		12	7221		9	12	8089			12	9601
	3	13	7225			13	8139			13	9648
		14	7231			14	8190		15	14	9694
		15	7238			15	8242			15	9738
		16	7247			16	8295			16	9781
		17	7258		10	17	8349			17	9823
	4	18	7270			18	8404			18	9863
		19	7283			19	8460		16	19	9901
		20	7298			20	8516			20	9937
2			**7249**	5			**8272**	8			**9754**
		21	7315			21	8572			21	9972
		22	7333		11	22	8629			22	10005
	5	23	7353			23	8686			23	10036
		24	7375			24	8742		17	24	10066
		25	7400			25	8799			25	10094
		26	7425			26	8856			26	10120
		27	7453		12	27	8912			27	10145
	6	28	7482			28	8968			28	10167
		29	7512						18	29	10188
		30	7544							30	10206
		31	7577							31	10222
3			**7434**	6			**8770**	9			**10111**
Media mensile . .			**7.310**	Media mensile . .			**8.243**	Media mensile . .			**9.724**

Digitized by Google

Velocità Kilometrica Oraria Normale per ogni giorno dell' anno.

Aprile				Maggio				Giugno			
Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità	Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità	Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità
		1	10236			1	9842			1	8804
		2	10248			2	9809		31	2	8779
	19	3	10258		25	3	9774			3	8756
		4	10266			4	9740			4	8733
		5	10272			5	9704			5	8712
		6	10277			6	9670			6	8691
		7	10279			7	9634		32	7	8672
	20	8	10280		26	8	9598			8	8653
		9	10279			9	9561			9	8635
		10	10275			10	9525			10	8619
10			**10267**	13			**9586**	16			**8705**
		11	10270			11	9488			11	8603
		12	10264			12	9451		33	12	8588
	21	13	10255		27	13	9413			13	8575
		14	10245			14	9376			14	8563
		15	10233			15	9340			15	8552
		16	10219			16	9304			16	8541
		17	10204			17	9268		34	17	8532
	22	18	10187		28	18	9234			18	8523
		19	10168			19	9199			19	8515
		20	10147			20	9165			20	8508
11			**10219**	14			**9324**	17			**8550**
		21	10125			21	9131			21	8502
		22	10102			22	9098		35	22	8496
	23	23	10077		29	23	9065			23	8491
		24	10052			24	9033			24	8487
		25	10025			25	9001			25	8484
		26	9998			26	8971			26	8481
		27	9969			27	8940		36	27	8479
	24	28	9939		30	28	8911			28	8477
		29	9908			29	8883			29	8476
		30	9875			30	8856			30	8475
						31	8829				
12			**10007**	15			**8974**	18			**8485**
Media mensile . .			**10.164**	Media mensile . .			**9.317**	Media mensile . .			**8.580**

Digitized by Google

Velocità Kilometrica Oraria Normale per ogni giorno dell'anno.

Luglio				Agosto				Settembre			
Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità	Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità	Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità
		1	8475		43	1	8441			1	7980
	37	2	8475			2	8433			2	7962
		3	8475			3	8425			3	7945
		4	8476			4	8416			4	7926
		5	8477			5	8407		50	5	7909
		6	8478		44	6	8397			6	7891
	38	7	8479			7	8386			7	7874
		8	8480			8	8375			8	7857
		9	8482			9	8363			9	7841
		10	8483			10	8350		51	10	7825
19			**8478**	22			**8399**	25			**7901**
		11	8485		45	11	8337			11	7810
	39	12	8486			12	8323			12	7795
		13	8487			13	8309			13	7781
		14	8488			14	8295			14	7768
		15	8489			15	8280		52	15	7755
		16	8490		46	16	8264			16	7742
	40	17	8490			17	8248			17	7731
		18	8490			18	8231			18	7719
		19	8490			19	8215			19	7709
		20	8489			20	8197		53	20	7699
20			**8488**	23			**8270**	26			**7751**
		21	8488		47	21	8180			21	7690
	41	22	8486			22	8162			22	7682
		23	8484			23	8144			23	7675
		24	8481			24	8126			24	7668
		25	8478			25	8108		54	25	7662
		26	8474		48	26	8090			26	7657
	42	27	8470			27	8072			27	7652
		28	8465			28	8053			28	7648
		29	8460			29	8035			29	7645
		30	8454			30	8016		55	30	7642
		31	8448		49	31	7998				
21			**8472**	24			**8089**	27			**7662**
Media mensile . .			**8.479**	Media mensile . .			**8.248**	Media mensile . .			**7.771**

Digitized by Google

Velocità Kilometrica Oraria Normale per ogni giorno dell'anno.

Ottobre				Novembre				Dicembre			
Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità	Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità	Decadi	Pentadi	Giorni	Velocità
		1	7640			1	7819			1	7764
		2	7639			2	7826			2	7750
		3	7639			3	7833			3	7737
		4	7639		62	4	7840		68	4	7722
	56	5	7640			5	7846			5	7707
		6	7642			6	7851			6	7692
		7	7645			7	7855			7	7676
		8	7648			8	7859			8	7660
		9	7652		63	9	7863		69	9	7643
	57	10	7656			10	7866			10	7626
28			**7644**	31			**7846**	34			**7698**
		11	7660			11	7869			11	7608
		12	7665			12	7871			12	7590
		13	7671			13	7872			13	7572
		14	7677		64	14	7873		70	14	7554
	58	15	7683			15	7873			15	7536
		16	7690			16	7871			16	7517
		17	7698			17	7869			17	7499
		18	7705			18	7867			18	7481
		19	7714		65	19	7863		71	19	7463
	59	20	7722			20	7859			20	7445
29			**7688**	32			**7869**	35			**7526**
		21	7730			21	7854			21	7428
		22	7739			22	7848			22	7411
		23	7747			23	7841			23	7394
		24	7756		66	24	7834		72	24	7377
	60	25	7764			25	7826			25	7360
		26	7772			26	7818			26	7344
		27	7780			27	7809			27	7329
		28	7788			28	7799			28	7314
		29	7795		67	29	7788		73	29	7300
	61	30	7803			30	7776			30	7288
		31	7811							31	7276
30			**7771**	33			**7819**	36			**7347**
Media mensile . .			**7.704**	Media mensile . .			**7.845**	Media mensile . .			**7.518**

Digitized by Google

Se si dimanda con qual grado di esattezza la formola *N* rappresenta le osservazioni originali, comincieremo prima di rispondere dal ricordare, che la velocità del vento essendo il più variabile ed incostante tra gli elementi meteorologici, deve ammettersi a priori, facendo uso della formola Besseliana limitata al terzo termine, una latitudine molto sensibile nelle differenze tra i valori osservati ed i calcolati. La formola poi non si è estesa al di là del terzo termine, per uno studio comparativo di cui appresso si parlerà. La somma delle differenze, relativamente ai valori corretti, cioè ai valori equidistanti dei quali si è fatto è uso, $\pm$ 7.370 cioè la media differenza è + 0, 409 e — 0, 409. Se poi si considerano i valori osservati, le somme delle differenze coi valori decadici contenuti nella tabella antecedente, sono di segno positivo 6.817 e di segno negativo 6.646, cioè (tenendo conto del numero corrispondente ad ambidue i segni), la media differenza positiva è + 0,401 e la media differenza negativa — 0,350. L'importanza ed il pregio di questa formola non debbonsi solamente dedurre dalla quantità della differenza *Cal.-Oss.* ma ancora, come si vedrà, da diversi altri criterî.

Assumerò, per punto di partenza, il principio che la curva anemometrica annuale abbia tre massimi e tre minimi, estremi che corrispondono inversamente, dentro equi limiti di approssimazione, ai periodi barometrici annuali. Una formola *A* da me calcolata sopra cinque anni di osservazioni anemometriche, e riportata a pag. 102 della Memoria *Andamento annuale della pressione atmosferica*, somministra nella curva anemometrica due soli massimi effettivi, e due soli minimi effettivi, che sono i seguenti (V. Mem. cit. a pag. 104):

		In giorni dell'anno	
min.	8 Gennajo . . .	8	
Max.	12 Aprile	102	
.	. . . . .		(*A*)
.	. . . . .		
min.	10 Ottobre . . .	283	
Max.	12 Novembre . .	316	

Digitized by Google

La formula attuale N, come ricavasi a colpo d'occhio dalla tabella antecedente, dà i seguenti massimi e minimi effettivi della velocità:

			In giorni dell'anno	
min.	9.5	Gennajo . .	9.5	
Max.	8	Aprile . . .	98	
min.	1.5	Luglio . . .	182.5	(N)
Max.	17.5	Luglio . . .	198.5	
min.	3	Ottobre . . .	276	
Max.	14.5	Novembre . .	318.5	

Dunque con la formola Besseliana sino al terzo termine, passando da 5 a 11 anni di osservazioni, si vedono spuntare nella curva anemometrica annuale il 2° minimo e il 2° massimo.

Le epoche critiche barometriche, in giorni dell'anno, sono in Modena, giusta la determinazione da me fattane nella Memoria sopra citata,

Max. . .	14	
min. . .	87	
Max. . .	147	(B)
min. . .	201	
Max. . .	266	
min. . .	318	

Considerando i primi e gli ultimi massimi e minimi, le differenze coi valori (A) ed (N) sono le seguenti:

$(A) - (B)$		
$8 - 14$	$= -6$	
$102 - 87$	$= +15$	
$283 - 266$	$= +17$	(A')
$316 - 318$	$= -2$	
Somma ecc.	40	

Digitized by Google

	$(N) - (B)$			
9.5	— 14	=	— 4.5	
98	— 87	=	+ 11	
276	— 266	=	+ 10	(N')
318.5	— 318	=	+ 0.5	
	Somma ecc.		26	

Dunque passando da 5 a 11 anni, non solo si mostrano i massimi e minimi effettivi intermedî, come appare dallo specchietto (N), ma inoltre le differenze tra gli altri massimi e minimi anemometrici e barometrici si riducono quasi di metà.

Come si è veduto i massimi e minimi della curva anemometrica annuale, non hanno uguali caratteri, cioè non sono suscettibili di essere uniformemente resi ostensibili. Una serie di cinque anni di osservazioni, non manifesta affatto il 2° minimo e il 2° massimo, i quali si mostrano in una serie di undici anni, però imperfettamente, cioè con molta irregolarità ed incertezza. Si ha difatti confrontando il quadro (N) col quadro (B).

2° min.	182.5 — 147	=	+ 35.5	
2° Max.	198.5 — 201	=	— 2.5	(N'')

Principalmente il 2° min. è rappresentato con molta imperfezione.

Dunque 11 anni di osservazioni, non somministrano i sei massimi e minimi annuali della velocità del vento con uniforme precisione, e si richiede un numero molto maggiore di anni di osservazione per ottenere che la posizione del 2° min. sia indicata con lo stesso grado di esattezza degli altri estremi.

Quì però dobbiamo entrare in un campo di investigazioni nuovo e importante. Da più tempo ho, in varie occasioni, richiamato l'attenzione dei meteorologisti sulla importanza delle indicazioni somministrate dalle semisomme delle inflessioni delle curve degli elementi meteorologici, calcolate per mezzo della for-

Digitized by Google

mula Besseliana. Quantunque si è antecedentemente toccato questo argomento, reputo conveniente insistere sul medesimo, e ritornarvi con nuovi documenti, che sempre più ne dimostrano l'importanza.

Gli aumenti diurni di un'elemento meteorologico dal minimo al massimo, per un certo tratto sono gradatamente crescenti. Vi è un punto però al di là del quale gli aumenti diurni vanno gradatamente diminuendo. Questo punto è quello di una inflessione, e precisamente di un passaggio delle seconde differenze dal segno + al segno —. L'elemento meteorologico è sempre in aumento, come per l'innanzi, di giorno in giorno, ma dopo il punto anzidetto cresce ogni giorno di quantità sempre più piccola, finchè a un certo tratto l'aumento diurno è zero, e allora avviene precisamente il massimo. Dal massimo al minimo l'elemento meteorologico va gradatamente diminuendo. Da principio aumenta ogni giorno la quantità della decrescenza. Vi è un punto però al di là del quale questa decrescenza si va di giorno in giorno riducendo più piccola. Questo punto è quello di una nuova inflessione, e precisamente di un passaggio delle seconde differenze dal segno — al segno +. L'elemento meteorologico continua sempre a diminuire, come per l'innanzi, di giorno in giorno, ma dopo tal punto diminuisce ogni giorno di quantità sempre più piccola, finchè a un certo tratto la decrescenza diurna è zero, e allora avviene precisamente il minimo. Ciò che si è detto ci fa conoscere, che il massimo è preceduto da una inflessione da + a —, e seguito da una inflessione da — a +. Evidentemente il minimo è al contrario preceduto da una inflessione da — a +, e seguito da una inflessione da + a —.

Conoscendo le epoche in cui avvengono due inflessioni contigue, una da + a — e l'altra seguente da — a +, la semisomma di questi due tempi indicherà l'epoca del massimo. Non entrerò in talune delicate questioni matematiche relative a questo argomento, sulle condizioni cioè che rendono in taluni casi il massimo effettivo coincidente con questa semisomma, in taluni

Digitized by Google

altri casi più o meno discosto dalla medesima, ovvero che talvolta non rendono ostensibile nella curva un massimo effettivo corrispondente a questa semisomma. Quel che si dice pel massimo inversamente applicasi al minimo. Queste ricerche formeranno l' oggetto di un lavoro speciale. Qui dirò solamente, che in tutti i casi che mi sono occorsi sinora, ho sempre osservato, che i massimi e minimi somministrati dalle semisomme in discorso, sono più esatti di quelli che mostra effettivamente la curva. Di più che talvolta vi sono importanti massimi e minimi non indicati dalla curva, e pure esattamente specificati dalle semisomme. Eccone un esempio.

Nella Memoria sopracitata *(Andamento annuale della pressione atmosferica)*, facendo uso di un quinquennio di osservazioni, ho trovato con la formola A le seguenti inflessioni:

			In giorni dell' anno
Da — a +	(a)	14 Dicembre . .	348
+ a —	(b)	26 Febbrajo . .	57
— a +	(c)	15 Maggio . . .	135
+ a —	(d)	14 Luglio . . .	195
— a +	(e)	29 Agosto . . .	241
+ a —	(f)	26 Ottobre . . .	299

Le semisomme di queste inflessioni, e i confronti con le epoche critiche barometriche B, trovansi nel seguente specchietto:

		S	$S-B$	
	$\frac{1}{2}(a+b)=$	20	+ 6	6
	$\frac{1}{2}(b+c)=$	96	+ 9	9
	$\frac{1}{2}(c+d)=$	165	+ 18	—
(A''')	$\frac{1}{2}(d+e)=$	218	+ 17	—
	$\frac{1}{2}(e+f)=$	270	+ 4	4
	$\frac{1}{2}(f+a)=$	323	+ 5	5
	Somme . .		59	24

Digitized by Google

Dunque le semisomme danno in questo caso il 2° minimo e il 2° massimo, che la curva non indicava, e inoltre danno con esattezza maggiore gli altri due massimi e gli altri due minimi, riducendo per essi la somma delle differenze con le epoche critiche barometriche da 40 a 24 (vedi l'antecedente specchietto (A')). Eseguiamo le stesse operazioni con la formula N ricavata da 11 anni di osservazioni. Da quest' ultima formola deduconsi le seguenti inflessioni:

				In giorni dell' anno
Da	— a + a	15.4	Dicembre . .	349.4
	+ a — b	23.7	Febbrajo . .	54.7
	— a + c	11.3	Maggio . . .	131.3
	+ a — d	9.5	Luglio . . .	190.5
	— a + e	28.0	Agosto . . .	240.0
	+ a — f	22.5	Ottobre . . .	295.5

Ecco le semisomme e i confronti con le ore critiche barometriche:

		S	$S-B$	
	$\frac{1}{2}(a+b)$ =	19	+ 5	5
	$\frac{1}{2}(b+c)$ =	93	+ 6	6
	$\frac{1}{2}(c+d)$ =	161	+ 14	—
(N''')	$\frac{1}{2}(d+e)$ =	215	+ 14	—
	$\frac{1}{2}(e+f)$ =	268	+ 2	2
	$\frac{1}{2}(f+a)$ =	322	+ 4	4
	Somme . .		45	17

Dunque con la formula N più esatta, cioè fondata sopra un numero maggiore di anni di osservazione, il 2° minimo e il 2° massimo si rendono, come sopra si è veduto, effettivi, cioè si mostrano direttamente nella curva, ma facendo uso delle semisomme

Digitized by Google

sono somministrati con una esattezza incomparabilmente maggiore. Per esempio pel 2° minimo la differenza invece di + 35,5 diviene + 14,0 (vedi l'antecedente specchietto (N'')). Di più l'accresciuto numero delle osservazioni, riduce la somma dei valori S-B da 59 a 45. Anche con la formula N dimostrasi, che le semisomme delle inflessioni danno valori più esatti dei massimi e minimi effettivi. Difatti le differenze con le epoche critiche barometriche, relative al 1° e 3° massimo e al 1° e 3° minimo, che le semisomme riducevano con la formula A da 40 a 24, con la formula N le riducono da 26 a 17 (vedi l'antecedente specchietto (N')), cioè presso a poco nello stesso rapporto.

Qui si presentano taluni problemi ai quali per ora non può darsi una adeguata risposta. Il 2° minimo e il 2° massimo della velocità del vento, che questa ultima formula avvicina al 2° massimo e al 2° minimo della pressione atmosferica di un intervallo di 14 giorni, crescendo il numero degli anni di osservazione, si renderanno uniformemente tanto vicini a tali estremi quanto lo sono i massimi e minimi anteriori e posteriori delle corrispondenti epoche critiche barometriche? Bisogna aspettare che cresca il numero delle osservazioni anemometriche per venire in chiaro di ciò, potendosi anche ritenere che sia un fatto fisico la maggior distanza di questi due massimi e minimi dai due estremi barometrici che corrispondono ad essi. Il segno + della quantità S-B, che viene così con la formula A come con la formula N, è una coincidenza accidentale, o rivela un fatto fisico, cioè che i massimi e minimi barometrici sono sempre anteriori di pochi giorni ai minimi e massimi anemometrici? Anchè ciò richiede, per una completa soluzione, il sussidio di un numero maggiore di anni di osservazione.

Siamo quindi arrivati al risultato notevolissimo e fondamentale, che i periodi barometrici annuali corrispondono inversamente ai periodi anemometrici annuali. E difatti è evidente, che l'aria deve essere tanto meno pesante quanto più celermente si muove. Però la quistione deve riguardarsi sotto un punto di vista più

Digitized by Google

elevato e complesso. Per le condizioni topografiche di Modena, aria più veloce importa aria che viene dal mare, cioè venti orientali e venti umidi; aria meno veloce importa aria che viene dal continente, cioè venti occidentali e venti asciutti. Il problema dunque assume un' aspetto più complicato e difficile, perchè si tratta di una causa ignota, che alternativamente rende predominanti tre volte all'anno i venti del semiorizzonte orientale, e tre volte all'anno i venti del semiorizzonte occidentale (V. *Andamento annuale della pressione atmosferica,* a pag. 114).

Nella tav. 4ª la curva piena *A* rappresenta l'andamento annuale della velocità del vento. Si vede che i tre massimi vanno successivamente abbassandosi da Aprile a Novembre e ugualmente i tre minimi da Giugno a Gennajo. Vi ho posto accanto la curva punteggiata *B*, rappresentante l'andamento annuale inverso della pressione atmosferica, nella quale le creste superiori vanno anche abbassandosi da Marzo a Novembre, e ugualmente le creste inferiori da Maggio a Gennaio. Le parti anteriori e posteriori di queste due curve (relativamente al diagramma) sono identiche, e vi è solo una sensibile differenza nelle parti centrali delle due curve. Siccome l' epoca corrispondente dell'anno è quella delle minime variazioni anemometriche, può dedursi che nel minimo barometrico di luglio, più che la velocità dell' aria influiscono la quantità del vapore e la rarefazione dell' aria.

La tabella antecedente dei valori medî normali, e i rilievi orarî dello apparecchio, ci forniscono tutti i materiali per determinare il valore normale per un' ora qualunque del giorno. Diamo un saggio di questo lavoro per le 9^h sera, che è una delle tre ore di osservazione delle stazioni meteorologiche Italiane. Omettendo tutti i calcoli preparatorî relativi a questo argomento, riferirò i soli ultimi risultati. La riduzione, sempre additiva, ai valori medî diurni normali, per ottenere la velocità kilometrica oraria a 9^h sera è la seguente:

Digitized by Google

$$\begin{aligned} \textit{Rid.}\ \text{IX} = 1^{k},035 &+ 0^{k}.6919\ \textit{Sen}\ (252^{\circ}\ 34'\ 6'' + M) \\ &+ 0^{k},2417\ \textit{Sen}\ (334^{\circ}\ 7'\ 4'' + 2M) \\ &+ 0^{k},1216\ \textit{Sen}\ (116^{\circ}\ 27'\ 6'' + 3M) \end{aligned}$$

Essendo le costanti angolari di questa formula molto vicine a quelle della formula termometrica, ricavasi che questa riduzione è principalmente dipendente dalla temperatura. Calcolando i medî mensili di questa riduzione, trovansi i seguenti valori:

	k
Gennajo	+ 0.400
Febbrajo	+ 0.524
Marzo	+ 0.825
Aprile	+ 1.103
Maggio	+ 1.176
Giugno	+ 1.304
Luglio	+ 1.706
Agosto	+ 1.982
Settembre . . .	+ 1.645
Ottobre	+ 0.931
Novembre . . .	+ 0.458
Dicembre	+ 0.366

Sommando le quantità somministrate da quest' ultima formula ai valori normali medî, si ottiene la velocità normale del vento per le 9^{h} sera. Con lo stesso metodo si può determinare la velocità kilometrica oraria per un altra ora qualunque del giorno.

Ci resta a considerare un altra proprietà della curva anemometrica annuale. Riguardando come normali i valori decadici contenuti nell' ultima tabella numerica, si prendano per ciascuna decade di ciascun anno di osservazione, le differenze tra i valori normali e gli osservati, e per ogni decade si calcoli il medio aritmetico di queste differenze, senza tener conto del loro segno.

Digitized by Google

Esempio. Decade 22. Quantità normale 8399.

		Diff.
1867	8161	— 0238
1868	7365	— 1034
1869	8375	— 0024
1870	7258	— 1141
1871	8895	+ 0496
1872	8236	— 0163
1873	8762	+ 0363
1874	8996	+ 0597
1875	8762	+ 0363
1876	7583	— 0816
1877	7679	— 0720
Somma ecc. . .		5955
Media		0541

L'andamento di queste medie differenze, si può considerare prossimamente identico a quello dell'errore probabile (1). Nella tabella seguente trovasi la differenza coi valori normali delle 396 decadi qui considerate.

Media variazione osservata

D	*U*	*D*	*U*	*D*	*U*	*D*	*U*
1	0868	10	1127	19	0817	28	1236
2	1485	11	1367	20	1062	29	1068
3	1233	12	0861	21	0541	30	0940
4	1619	13	1084	22	0541	31	0940
5	1331	14	0956	23	1133	32	1361
6	1265	15	1158	24	0573	33	1217
7	2085	16	0688	25	0787	34	1132
8	0924	17	0957	26	0784	35	1362
9	1205	18	0865	27	0959	36	1493

(1) V. *Andamento annuale della pressione atmosferica* pag. 63.

Digitized by Google

Queste quantità procedono molto irregolarmente. Nè altrimenti poteva aspettarsi, considerando lo scarso numero delle osservazioni, e l'estrema variabilità di questo elemento meteorologico. Per procurare di introdurre più regolarità nell'andamento di questi valori, si è fatto uso della formola Besseliana, e si è ottenuta la seguente espressione generale

$$\begin{aligned} U = 1.084 &+ 0.3075\ Sen\ (\ 59^\circ\ 1'\ 4'' + M) \\ &+ 0.0193\ Sen\ (296^\circ\ 10'\ 0'' + 2M) \\ &+ 0.0610\ Sen\ (291^\circ\ 26'\ 1'' + 3M) \end{aligned}$$

Da questa formola si deducono i seguenti valori di *U*.

Media variazione calcolata

D	*U*	*D*	*U*	*D*	*U*	*D*	*U*
1	1296	10	1198	19	0840	28	1002
2	1345	11	1124	20	0801	29	1066
3	1393	12	1059	21	0767	30	1117
4	1430	13	1012	22	0742	31	1152
5	1346	14	0876	23	0840	32	1274
6	1440	15	0952	24	0756	33	1188
7	1405	16	0931	25	0799	34	1201
8	1348	17	0907	26	0858	35	1223
9	1276	18	0878	27	0926	36	1254

Quantunque questi ultimi valori presentino ancora sensibili oscillazioni, il loro andamento è molto più regolare dell'antecedente. Essi sono rappresentati graficamente, nella parte superiore della tavola 4ª, dalla curva piena *V*. Con tutte le irregolarità della curva, si vede a colpo d'occhio, che è molto prossimamente inversa della curva termometrica. Dunque nei mesi estivi è minore la media variazione anemometrica, cioè negli anni diversi vi è più concordanza nei valori corrispondenti della velocità del vento, mentre nei mesi invernali la media variazione è maggiore. La

Digitized by Google

curva inversa della temperatura è rappresentata nella tavola 4.ª dalla curva punteggiata *T*. È manifesto che la curva inversa della temperatura precede alquanto quella delle medie variazioni. Difatti il massimo della prima è in Gennajo e il massimo della seconda in Febbrajo, il minimo della prima è in Luglio e il minimo della seconda in Agosto. Insomma l'andamento annuale del barometro e della velocità del vento, hanno anche questo di comune, che mentre ambidue sono rappresentati da una curva a tre massimi e tre minimi, le rispettive medie variazioni sono rappresentate da una curva a un solo massimo e un solo minimo.

D. RAGONA.

Digitized by Google

Digitized by Google

APPENDICE I.

Mentre in Francia l' astronomo *Faye* tuona contro la *Meteorologia cosmica*, mentre prima in Italia il Dott. *Celoria* e poi in Germania il Dott. *Hann*, dimostrano che i periodi delle macchie solari niuna influenza esercitano sulle temperature terrestri, vi è chi estende al contrario l' azione di tali macchie sino alla velocità del vento, e alla direzione della media risultante annuale del medesimo. Vuolsi che da un' epoca di minimo a una epoca di massimo delle macchie, da un lato la velocità del vento cresca gradatamente, e dall' altro lato la risultante del medesimo ruoti gradatamente da ovest verso sud. Senza fare uso delle formule di Lambert, prendendo la velocità del vento come immediatamente è indicata dall' anemometro, non si conferma, almeno in Modena, l' aumento della velocità con l' aumento del numero relativo delle macchie solari, anzi i confronti sembrano accennare a un' inverso andamento.

Nella tavola seguente sono riuniti i valori decadici della velocità kilometrica oraria del vento, osservati in Modena da Dicembre 1866 a Novembre 1877.

Digitized by Google

Decadi	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877
34	6,579	8,182	7,279	7,051	7,958	8,734	11,175	11,475	8,592	7,563	7,496
35	9,236	9,454	6,400	5,588	5,819	10,025	8,479	7,900	8,225	6,004	7,000
36	7,354	5,890	5,758	10,235	6,648	4,823	5,524	5,337	9,826	6,814	6,931
1	6,483	8,887	6,996	7,889	8,362	——	6,646	7,964	6,654	6,067	6,042
2	10,275	7,242	8,891	8,383	7,767	5,359	4,175	4,675	5,096	7,275	7,542
3	8,981	10,241	8,163	7,121	7,386	6,546	9,697	7,920	10,428	7,443	8,909
4	10,171	6,411	6,255	7,496	5,232	——	10,698	11,096	8,417	8,187	6,983
5	6,883	6,454	6,058	5,988	6,750	6,825	8,005	8,968	9,362	6,712	7,917
6	8,266	7,815	7,719	9,554	7,113	5,384	7,760	6,271	7,990	9,130	9,703
7	12,758	11,892	12,217	7,796	7,117	9,233	6,912	7,863	8,509	12,758	10,917
8	9,442	10,967	10,608	10,446	9,217	9,917	10,475	10,100	7,367	11,846	8,904
9	10,217	11,542	10,864	10,733	11,417	9,773	6,992	9,155	12,652	11,754	10,553
10	12,729	11,329	10,617	10,546	7,218	11,088	9,108	10,824	9,142	11,433	10,637
11	11,729	9,887	9,237	12,509	8,337	8,279	8,443	11,704	9,596	11,391	9,175
12	10,161	7,600	9,537	10,690	9,440	9,337	9,379	9,733	8,925	11,028	8,495
13	9,579	9,204	10,104	10,954	11,821	8,062	10,443	9,987	7,342	11,050	8,562
14	8,721	10,192	7,767	7,542	9,883	8,843	8,653	9,967	7,592	10,488	8,867
15	11,110	7,633	9,674	9,383	10,784	11,608	9,383	7,693	9,758	9,648	8,413
16	9,037	8,442	9,400	8,975	8,904	6,483	8,037	8,288	7,233	9,304	8,271
17	9,321	8,283	10,495	7,996	9,150	7,717	8,433	10,254	7,362	7,425	9,975
18	9,200	8,762	9,387	9,023	8,025	6,750	8,425	11,608	8,879	7,996	9,308
19	9,071	9,200	7,529	8,517	7,225	7,608	6,429	8,596	7,308	8,183	7,550
20	9,854	7,504	10,023	6,467	7,782	7,899	9,417	8,017	5,767	9,679	8,696
21	8,658	9,284	8,458	8,697	9,072	9,295	7,644	9,818	8,561	9,083	8,886
22	8,161	7,365	8,375	7,258	8,895	8,236	8,762	8,996	8,762	7,583	7,679
23	9,642	7,550	10,521	6,800	7,017	8,198	8,475	9,604	7,312	7,654	6,054
24	7,801	7,761	8,511	7,133	8,152	8,148	7,394	7,265	8,011	9,515	6,920
25	7,396	8,571	8,808	8,529	6,135	6,737	8,008	7,862	9,237	8,129	9,204
26	8,969	7,046	6,854	8,196	7,801	7,367	7,854	10,358	8,321	6,663	7,196
27	9,079	8,433	6,396	9,129	7,000	6,833	5,907	7,350	7,617	6,317	8,342
28	10,521	8,516	5,685	9,437	7,818	8,325	7,911	6,962	7,567	7,483	11,695
29	6,100	6,721	6,654	8,167	6,776	10,152	6,854	5,800	7,987	6,633	7,463
30	9,896	7,227	7,245	9,879	7,562	8,784	8,701	6,352	8,098	6,992	6,886
31	8,013	8,542	6,633	6,979	7,775	7,037	9,079	6,233	6,087	8,204	6,296
32	6,508	8,175	5,804	8,167	11,593	8,637	7,421	10,750	9,083	6,267	7,567
33	6,175	6,602	9,412	7,892	7,036	5,242	9,338	7,187	6,204	7,488	9,221
Medio	**9,002**	**8,467**	**8,343**	**8,615**	**8,111**	**8,038**	**8,223**	**8,609**	**8,191**	**8,533**	**8,340**

Digitized by Google

Togliendo le cifre rappresentanti il numero relativo delle macchie solari (giusta Wolff), da uno scritto del Sig. Hahn (*Zeitschrift* 1878 Num. 3), ove sono riportate sino al 1875, si ottengono i seguenti valori.

Novennio 1867-75

Medio del Num. relat. delle macchie solari 66.6
Medio della Velocità kil. oraria in Modena 8.400

	Macchie solari Diff. col medio	Vel. kil. oraria Diff. col medio
1867	— 57.8*m*	+ 0.602*M*
1868	— 29.8	+ 0.067
1869	+ 12.0	— 0.057
1870	+ 65.2*M*	+ 0.215
1871	+ 47.2	— 0.289
1872	+ 33.1	— 0.362*m*
1873	+ 1.1	— 0.177
1874	— 23.5	+ 0.209
1875	— 47.7	— 0.209

Il 1867 che è un minimo delle macchie, è un massimo della velocità del vento. Però il minimo della velocità non è il 1870 ma il 1872.

Insomma in un novennio, i soli due anni 1870 e 1875 si allontanano dall' andamento inverso, mentre gli altri sette prossimamente lo confermano.

Veramente il numero degli anni di osservazione è molto ristretto, per poter dedurre sicure illazioni su questo argomento.

Digitized by Google

Digitized by Google

APPENDICE II.

La curva anemometrica corrispondente al giorno medio annuale, è un' elemento sfornito di pratica utilità, giacchè questo giorno rigorosamente non esiste in natura.

È perciò che ho trascurato la disamina del giorno medio annuale nel mio lavoro sulla velocità del vento, ove principalmente ho curato l' esposizione dei fenomeni anemometrici che effettivamente si osservano nei varî mesi e nelle varie stagioni. Ma se la considerazione in discorso non ha importanza pratica, ne ha molta sotto l' aspetto teorico, giacchè nella curva anemometrica del giorno medio annuale si elidono tutte le influenze prodotte dallo avvicendarsi delle stagioni.

Questo punto di vista rende di molto pregio una speciale trattazione della curva di cui si ragiona, lo che ha per me tanto maggiore interesse, in quanto che conferma ampiamente i risultati a cui sono giunto nel mio lavoro sopracitato.

In quest' ultimo trovasi la somma dei kilometri percorsi dal vento nelle varie stagioni. Da questa tavola ricavasi la seguente, contenente la somma dei kilometri percorsi nell' anno.

Digitized by Google

Anno	Autunno	Estate	Primavera	Inverno	Stagioni	SOMMA dei kilometri percorsi dal Vento nell'anno
33370	7328	8778	10655	6609	0-1	
34452	7723	9163	10974	6592	1-2	
35007	7803	9410	11235	6559	2-3	
34954	7625	9567	11432	6330	3-4	
34863	7589	9748	11401	6125	4-5	
35221	7844	9837	11169	6371	5-6	
35857	8455	9839	10816	6747	6-7	
36960	8931	9920	10945	7164	7-8	
37075	8723	10077	10970	7305	8-9	
35765	8252	9804	10310	7399	9-10	
33978	7898	8991	9746	7343	10-11	
32811	7575	8503	9348	7385	11-12	
33875	7770	8613	9684	7808	12-13	
33000	7708	8098	9382	7812	13-14	
31748	7377	7735	9042	7594	14-15	
30890	7214	7611	8592	7473	15-16	
29957	7100	7119	8293	7445	16-17	
29268	7113	6679	8183	7293	17-18	
27371	7047	5805	7435	7084	18-19	
26136	6490	5625	7129	6892	19-20	
26506	6037	6253	7513	6703	20-21	
27626	6130	6979	8278	6239	21-22	
29469	6513	7576	9143	6237	22-23	
31550	7100	8214	9940	6296	23-0	
777709	179345	199944	231615	166805	Somma Σ	
3845	962	993	980	910	Numero dei giorni di osservazione n	
8.428	7.768	8.390	9.848	7.637	Medio $\frac{\Sigma}{24\ n}$	

Digitized by Google

Da questa tavola si deduce, che nell' undicennio i giorni eliminati dal calcolo, perchè presentavano qualche lacuna nei rilievi dell' anemometrografo, furono in totalità 173, perchè il numero dei giorni di osservazione avrebbe dovuto ammontare a 4018. Ricavasi ancora che nei 3845 giorni utili, i giri del mulinello furono in numeri rotondi 156 milioni, giacchè un kilometro corrisponde a 200 giri del mulinello.

Da quest' ultima tavola si deducono, col solito metodo, le velocità kilometriche orarie. Per esempio per l' ora 0 si ha

$$\frac{31550 + 33370}{7690} = 8{,}442 .$$

I valori orarî osservati nel giorno medio annuale sono i seguenti:

0	8,442	12	8,672
1	8,820	13	8,696
2	9,032	14	8,420
3	9,098	15	8,145
4	9,079	16	7,912
5	9,113	17	7,702
6	9,243	18	7,365
7	9,469	19	6,958
8	9,627	20	6,846
9	9,472	21	7,039
10	9,069	22	7,425
11	8,685	23	7,935

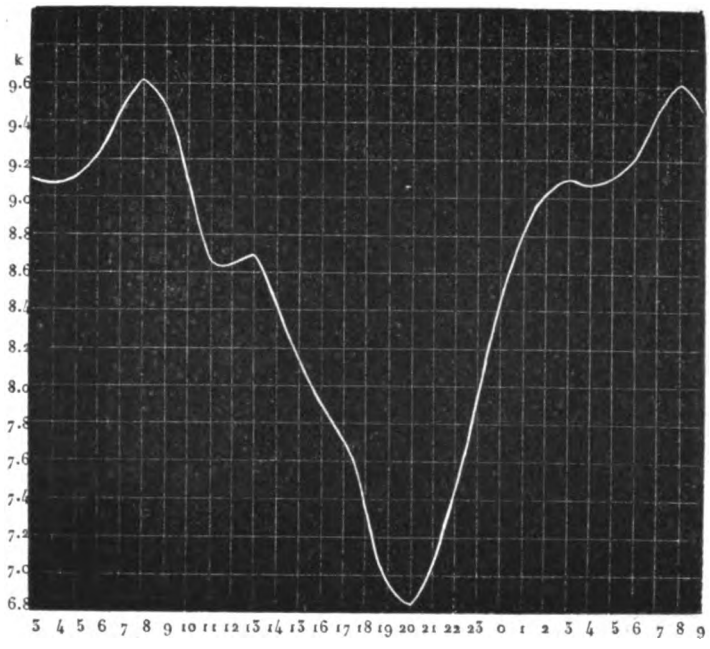
Medio generale 8,428.

I valori osservati sono rappresentati graficamente nella figura 1.ª tracciata a mano libera. Questa curva immediatamente

Digitized by Google

ci fa conoscere, che nel giorno medio esistono tre massimi effet-

Figura 1.ª



tivi, tre minimi effettivi, e una piccola sinuosità tra le ore 15 e 18. I massimi e minimi effettivi sono i seguenti:

Max	$3.^{h}$
min . . , .	4.5
Max	8.
min	11.2
Max	13.
min	20.

Questi istanti dovrebbero corrispondere ai medî delle efficienze delle quali ho trattato nel mio citato lavoro. Chi considera che per arrivare al medesimo risultato le due vie sono molto diverse, che gli istanti di talune efficienze sono stati dedotti dalle semplici semisomme delle inflessioni (metodo da me per la prima

Digitized by Google

volta proposto ed usato), infine che il numero degli anni di osservazione non è molto esteso, si aspetterebbe considerevoli differenze tra le due serie di valori, e pure non è così.

Si ha difatti.

	Medî delle efficienze	Diff.
	h	h
I	3,0	0,0
II	5,7	1,2
III	8,6	0,6
IV	10,9	0,3
V	13,3	0,3
VIII	20,6	0,6

Solamente per la 2ª efficienza la differenza è alquanto sensibile, mentre per le altre è trascurabile.

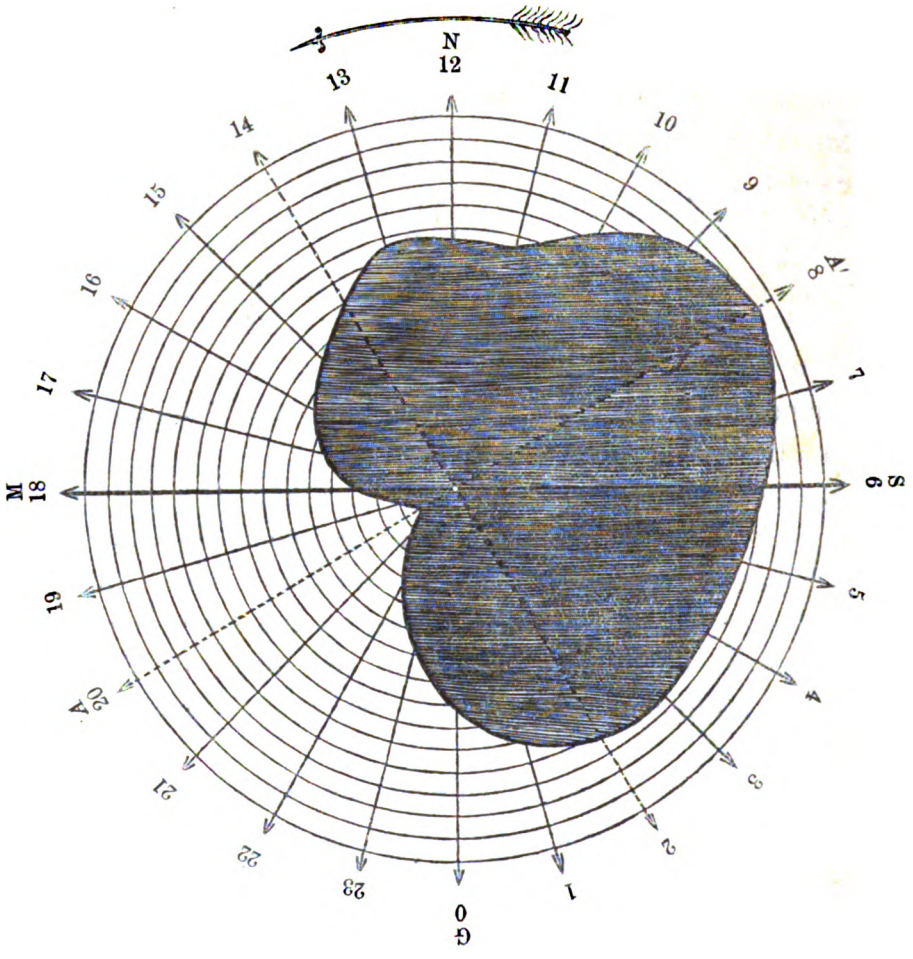
La piccola sinuosità tra le ore 15 e 18 ci fa conoscere, che le efficienze VI e VII rimangono nel giorno medio annuale allo stato virtuale, ovvero, in corrispondenza ad altre simili manifestazioni delle curve meteorologiche, (come ho dimostrato con esempi), che si richiede un numero molto più considerevole di anni di osservazioni, affinchè si appalesino con effettivi massimi e minimi.

Questi risultati, che provengono esclusivamente dalle osservazioni genuine, confermano dunque ampiamente l' esattezza di tutto il complesso della discussione, e di tutto il procedimento del calcolo.

Digitized by Google

La curva del giorno medio annuale nella figura 2.ª è rappresentata graficamente in un modo diverso, cioè con cerchi

Figura 2.ª



concentrici, che esprimono velocità kilometriche orarie crescenti di 2 in 2 decimi di kilometro, dal centro alla circonferenza. Quest' ultima è divisa in 24 parti, che denotano le 24 ore del giorno medio annuale. La figura complessiva di questa curva chiusa (della quale si potrebbe determinare la equazione), è molto bizzarra. Ma essa ci fa conoscere una legge fondamentale.

Digitized by Google

Vi ha un' asse $A\,A'$, che può chiamarsi asse principale, nel quale si trovano il massimo dei massimi ed il minimo dei minimi, e quest' asse è distante di due ore dall' asse $M\,S$, che denota la divisione del giorno $M\,G\,S$ e della notte $M\,N\,S$.

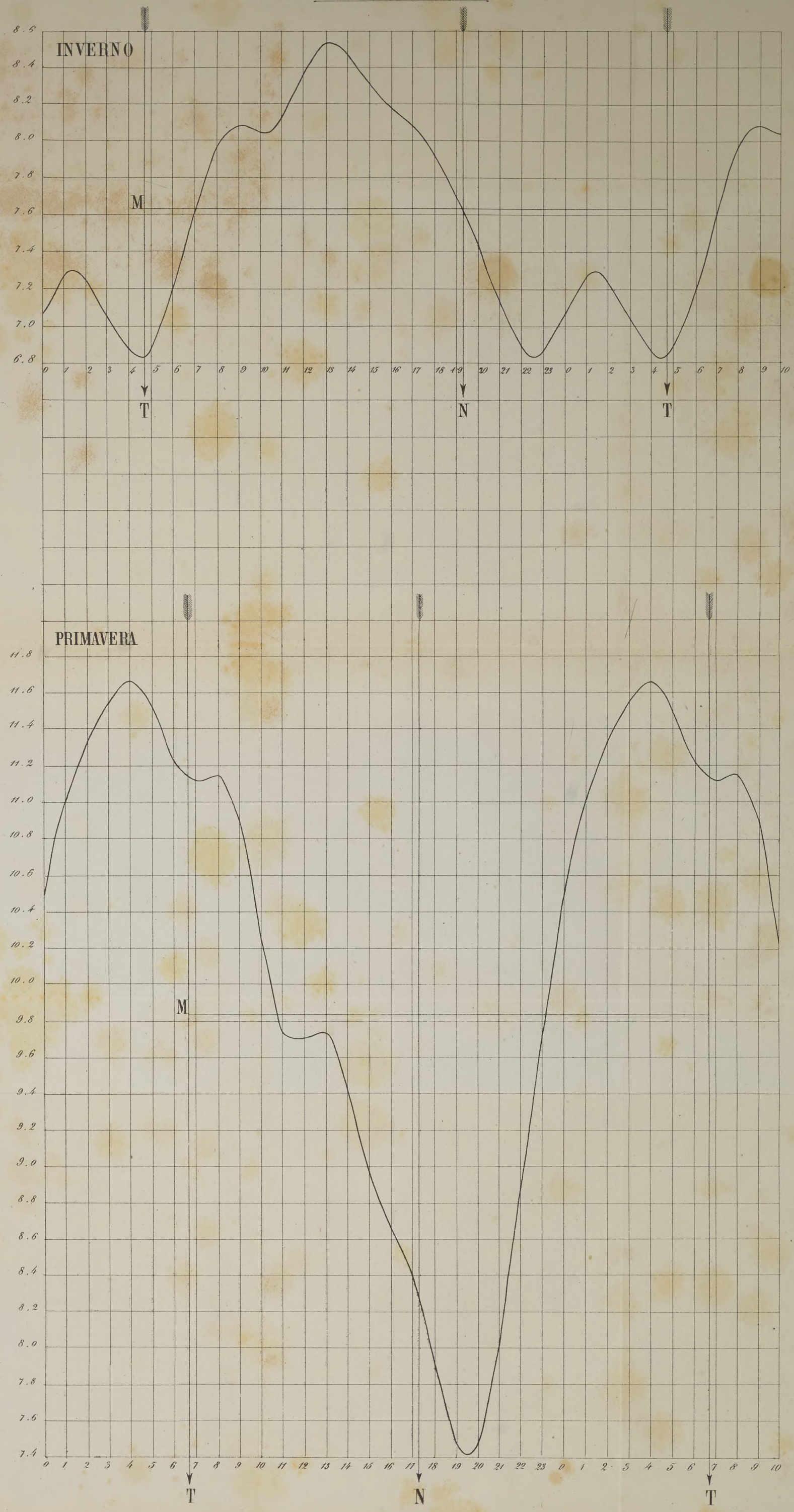
Dunque nel giorno medio annuale il massimo dei massimi avviene due ore dopo il tramonto, e il minimo dei minimi due ore dopo il nascere del Sole. Questi risultati saranno presto congiunti ai fenomeni dell' andamento diurno e annuale della direzione del vento, argomento di cui mi sto occupando attualmente.

Digitized by Google

Digitized by Google

Velocità Media Oraria calcolata del Vento

TAV. 1ª

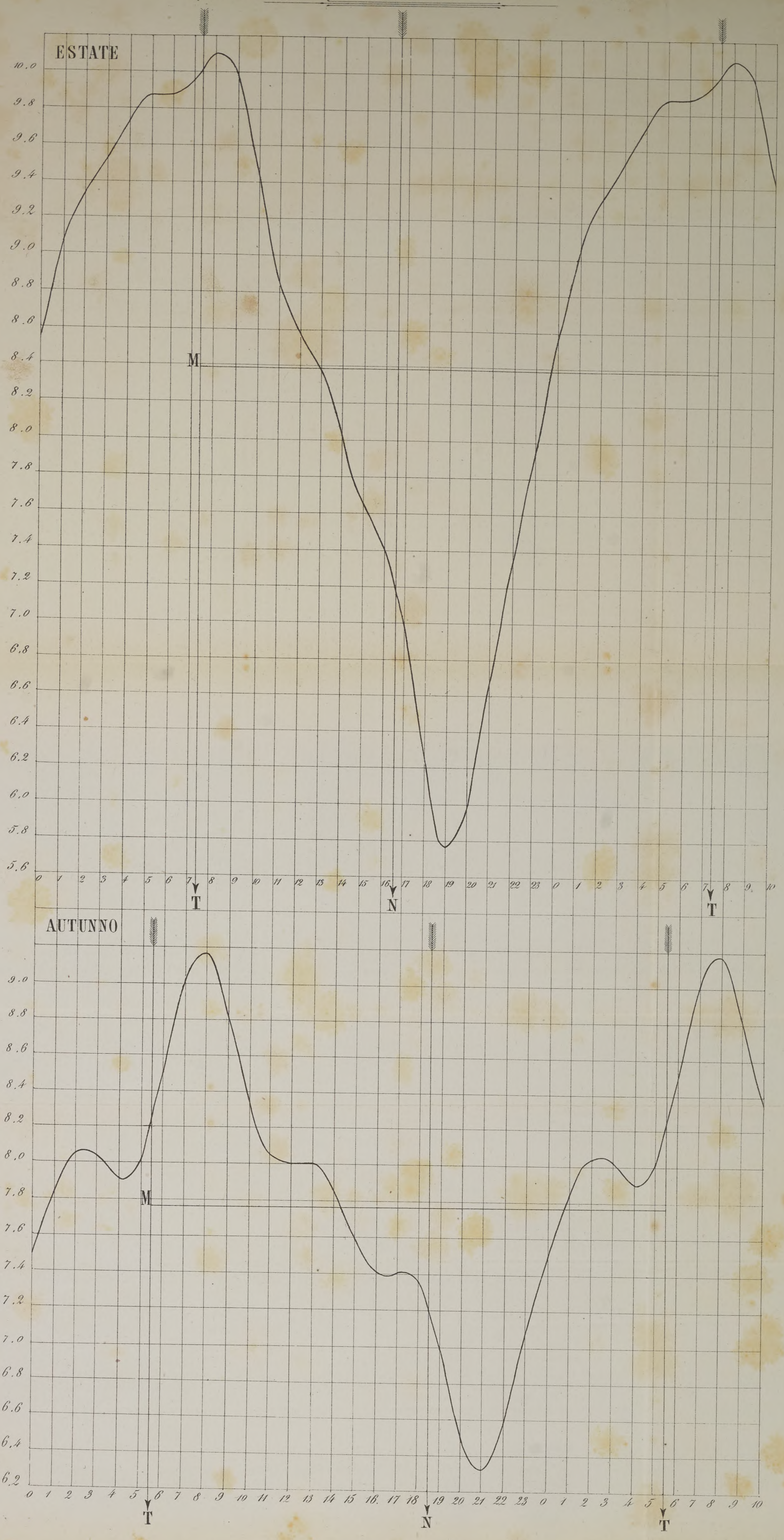


Digitized by Google

Digitized by Google

Velocità Media Oraria calcolata del Vento

TAV. 2.ª

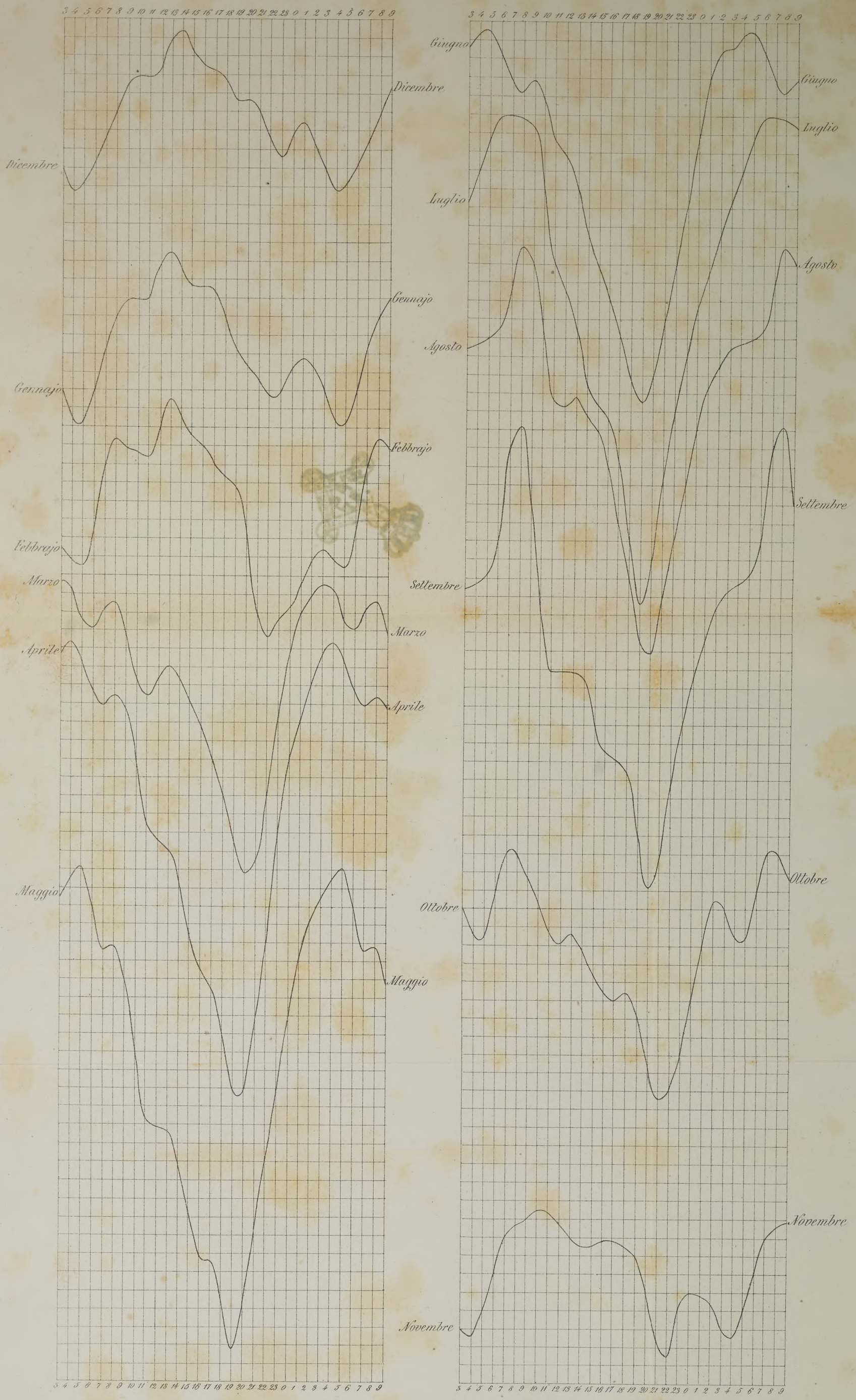


Digitized by Google

Digitized by Google

TAV. 3ª

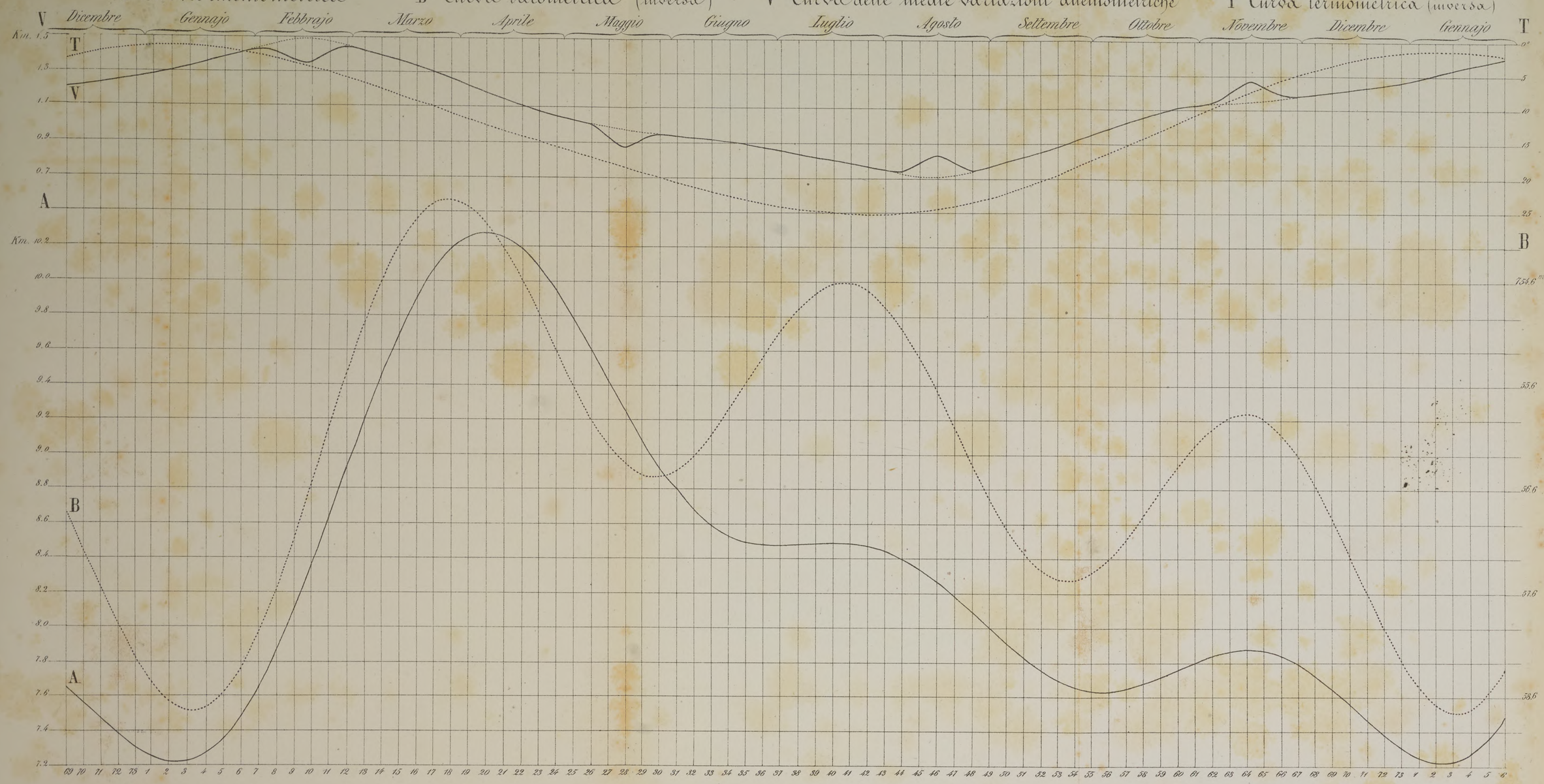
Velocità Media Oraria osservata del Vento.



Digitized by Google

Digitized by Google

A Curva anemometrica B Curva barometrica (inversa) V Curva delle medie variazioni anemometriche T Curva termometrica (inversa)



Digitized by Google

Digitized by Google

NOTIZIE STORICO-CRITICHE

SULLA

COSTRUZIONE DELLE EQUAZIONI

« Le quale regole principalmente foron trouate: e « fabricate per rispetto de la quantita continua: cioe geo- « metria perche in lei sono ale volte quantita sorde che « per forza numerale discretamente non si posson dare: « ma conuiense respondere e operare per radici e per linee « e quadrati e cubi commo praticando, te auirrà neli se- « quenti casi e molti altri. E sonno tutte fondate nel « secondo de Euclide mediante la forza e virtù del quinto, « cioe de le proportioni e proportionalita che maxime in « loro se recercano. »

FR. LUCA PACIOLI, *Tractatus Geometrie.* Distinctionis tertie diuisio. Car. 15.

L'applicazione dei metodi grafici ai calcoli d'indole più elevata va facendo progressi continui, e particolarmente in questi ultimi tempi, si vennero proponendo d'ogni parte procedimenti atti a rappresentare mediante costruzioni geometriche le formole spesso le più ardue dell'analisi.

Facendo astrazione dal singolare favore in che sono oggidì gli studi geometrici, e che in altra circostanza (1) ho cercato di

(1) *La Statica grafica nell' insegnamento tecnico superiore* per ANTONIO FAVARO. Venezia, tip. Grimaldo e C. 1873. — *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti* dal novembre 1872 all'ottobre 1873. Tomo Secondo, Serie Quarta. Dispensa Decima. Venezia, tip. Grimaldo e C. 1872-73, pag. 1661-1817.

Digitized by Google

mettere in evidenza, vi sono due cause, le quali giustificano appieno e razionalmente questa manifesta tendenza: la prima si è che pressochè sempre una costruzione parla agli occhi un linguaggio assai più chiaro che non una formola, per quanto semplice: la seconda, che quando col sussidio di simboli e di cifre si è compiuta la ricerca d' una soluzione matematica, ne rimangono traccie molto più difficili a seguirsi che non quando la soluzione stessa venne trovata mercè costruzioni, le quali dipendono le une dalle altre in un ordine necessario di successione.

Le formule analitiche costituiscono indubbiamente mezzi potenti di investigazione: esse convengono in modo mirabile, allorquando si tratti di calcolare un risultato con un determinato grado di esattezza, anzi questa esattezza potrà, in generale, spingersi per tal via quanto si voglia, ma le costruzioni geometriche, d' ordinario assai più sollecite, presentano un requisito che le formule non possiedono se non teoricamente, quello cioè della continuità: i punti di una linea si succedono senza interruzioni; i risultati numerici calcolati col mezzo della formula che rappresenta la stessa linea, sono necessariamente discontinui.

I procedimenti grafici, è d' uopo riconoscerlo, non permettono di raggiungere l' esattezza, alla quale si può pervenire mercè i calcoli numerici, ma però forniscono una approssimazione più che sufficiente per i bisogni della pratica.

Nel presente lavoro, pur prendendo principalmente di mira lo sviluppo storico della costruzione delle equazioni, non abbiamo trascurato di porre in evidenza quanto nella indagine nostra ci si è offerto di interessante così intorno all' uso dei metodi grafici in generale, come anche intorno a certe questioni di analisi geometrica che ci sembrarono all' argomento nostro più o meno strettamente connesse.

Digitized by Google

I.

Se noi ci facciamo ad indagare nella istoria delle matematiche le origini e le vicissitudini dei metodi grafici e costruttivi noi ne vediamo procedere in modo quasi continuo lo sviluppo ad onta di un alternarsi di favore e di trascuranza, dal quale, a prima giunta, si giudicherebbe dovessero andare esenti i vari rami della matematica, scienza conservatrice per eccellenza.

Questa vicenda è resa manifesta fin dai primi periodi del loro svolgimento.

Infatti, mentre i matematici classici dell'antichità avevano trattato di rapporti delle quantità, solo in quanto questi sono rappresentabili per mezzo di rette e dallo stesso simbolo rappresentati, avevano considerato anche quelli dei numeri; negli ultimi secoli dell'antichità, quando il grecismo depose i suoi caratteri particolari, per isposarsi allo spirito che veniva d'Oriente, cominciò a svilupparsi una dottrina sul modo di considerare i numeri, indipendente affatto dalle rappresentazioni sensibili, dottrina, la quale trova in Diofanto la sua più splendida manifestazione (1).

Le origini stesse della geometria, quali ci vengono narrate da Proclo, porgono importanti materiali allo studio del nostro argomento. » E poichè, scrive egli, (2) convien ora volgere la mente anche ai principii delle arti e delle scienze nel presente periodo, diciamo adunque che in prima la geometria fu trovata dagli Egizii, ripetendo essa la sua origine, secondo quanto ne dicono i più, dalle misurazioni delle campagne. Queste si rende-

---

(1) HANKEL. *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten.* Antrittsrede. Tübingen, 1869, pag. 10.

(3) **ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ' ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝΟΥΣΙΟΝ,** ecc. Basileae, M.D.XXXIII, pag. 19-20. — PROCLI DIADOCHI LYCII *in primum Euclidis elementorum librum Commentaria.* Patavii, 1560, pag. 37-38.

Digitized by Google

vano loro necessarie a cagione degli straripamenti del Nilo, il quale faceva smarrire i confini dei fondi, che a ciascuno appartenevano (1). Non vi è però nulla di strano in ciò che questa scienza, come tante altre, sia sôrta dietro l'impulso dei bisogni grafici, poichè ogni cosa concepita, nel nascere, di manchevole che è, procede fino a diventare perfettissima. Dalla percezione sensibile alla intellettuale, da questa all'idea si procede per una via naturale. »

Il Cantor, scrivendo dell'aritmetica pitagorica ed in particolare della dottrina delle proporzioni, esce in alcune considerazioni così giuste, così bene appropriate all'indole di questo nostro studio, che non possiamo resistere al desiderio di riprodurle testualmente: (2) Was lag da näher, als dass er nun auch das dem Inhalte nach Neue in die gewohnte geometrische Betrachtungsweise übersetzte? Bei der Proportionenlehre war eine solche Uebersetzung verhältnissmässig am leichtesten, wie denn auch Theon von Smyrna uns ein Beispiel in der Aufsuchung des geometrischen Mittels aufbewahrt hat. Aber auch die sonstigen arithmetischen Sätze liessen sich in gleicher Weise versinnlichen, und so bildete sich zum didaktischen Gebrauche jene überaus eigenthümliche *geometrisch aufgefasste Arithmetik*, wie sie in den Elementen des

---

(1) Il BRETSCHNEIDER non accetta questa versione, la quale assai probabilmente si appoggia sopra un passo di ERODOTO (*Delle Istorie di Erodoto d' Alicarnasso.* Volgarizzamento con note di MATTEO RICCI. T. I. Torino, 1872, pag. 272), parendogli strano che, dopo un soggiorno di mille anni, gli Egiziani non avessero potuto stabilire a tutto agio i termini dei loro fondi, per modo da nulla aver a temere dalle piene del Nilo, in generale si placide, regolari e crescenti grado a grado. Egli per contrario inclina a credere che i lavori ai quali dava occasione lungo le sue rive il corso del fiume abbiano messo gli Egiziani nella necessità di occuparsi di agrimensura (*Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.* Ein historisches Versuch von C. A. BRETSCHNEIDER. Leipzig, 1870, pag. 8-13).

(2) *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* von Dr. MORITZ CANTOR. Halle, 1863, pag. 96.

Digitized by Google

Euclid, also auch wohl in den ihm vorhergehenden Elementenbüchern vorhanden ist. Hierin liegt der zweite Grund, warum bei den Griechen die Geometrie weiter entwickelt war als die Arithmetik. Sie enthielt diese letztere mit. Mann erkannte als bewiesen in der Regel nur das an, was sich auch zeichnen liess, dessen Construction bereits dem Auge die Wahrheit des zu Bestätigenden klar machte. Das war freilich viel bequemer und zugleich viel fasslicher. »

Lasciando per ora da parte le indagini relative alle epoche anteriori ad Euclide, indagini, che, non ostante lo splendido lavoro del Bretschneider testè citato, presentano, eccettuato il caso di qualche celebre problema, non poche difficoltà ed incertezze, noi troviamo, come lasciò poco fa travedere il Cantor, importanti materiali per la storia dei metodi costruttivi nel quinto libro degli *Elementi*. Euclide è per noi il rappresentante della somma delle cognizioni geometriche possedute fino al tempo nel quale egli fiorì, ed in quest'opera, che, più d'ogni altra, influì sullo sviluppo matematico di tutti i secoli, e nella quale, con maggiore evidenza che nelle altre, egli si appalesa più dipendente dagli scrittori che lo precedettero, al luogo testè citato, noi troviamo la dottrina delle proporzioni esposta il più ampiamente possibile, usando delle rette come di simboli. Forse, opina il Cantor, (1) questa maniera di rappresentazione sensibile è stata scelta a bella posta per accennare fin da questo momento al duplice servigio che la dottrina delle proporzioni è chiamata a rendere in seguito. Le quantità che si passa a considerare nelle loro relazioni, sono rappresentate per mezzo di rette, affinchè riesca agevole il formarsi quel concetto che servir deve di base alle considerazioni avvenire e perchè anche non riesca cosa nuova una proporzione

(1) *Euclid und sein Jahrhundert.* Mathematisch-historische Skizze von MORITZ CANTOR. Separatabdruck aus der *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* Leipzig, 1867, pag. 4.

Digitized by Google

di date rette, di cui in seguito dovrà egli occuparsi. Le rette si tracciano le une accanto alle altre, senza dar loro però congiunzione alcuna, senza che formino figure, affinchè si riconosca trattarsi quì di qualche cosa di più generale che non è la comparazione delle figure geometriche. Per fermo questa ipotesi offre caratteri incontestabili di ammissibilità, ma non rimane perciò infirmato che l'autore degli *Elementi*, dovendo trattare delle disuguaglianze in quanto possono sottoporsi a misura, misura che è per così dire duplice, aritmetica cioè e geometrica, ritenne opportuno di servirsi delle rette come di simboli onde rappresentare in modo sensibile e chiaro le sue argomentazioni e le necessarie deduzioni.

Anche abbandonando la considerazione del quinto libro degli *Elementi*, stà ad ogni modo il fatto che la scuola di Euclide dimostrò sopra figure e per via di considerazioni geometriche le dieci prime proposizioni del secondo libro, le quali non sono in fine se non regole di calcolo.

Questo saggio di rappresentazione grafica abbiamo voluto assumere come punto di partenza e venendo a trattare di quanto in particolar modo si riferisce alla costruzione ed alla risoluzione delle equazioni, ricorderemo come nella proposizione 6.ª del Libro II (1) degli *Elementi* si trovi compiuto per via costruttiva quell'importante passo, il quale conduce nella risoluzione delle equazioni quadratiche ad aggiungere ad ambo i membri il quadrato della metà del coefficiente dell'incognita.

A questo stesso riguardo sono meritevoli di particolare considerazione le proposizioni 27.ª e 28.ª del libro VI, intorno alle

---

(1) Noteremo qui ancora come nelle proposizioni 4.ª e 5.ª di questo medesimo libro a giudizio del COSSALI (*Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, Vol. I. Dalla Reale Tipografia Parmense CIↃ IↃCC.XCVII., pag. 88) EUCLIDE apparecchi « in general modo, e rimoto i fondamenti dell'analisi delle equazioni di secondo grado. » Nulla però aggiunge il COSSALI intorno alla proposizione 6.ª

Digitized by Google

quali sarà anzitutto opportuno di chiarire certe locuzioni oggidì cadute in dissuetudine. Adattare ad una retta data un rettangolo uguale ad uno spazio dato e sotto certe date condizioni, vale quanto su questa retta, presa per base, costruire un rettangolo uguale allo spazio dato e che soddisfi a queste condizioni; così, per modo di esempio, Euclide nella 27.ª proposizione testè menzionata, propone il seguente problema: *ad una retta data adattare un parallelogrammo uguale ad uno spazio dato e mancante d' un parallelogrammo simile ad un altro*, oppure, prendendo dei rettangoli in luogo di parallelogrammi: *sopra una retta data costruire un rettangolo che, toltone un quadrato della stessa altezza, uguagli un quadrato dato.*

Ora, quest' ultima proposizione contiene la risoluzione dell' equazione di secondo grado:

$$bx - x^2 = a^2$$

quì infatti b è la retta data, x l' altezza cercata del rettangolo da costruirsi su questa retta ed x^2 il quadrato tolto dal rettangolo: il rimanente uguaglia a^2. Questo problema viene elegantemente risolto da Euclide al luogo indicato. L' altro caso delle equazioni quadratiche:

$$bx + x^2 = a^2$$

è risolto dalla proposizione 28.ª del medesimo VI libro e si trova senza limitazione alcuna, qualunque sia il valore di b (1).

Nè ciò basta, chè nel libro dei *Dati*, (2) opera oggidì non compulsata che dagli studiosi di storia delle matematiche, noi

---

(1) *Die Algebra der Griechen. Nach den Quellen bearbeitet* von Dr. G. H. F. NESSELMANN. Berlin, 1842, pag. 324-325.

(2) Crediamo opportuno di avvertire che a questo riguardo ci siamo tenuti all' edizione del GREGORY contenuta nell' opera: **ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.** *Euclidis quae supersunt omnia.* Ex recensione DAVIDIS GREGORIJ M. D. Oxoniae, MDCCIII.

Digitized by Google

troviamo talune proposizioni, le quali ci porgono il destro di entrare in maggiori particolari sulle cose anzidette e ci somministrano in pari tempo nuovi materiali per lo studio dell'argomento che ci siamo proposto (1).

Nella proposizione 58.ª dimostra Euclide che se alla retta data AD (*fig.* 1) sia applicato lo spazio dato AG, ma mancante della figura GD di data specie, dei lati cioè della quale BD, DP sia data la ragione e l'angolo $\widetilde{BDP}$ da essi compreso, saranno dati i lati medesimi. Infatti, dividendo per metà la retta data AD in E e sulla metà ED e sulla diagonale DG del dato parallelogrammo GD prolungata costruendo il parallelogrammo simile EZ, questo sarà per conseguenza dato in grandezza. Ma:

$$EZ = KT + EG + GZ + GD$$

$$= KT + 2EP - BP = KT + AG$$

$$KT = EZ - AG.$$

Dunque, essendo dati di grandezza questi due parallelogrammi, sarà ancor dato di grandezza il parallelogrammo KT. E poichè esso deve esser simile a quello GD, vale a dire dovendo essere:

$$KG : GT = BD : DP$$

e dato l'angolo compreso $\widetilde{KGT} = \widetilde{BDP}$, saranno distintamente dati

---

(1) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra. Storia Critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita* di D. PIETRO COSSALI. Vol. I. Parma, 1797, pag. 88-91, 269-272. — *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie,* ecc. par M. CHASLES. Bruxelles, 1837, pag. 11. — *Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik* von Doct. L. F. OFTERDINGER. Ulm. 1860, pag. 12.

Digitized by Google

i lati medesimi KG, GT. Sarà dunque data la retta $EB = KG$ e quindi $BD = ED - EB$ e finalmente anche il rapporto di DP a BD.

Scrivendo ora la proposizione sotto forma algebrica, sia $AG = a^2$, $AD = b$, $BD = x$ e sieno fra loro i lati BD, DP come $1 : m$, cosicchè sarà $DP = mx$. Essendo dato inoltre l'angolo D, e perciò $sen\ D$, l'altezza del parallelogrammo BP ed istessamente quella del parallelogrammo AG sarà: $mx\ sen\ D$.

Avremo adunque:

$$AG = AB \cdot mx\ sen\ D = (b - x)\ mx\ sen\ D$$

$$(1) \qquad = (bx - x^2)\ m\ sen\ D = a^2$$

La proposizione di Euclide consiste in ciò che per conseguenza saranno dati i valori x, mx: e la dimostrazione conduce a dire che, supposti quei dati, si ha:

$$(2) \qquad \left(\frac{1}{2}\,b - x\right)^2 m\ sen\ D = \frac{1}{4}\,b^2\ m\ sen\ D - a^2$$

che non è altro se non la (1) aumentata nell'uno e nell'altro dei due membri della quantità:

$$\frac{1}{4}\,b^2\ m\ sen\ D.$$

In conclusione adunque la proposizione d'Euclide viene a dire che data l'equazione (1), sarà dato x mediante la (2).

E se, per semplificare la cosa, supponiamo l'angolo D retto e poniamo $m = 1$, il senso della proposizione d'Euclide è che, data l'equazione:

$$(1') \qquad bx - x^2 = a^2$$

Digitized by Google

sarà dato x mediante l'equazione:

$$(2') \qquad \left(\frac{1}{2}b - x\right)^2 = \frac{1}{4}b^2 - a^2$$

che è in sostanza la (1') colla aggiunta di $\frac{1}{4}b^2$, cioè del quadrato della metà del coefficiente b di x, a ciascuno dei due membri. Il valore di x, che, seguendo i raziocinii di Euclide, si trae dalla equazione (2') è il solo:

$$x = \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a^2}.$$

In modo analogo nella proposizione 59.ª Euclide insegna che se sulla retta data AD (*fig.* 2) insista lo spazio dato AG eccedente della figura DG di data specie, saranno di questa dati i lati DB, DP, dimostrando, che, divisa per metà nel punto E la retta data AD e delineato l'intero schema, sarà dato il parallelogrammo KT perchè simile al DG ed insistente sopra la data $KP = \frac{1}{2}AD$ e quindi sarà pur dato il parallelogrammo:

$$EZ = KT + EP + PZ + DG$$

$$= KT + 2EP + DG = KT + AG$$

onde è dato EB, conseguentemente $DB = EB - ED$ e quindi DP in dato rapporto con DB.

Esponendo le cose anzidette sotto forma algebrica, l'equazione:

$$(bx + x^2)\, m\, sen\, D = a^2$$

sarà l'espressione dei dati supposti e la proposizione di Euclide

Digitized by Google

vorrà dire in generale: data questa equazione sarà dato x mediante l'equazione:

$$\left(\frac{1}{2}b + x\right)^2 m \, sen \, D = \frac{1}{4} b^2 \, m \, sen \, D + a^2$$

e nel caso più semplice di $sen \, D = 1$, ed $m = 1$, data l'equazione:

$$bx + x^2 = a^2$$

sarà dato x mediante l'altra equazione:

$$\left(\frac{1}{2}b + x\right)^2 = \frac{1}{4} b^2 + a^2$$

d'onde si ricava:

$$x = -\frac{1}{2} b + \sqrt{\frac{1}{4} b^2 + a^2}.$$

Premesse queste proposizioni, passa Euclide nelle successive 84.ª e 85.ª a dimostrare che se due rette (*fig.* 3 e 4) AB, BG comprendono in angolo dato B un dato spazio AG e sia data la differenza o la somma di esse rette, sarà eziandio data ciascuna di loro individualmente (1). Infatti immaginando presa sulla maggiore delle rette incognite BA (*fig.* 3) un tratto BD uguale alla minore BG e compiuto il rombo BP, sarà DA la differenza data delle due rette AB, BG, sulla quale starà applicato lo spazio

(1) Crediamo opportuno di riferire qui, a comodità del lettore, dalla fonte anzidetta (pag. 520-521); i dati in questione:

Prop. LXXXIV. *Si duae rectae spatium datum comprehendant in angulo dato, sitque altera altera major data, etiam unaquaeque ipsarum data erit.*

» LXXXV. *Si duae rectae datum spatium comprehendant in angulo dato, sitque simul utraque data, et earum etiam unaquaeque data erit.*

Digitized by Google

dato AG coll' eccesso della figura BP. E nella fig. 4, considerando AB prolungata da B in D finchè sia $BD = BG$, sarà AD la data somma $AB + BG$, sulla quale sarà applicato il dato spazio AG col difetto della figura BP. Dunque nell' una e nell' altra figura per le proposizioni 58.ª e 59.ª testè analizzate, verrà data BG e quindi $BA = AD \pm BG$. Esprimendo la questione sotto forma algebrica, poniamo $AB = x$, $BG = y$, la differenza o somma data $x \mp y = b$, il dato spazio compreso fra x ed y sotto l'angolo dato B, espresso per $xy\ sen\ B = a^2$: ora nella ipotesi di $B = 90^0$ abbiamo due equazioni, le quali somministrano immediatamente l' equazione quadratica:

$$x^2 - bx + a^2 = o$$

cosicchè la soluzione della questione proposta da Euclide fornisce le radici di questa equazione del secondo grado.

Quanto siamo venuti fin quì esponendo intorno agli *Elementi* ed ai *Dati* di Euclide fornisce adunque materiali preziosi per la storia della nostra questione, per quanto si riferisce in particolare alle equazioni quadratiche. E giustamente scrive il Cossali: » Io mi do a credere che non possa alcuno nei Dati LVIII, LIX non iscorgere sotto geometrica forma tutta l' arte della risoluzione delle equazioni di secondo grado, e non ravvisare nei Dati LXXXIV, LXXXV (1) due delle applicazioni di esse anche appresso di noi ordinarie. Nello spazio pertanto dei secoli, che passarono da Euclide a Diofanto, qual cosa più facile, che alcuno trasportasse dal geometrico all' aritmetico i Dati LVIII, LIX di Euclide, e così la soluzione stabilisse delle equazioni di secondo grado. »

Ma ciò non basta, imperocchè non sia difficile il riconoscere come nel medesimo libro dei *Dati* alle proposizioni 86.ª, 87.ª il

---

(1) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra*, ecc. di D. PIETRO COSSALI. Vol. I. Parma, 1797, pag. 91.

Digitized by Google

greco geometra insegni a risolvere le equazioni di quarto grado:

$$x^4 + qx^2 - n = o.$$

Euclide vi insegna infatti che se due rette x, y sotto un angolo dato A (*fig.* 4) comprendano uno spazio parallelogrammo di grandezza data, che segneremo con a^2, cioè se sia:

$$xy \operatorname{sen} A = a^2 \tag{1}$$

ed inoltre sia:

$$z^2 - b^2 : y^2 = h^2 : 1$$

essendo b^2, h^2 superficie date, verranno ad essere date le due rette x, y.

L'andamento della dimostrazione offerta da Euclide può algebricamente riassumersi come segue: Si costruisca un rettangolo equivalente a b^2, il che si otterrà mediante la proporzione:

$$z : b = b : \frac{b^2}{z}$$

quindi si tagli sulla retta z la porzione $\frac{b^2}{z}$ e sarà la rimanente $z - \frac{b^2}{z}$, il rettangolo $z \cdot \frac{b^2}{z} = b^2$ sarà dato e cangiandosi $z^2 - b^2$ in:

$$z^2 - z \cdot \frac{b^2}{z} = z\left(z - \frac{b^2}{z}\right)$$

sarà data la relazione:

$$z\left(z - \frac{b^2}{z}\right) : y^2 = h^2 : 1$$

Digitized by Google

Per la condizione (1) si ha:

$$zy = \frac{a^2}{sen\ A}$$

e di quì:

$$\frac{a^2}{sen\ A} : b^2 = zy : z \cdot \frac{b^2}{z} = y : \frac{b^2}{z}$$

e per conseguenza:

$$\frac{a^4}{sen^2\ A} : b^4 = y^2 : \frac{b^4}{z^2} .$$

Moltiplicando questa per la proporzione:

$$h^2 : 1 = z\left(z - \frac{b^2}{z}\right) : y^2$$

si ha:

$$\frac{a^4\ h^2}{sen^2\ A} : b^4 = z\left(z - \frac{b^2}{z}\right) : \frac{b^4}{z^2}$$

onde anche:

$$\frac{4a^4\ h^2}{sen^2\ A} : b^4 = 4z^2 - 4z \cdot \frac{b^2}{z} : \frac{b^4}{z^2}$$

e componendo:

$$\frac{4a^4\ h^2}{sen^2\ A} + b^4 : b^4 = 4z^2 - 4z\frac{b^2}{z} + \frac{b^4}{z^2} : \frac{b^4}{z^2} = \left(2z - \frac{b^2}{z}\right)^2 : \frac{b^4}{z^2}$$

ed estraendo le radici:

$$\sqrt{\left(\frac{4a^2\ h^2}{sen^2\ A} + b^4\right)} : b^2 = 2z - \frac{b^2}{z} : \frac{b^2}{z}$$

Digitized by Google

e componendo di nuovo:

$$\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)}+b^2 : b^2 = 2z : \frac{b^2}{z}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)}+\frac{1}{2}\,b^2 : b^2 = z : \frac{b^2}{z} = z\,\frac{b^2}{z} : \frac{b^4}{z^2} = b^2 : \frac{b^4}{z^2}$$

e quindi, estraendo nuovamente le radici:

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)}\right\}} : b = b : \frac{b^2}{z}$$

moltiplicando così quest' ultima come la:

$$\frac{a^2}{sen\,A} : b^2 = y : \frac{b^2}{z}$$

colla proporzione:

$$b^2 : \frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)} = \frac{b^2}{z} : z$$

si hanno le due seguenti espressioni:

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)}\right\}} : \frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)} = 1 : z$$

$$z\,\frac{a^2}{sen\,A} : \frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)} = y : z$$

invertendo la seconda e moltiplicando per la prima si ottiene:

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)}\right\}} : \frac{a^2}{sen\,A} = 1 : y$$

ed in fine si ottiene:

$$z = \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)}\right\}}$$

$$y = \frac{a^2}{sen\,A}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4\,h^2}{sen^2\,A}+b^4\right)}\right\}}}$$

Digitized by Google

Ora se in questa espressione del valore di y si moltiplichino e numeratore e denominatore per:

$$\sqrt{\left\{-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4h^2}{sen^2A}+b^4\right)}\right\}}$$

e si riduca, si avrà:

$$y=\frac{\sqrt{\left\{-\frac{1}{2}b^2+\sqrt{\left(\frac{4a^4h^2}{sen^2A}+b^4\right)}\right\}}}{h}.$$

Col sussidio dell'algebra dalle due equazioni date:

$$zy\,sen\,A=a^2 \qquad z^2-h^2y^2=b^2$$

trasportando dalla prima alla seconda l'espressione di:

$$y=\frac{a^2}{z\,sen\,A}$$

si forma l'equazione:

$$z^4-b^2z^2-\frac{a^2h^2}{sen^2A}=o$$

e risolvendola si ottiene:

$$z^2=\frac{1}{2}b^2+\sqrt{\left(\frac{4a^4h^2}{sen^2A}+b^4\right)}$$

e quindi:

$$y=\frac{z^2-b^2}{h^2}=\frac{-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^4h^2}{sen^2A}+b^4\right)}}{h^2}$$

o viceversa, trasportando dalla prima delle date equazioni nella seconda la espressione di:

$$z=\frac{a^2}{y\,sen\,A}$$

Digitized by Google

formata l'equazione:

$$y^4 + b^2 y^2 - \frac{a^4}{sen\ A} = o$$

si ottiene risolvendola il valore di y^2 e da esso quello di z^2 e quindi quelli di z, y.

Non v'ha dubbio quindi che le proposizioni 86.ª ed 87.ª dei *Dati* di Euclide contengano la risoluzione di due equazioni comprese cumulativamente sotto la forma:

$$x^4 \pm qx^2 - n = o\,.$$

Nella proposizione 86.ª Euclide assume h^2 in concetto indeterminato e generale, nella 87.ª assegna ad esso il valore uno. Ora pretende il Gregory (1) che quella proposizione debba leggersi diversamente e che in luogo della condizione espressa dalla proporzione:

$$z^2 - b^2 : y^2 = h^2 : 1$$

Euclide supponesse data l'eguaglianza:

$$b^2 - y^2 = z^2$$

ma ciò per il contesto non apparisce conforme al vero. Senza pertanto attribuire ad Euclide la risoluzione della equazione:

$$z^4 - b^2 z^2 + \frac{a^4}{sen^2\ A} = o$$

---

(1) Ecco il testo di questi altri due dati (pag. 521-522):

Prop. LXXXVI. *Si duae rectae datum spatium comprehendant in angulo dato, quadratum autem unius quadrato alterius majus sit, dato, quam in ratione; et utraque ipsarum data erit.* Oppure secondo un'altra versione: *Si duae rectae datum spatium comprehendant in angulo dato, possit autem altera altera majus, dato, quam in ratione, et utraque ipsarum data erit.*

» LXXXVII. *Si duae rectae datum spatium comprehendant in angulo dato, possit autem altera altera majus, dato; et earum utraque data erit.*

Digitized by Google

ovvero:

$$y^4 - b^2 y^2 + \frac{a^4}{sen^2 A} = o$$

che si ricaverebbe dalle due condizioni suaccennate e che spetterebbero alla forma:

$$x^4 - qx^2 + n = o$$

è pur mestieri riconoscergli la determinazione delle incognite nelle equazioni delle forme:

$$x^4 \pm qx^2 - n = o.$$

Interessante al sommo riesce il confronto fra il metodo algebrico del quale si è quì rivestito il procedimento seguìto da Euclide e lo squisito ragionare al quale è informata l'analisi geometrica del greco matematico (1).

Le più recenti indagini assoggettate alla critica più severa hanno posto fuori di dubbio che i Greci costruirono problemi del terzo grado. Lo stesso dottissimo Woepcke, che dapprima (2) aveva asserito contenersi in tale opinione se non un errore, almeno una inesattezza, riconobbe in seguito (3) che un tal merito non

---

(1) Non crediamo opportuno d'insistere ulteriormente intorno ai materiali che gli scritti di EUCLIDE potrebbero somministrare, ci limiteremo soltanto a segnalare le ripetute applicazioni che le proposizioni 27.ª-29.ª del VI libro degli *Elementi* trovano nel libro X. Intorno al metodo geometrico applicato alle ricerche aritmetiche veggasi in particolare: *Zur Kenntniss der geometrischen Methode der Alten. In besonderer Beziehung auf die platonische Stelle in Meno* von E. F. AUGUST. Berlin, 1843.

(2) *L' Algèbre d' Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d' extraits de manuscrits inédits*, par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LI, pag. xij.

(3) *Sur la construction des équations du quatrième degré par les géomètres arabes;* par M. WOEPCKE. Nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées* publié par LIOUVILLE. Deuxième Série - Tom. VIII. — Année 1863. Paris, 1863, pag. 57.

Digitized by Google

Fig. 1

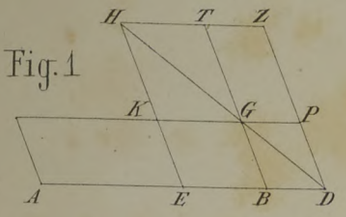


Fig. 2

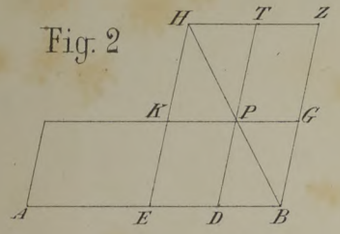


Fig. 3

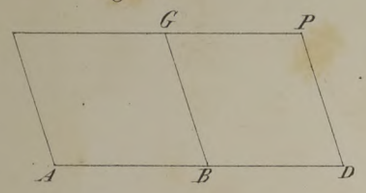


Fig. 4

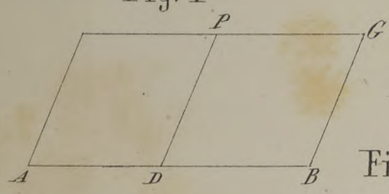
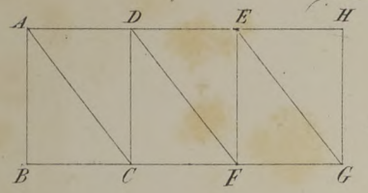


Fig. 5



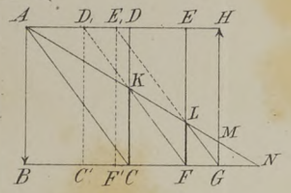


Fig. 6.

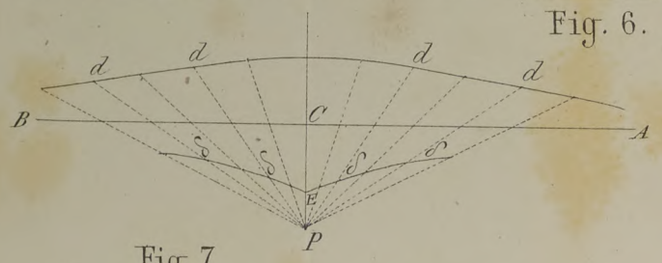


Fig. 7

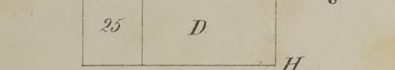


Fig. 8

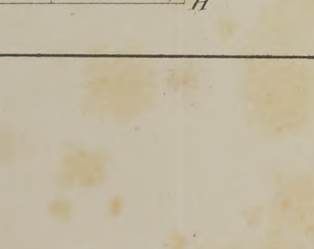


Fig. 9

Fig. 10

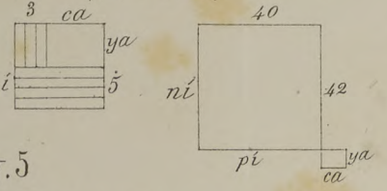


Fig. 11

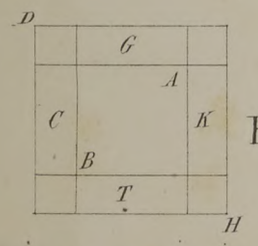


Fig. 12

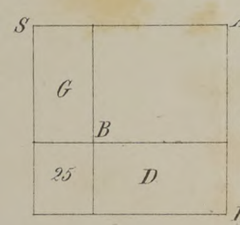


Fig. 13

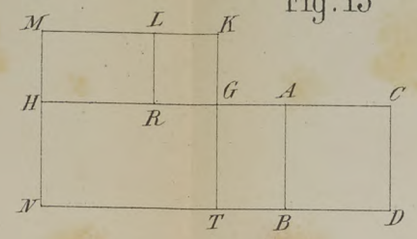


Fig. 14

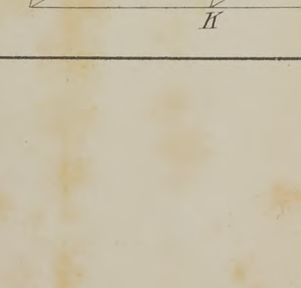


Fig. 15

Fig. 16

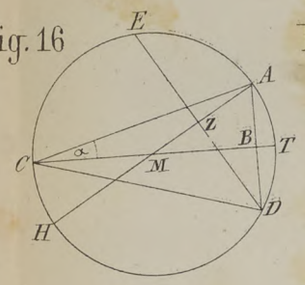


Fig. 17

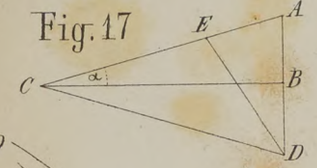


Fig. 18

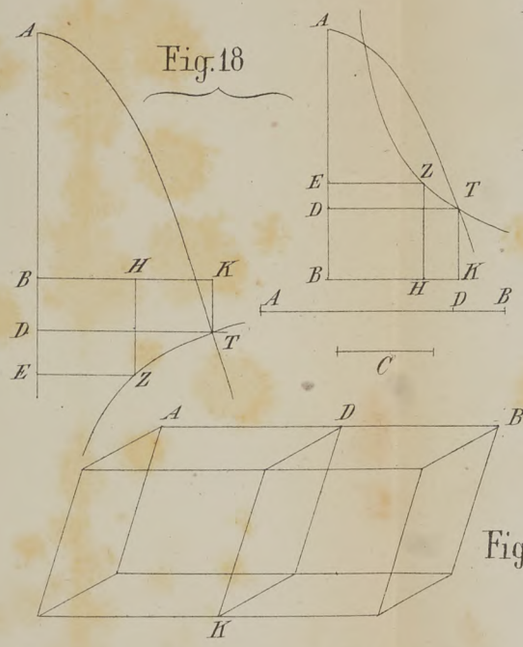


Fig. 19

Fig. 20

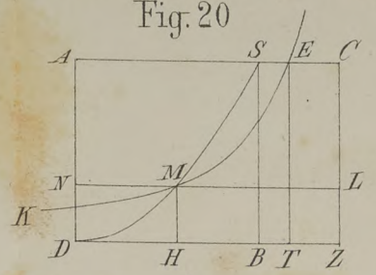


Fig. 21

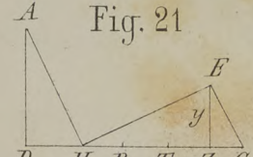


Fig. 22

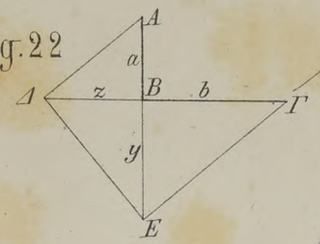


Fig. 23

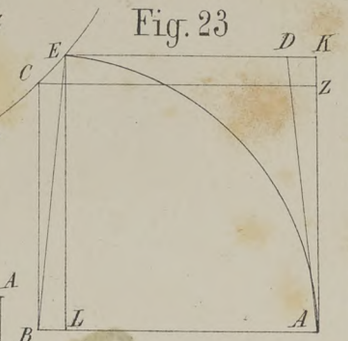


Fig. 24

Fig. 25

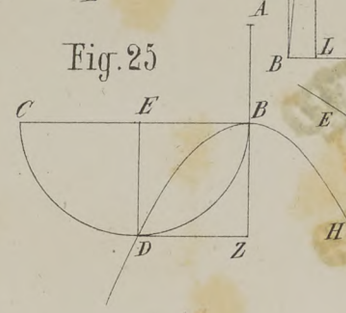


Fig. 26

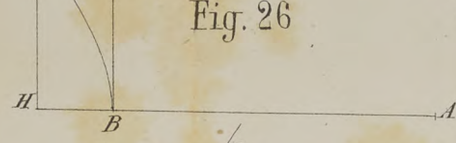


Fig 27

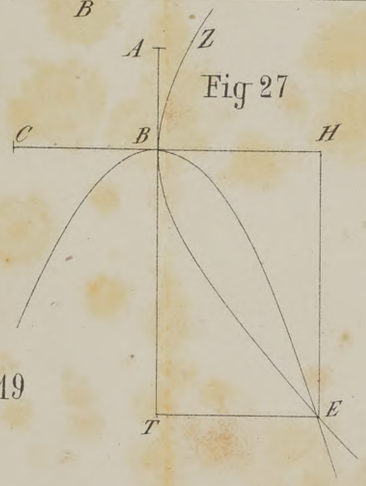


Fig. 28

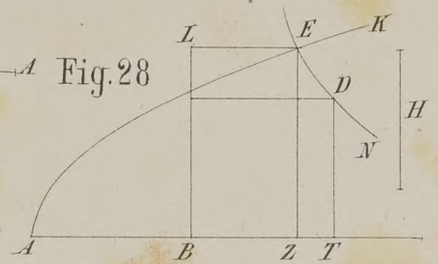
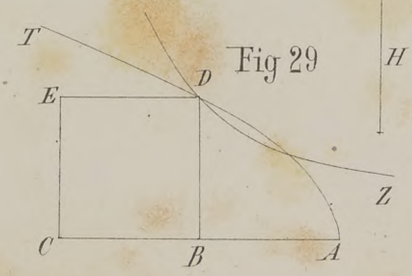


Fig 29



Digitized by Google

Fig. 29 2

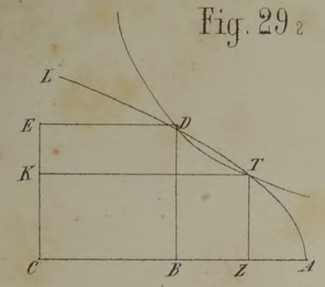


Fig. 29 3

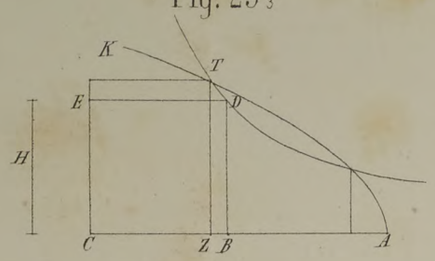


Fig. 33

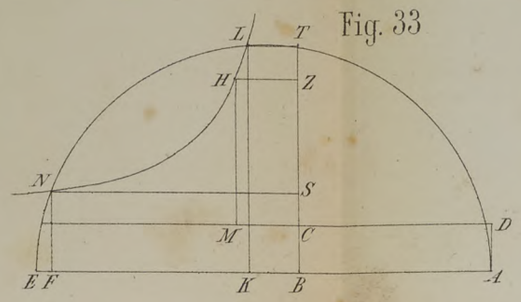


Fig. 39

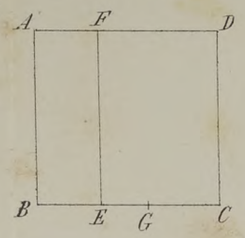


Fig. 40

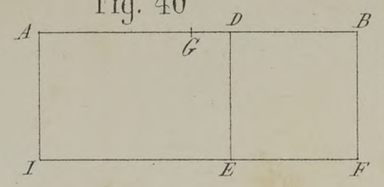


Fig. 30

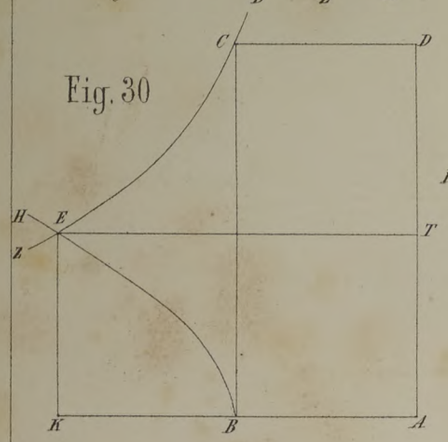


Fig. 34

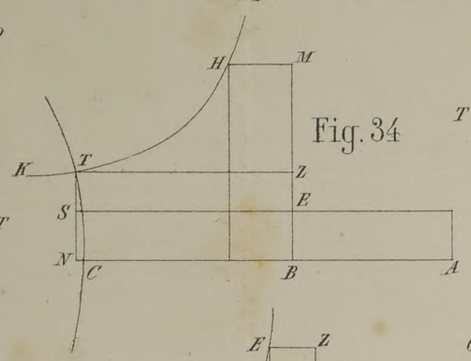


Fig. 36 1

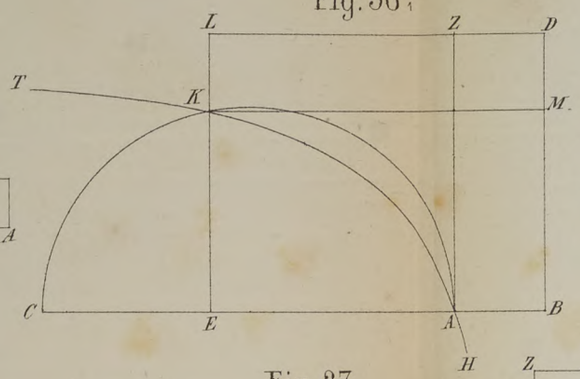


Fig. 41

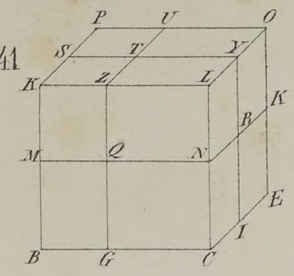


Fig. 42

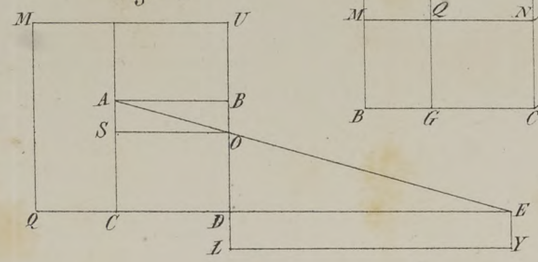


Fig. 35 1

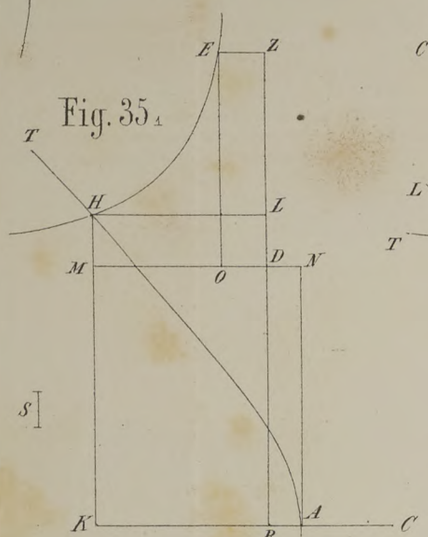


Fig. 37 1

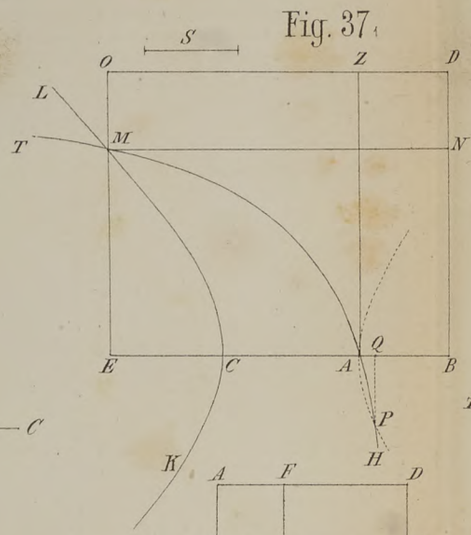


Fig. 36 2

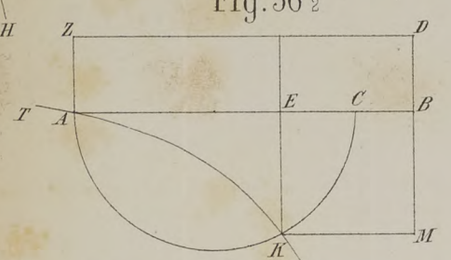


Fig. 43

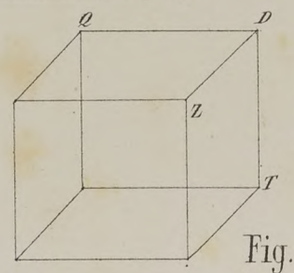


Fig. 31

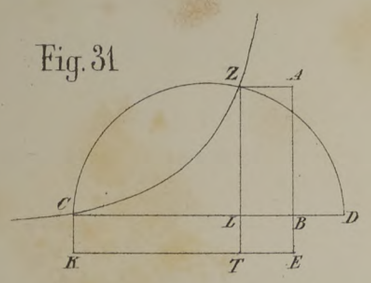


Fig. 32

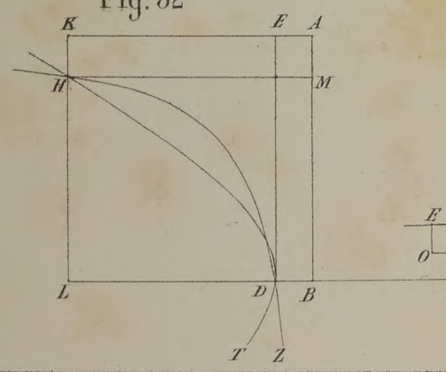


Fig. 35 2

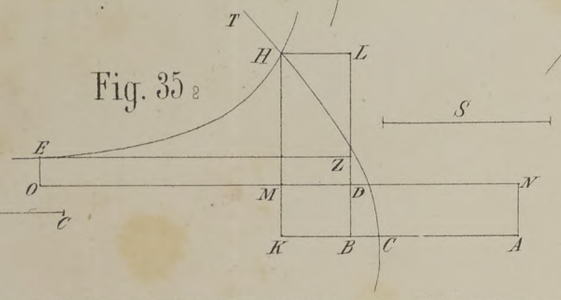


Fig. 38

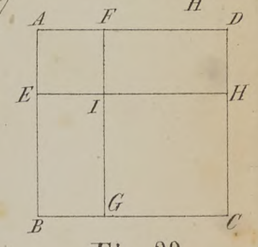


Fig. 37 2

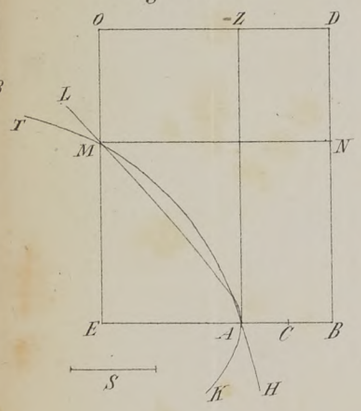


Fig. 44

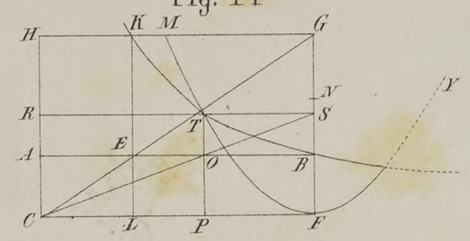
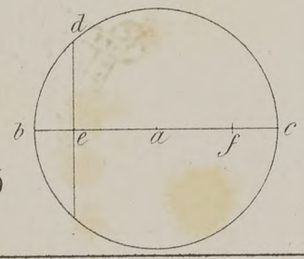


Fig. 45



Barbieri & C.

Digitized by Google

Digitized by Google

può essere negato a quegli antichi matematici. Certamente noi non vorremo affermare che fosse completamente nota ai Greci la risoluzione dei problemi di terzo grado, ma niuno negherà che i geometri greci non solo hanno risolto taluni problemi geometrici, che, ridotti alla loro espressione algebrica, conducono ad una equazione cubica, ma altresì costruirono effettivi problemi di terzo grado, approfittando dell' intersezione di due coniche.

Lo svolgimento storico di taluni problemi, a più titoli celebri, fornisce interessanti materiali alla attuale indagine. Tale è per modo di esempio il famoso problema della duplicazione del cubo (3).

Chiamando con a il lato del cubo primitivo, si trattava di formare un cubo, il cui volume fosse $2a^3$ ed il cui lato fosse per conseguenza $a\sqrt[3]{2}$, problema che aritmeticamente non si sapeva risolvere ed alla cui soluzione geometrica non poteva pervenirsi mercè il cerchio e la retta, soli mezzi geometrici, dei quali allora si disponeva.

Solo intorno all'anno 450 a C. fu fatto un passo verso la soluzione di questo problema. Fu infatti Ippocrate di Chio che dimostrò potersi il problema enunciare nel modo seguente: trovare fra due grandezze date due medie proporzionali (*τῶν δύο μέσων*) geometriche.

---

(1) Fra le moltissime fonti contenenti la storia di tale questione veggansi in particolare le seguenti: REIMER. *Historia problematis de cubi duplicatione.* Göttingen, 1798. — BIERING. *Historia problematis cubi duplicandi.* Hauniae, 1844. — *Notice historique sur la duplication du cube* nel *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques* annesso ai *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Tome Quinzième. Paris, 1856. — BLASS. *De Platone mathematico.* Bonn, 1861, pag. 23 e seg. — Intorno a questo argomento stese una dissertazione il MASCHERONI, dissertazione che è tuttora inedita.

Digitized by Google

Infatti, ponendo:

$$a : x = x : y = y : 2a$$

ed eliminando y dalle due equazioni che se ne ricavano, si ottiene:

$$x^3 = 2a^3$$

E quando, circa mezzo secolo più tardi, nuovamente fu richiamata sul problema l'attenzione dei geometri greci per il ben noto responso dell'oracolo di Delo, è una soluzione meccanicografica (*οργανικαί*), che, secondo la versione non del tutto degna di fede, di Eutocio di Ascalona, (1) ne diede Platone istesso, mediante uno strumento composto di due righe, una delle quali si scosta parallelamente all'altra, scorrendo fra le scanalature di due ascendenti perpendicolari alla prima. Geometrica e meglio informata a spirito scientifico quella di Archita, a cui egli riescì mediante una curva a doppia curvatura; (1) con tutta probabilità ottenute mediante le sezioni coniche od altre curve speciali quelle di Menecmo e di Eudosso.

---

(1) Anzitutto questa soluzione non è menzionata da alcun autore anteriore ad EUTOCIO ed inoltre la soluzione meccanica di un problema geometrico non sembra conciliabile colle idee di PLATONE, il quale, se dobbiamo credere a PLUTARCO (*Sympos.* VIII, 2), si espresse con biasimo sulle soluzioni con metodi meccanici fornite da EUDOSSO, da ARCHITA e da MENECMO. Non può d'altra parte tacersi che, ammettendo vero quanto riferisce PLUTARCO, non solo sarebbe sospetta l'autenticità del metodo meccanico di PLATONE, ma altresì lo sarebbe quella dei metodi *geometrici* di ARCHITA, di MENECMO e di EUDOSSO.

(1) Veggasi una chiara e completa esposizione del metodo di ARCHITA nell'opera *Geometria di sito sul piano e nello spazio* di V. FLAUTI. Seconda edizione con alcune addizioni. In Napoli, 1821, pag. 173-175. Quivi è dimostrato che la soluzione data dal matematico tarantino è ben altro che una « curiosité géométrique, uniquement propre à satisfaire l'esprit, et dont la pratique ne sauroit tirer aucun secours » come ebbe a qualificarla il MONTUCLA (*Histoire des Mathématiques*. Nouvelle Édition. Tome Premier. A Paris, An VII, pag. 175).

Digitized by Google

Menecmo infatti ottenne due soluzioni: nella prima costruisce due parabole che hanno un vertice comune, gli assi fra loro perpendicolari e per parametri rispettivi il lato del cubo dato ed il doppio di questo lato: allora le due ordinate condotte al punto di intersezione delle curve sono le due medie proporzionali cercate. La seconda approfitta della intersezione d'una parabola e d'una iperbole equilatera fra i suoi assintoti: la parabola ha per parametro il lato del cubo dato, o il doppio di questo lato, il suo vertice è il centro ed il suo asse è uno degli assintoti dell'iperbole equilatera; la potenza dell'iperbole è il prodotto del lato del cubo dato nel doppio di questo lato. Finalmente le ordinate delle due curve, condotte al punto d'intersezione sono le due medie proporzionali cercate.

Osserva il Bossut (1) che tali soluzioni offrirebbero tutti i vantaggi delle costruzioni geometriche, nel senso che gli antichi attribuivano a questa espressione, ove vi fosse un conicografo altrettanto semplice quanto il compasso per il cerchio.

Si è trovato in seguito che si poteva raggiungere il medesimo scopo coll'intersezione d'un cerchio e d'una parabola: semplificazione facile che nulla toglie del resto al merito di Menecmo, merito che diventa tanto più considerevole, ove si rifletta che la di lui scoperta contiene in sè stessa il germe di due grandi e feconde dottrine, quella cioè dei luoghi geometrici (2) e quella dell'analisi geometrica. Quest'ultima, riguardando un problema come risolto e trattando indifferentemente le quantità incognite

---

(1) *Saggio sulla storia generale delle Matematiche* di CARLO BOSSUT. Tomo Primo. Milano, 1802, pag. 42.

(2) Avvertiamo espressamente che MENECMO non fu egli stesso l'inventore di questa dottrina. MONTUCLA (*Histoire des Mathématiques.* Nouvelle édition. Tome Premier. A Paris, An VII, pag. 171) e CHASLES (*Aperçu historique,* Bruxelles, 1837, pag. 5) la attribuiscono alla scuola di PLATONE: G. JOHNSTON ALLMAN (*Greek Geometry from Thales to Euclid.* Dublin, 1877, pag. 171) la fa risalire a TALETE, appoggiando la sua argomentazione con valide ragioni.

Digitized by Google

come le note, insegna a pervenire di ragionamento in ragionamento, di conseguenza in conseguenza ad una espressione che è per così dire, la traduzione geometrica di tutte le condizioni del problema proposto.

Menzioneremo ancora la soluzione del problema delle due medie proporzionali dovuta ad Eratostene, l'inventore del ***κοσκινον*** (1). Di lui è rimasta una lettera a Tolomeo Evergete, conservataci da Eutocio di Ascalona, nel suo commentario ai libri di Archimede della sfera e del cilindro, (2) lettera nella quale troviamo una particolareggiata narrazione storica del problema della duplicazione del cubo, assieme alla soluzione che ne diede Eratostene istesso, mercè il suo famoso *mesolabium*. Consisteva questo strumento di tre tavolette di legno, d'avorio o di metallo, rattangolari ed uguali, strette fra due regoli, ciascuno dei quali era munito di tre scanalature tali che le tavolette potessero scorrere le une sulle altre. Ora, se la posizione iniziale era (*fig.* 5) $ABCD$, $CDEF$, $EFGH$ e le rette fra le quali dovevansi riferire le due medie proporzionali erano $AB > GM$, non avevasi che a portare i rettangoli nelle successive posizioni $ABCD$, $C'D'EF$, $E'F'GH$, le quali coprissero le porzioni $D'K$, $E'L$ delle diagonali segnate nei rettangoli, riducendosi i punti K ed L, così determinati, in linea retta con A ed M; KC ed LF sono le due medie proporzionali cercate.

---

(1) Cfr. *Del vaglio di Eratostene e della illustrazione fattane da Samuele Horsley negli Atti della R. Società di Londra.* Memoria del prof. Cav. BARTOLOMEO VERATTI inserita nel Tomo III delle *Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena.* Modena, 1859.

(2) ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ. *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis.* Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 144-146. — GODOFR. BERNHARDY. *Eratostenica.* Berlin, 1822, pag. 176 180.

Essendoci proposti di trattare qui semplicemente della costruzione dei problemi del terzo grado, ci limiteremo ad accennare semplicemente, come in questo stesso luogo (pag. 145) si trovino esplicite indicazioni dello stesso ERATOSTENE intorno alla costruzione d'una equazione del quinto grado.

Digitized by Google

Pappo (1) nelle sue *Collezioni Matematiche* propose un metodo ingegnoso per trovare le due medie proporzionali del problema della duplicazione, e in generale della moltiplicazione del cubo (2).

---

(1) Giacchè ci siamo prefissi di non trascurare talune applicazioni della geometria all'aritmetica, ci permettiamo qui una breve digressione.

È noto che nelle sferiche di MENELAO si contiene una importantissima proposizione (1ª del Libro IV) che fu assai verosimilmente la base di tutta la trigonometria sferica dei Greci. È questa una proprietà dei sei segmenti fatti sopra i tre lati d'un triangolo sferico da un arco di cerchio massimo qualunque. MENELAO diede pure il suo analogo nel piano come lemma alla dimostrazione del primo.

Su questo teorema TOLOMEO fondò la sua trigonometria, anzi esso porta impropriamente il di lui nome.

Ora noi troviamo che PAPPO lo dimostrò e se ne servì nel libro VIII delle sue *Collectiones mathematicae* per una curiosa proposizione sul baricentro di tre mobili che percorrono i tre lati d'un triangolo.

Nel XVI secolo, dopochè PEURBACH e REGIOMONTANO lo riprodussero (*Cl. Ptolemaei Alexandrini in magnam constructionem* G. PURBACHII cujusque discipuli J. DE REGIOMONTE *astronomicon epitome.* Venetiis, 1496), fu reso famigliare a tutti i geometri.

Come già fu detto, qui abbiamo voluto farne cenno per menzionare talune applicazioni che se ne fecero a questioni aritmetiche. ORONZIO FINEO (*Arithmetica pratica, libris quatuor absoluta* etc. 1538, Lib. IV, Cap. V) e STIFEL (*Arithmetica integra.* Norimbergae. 1544, Lib. III, pag. 294) ne fecero uso per dimostrare geometricamente la cosidetta *regola aritmetica delle sei quantità* che consiste nel risolvere la seguente questione: Il rapporto d'una prima quantità ad una seconda, essendo composto del rapporto di una terza ad una quarta e del rapporto di una quinta ad una sesta, trovare il rapporto d'una qualunque delle seconda, terza, e quarta quantità ad una qualunque delle altre tre. CARDANO (*Practica arithmeticae et mensurandi singularis.* Mediolani, 1539. cap. XLVI. — *Opus novum de proportionibus numerorum.* Basileae, 1570, Prop. 5ª), GEMMA FRISIO (*Arithmeticae practicae methodus facilis.* Antwerpiae, 1540) e SCHOONER (*Algorithmus demonstratus.* Norimbergae, 1534, *de proportionibus appendix*), senza costruire la figura geometrica, l'indicarono al medesimo uso. BRESSIUS (*Metricis Astronomiae* libri quatuor. Parisiis, 1581. Lib. IV, Prop. XIII) se ne valse per la dimostrazione di parecchie formule di trigonometria. — Cfr. *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en Géométrie* par M. CHASLES. Bruxelles, 1837, pag. 291-293.

(2) Lib. VIII. Prop. 11.

Digitized by Google

Colle due linee estreme forma i due lati d'un triangolo rettangolo: dal vertice dell'angolo retto, col lato maggiore per raggio, descrive un semi-cerchio che ha conseguentemente per diametro il doppio di questo lato: conduce dalle due estremità del diametro due rette indefinite, una delle quali ha la medesima direzione dell'ipotenusa, l'altra va a tagliare quella prolungata, il lato minore del triangolo altresì prolungato e la semi-circonferenza: egli fa in modo che di questi tre punti di intersezione, quello di mezzo sia situato ad uguale distanza dagli altri due. Per tal maniera la distanza di questo medesimo punto medio dal centro risulta la maggiore delle due medie proporzionali domandate.

Più elegante di questa è la soluzione proposta da Diocle e che si ottiene mediante la sua cissoide (1). Questa curva si costruisce descrivendo un semi-cerchio sopra il doppio della linea maggiore estrema, come diametro, innalzando ad una delle estremità del diametro una perpendicolare indefinita che serve di direttrice, conducendo dall'altra estremità quante si vogliono trasversali che vadano a tagliare la semi-circonferenza e la direttrice e prendendo sopra ciascuna trasversale un punto tale che la sua distanza dall' origine sia uguale alla parte fra la circonferenza e la direttrice: la serie di questi punti forma la cissoide. In seguito si costruisce il triangolo di Pappo e la cissoide va a tagliare il prolungamento dell'ipotenusa in un punto per cui deve passare la trasversale che determina sul prolungamento del minor lato del triangolo, il punto medio di Pappo.

Havvi un altro problema dello stesso genere e del medesimo ordine di difficoltà del precedente e che deve pure essere stato scopo di indagini da parte della scuola platonica. Alludiamo alla così detta trisezione dell' angolo, che, più per induzione che

---

(1) *Archimedis quae supersunt omnia*, ecc. Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 138-139.

Digitized by Google

per certi documenti, è da farsi risalire alla stessa epoca di quello, del quale abbiamo finora trattato.

Questo problema, come quello della duplicazione del cubo, contribuì notevolmente ai progressi della geometria e, com'esso, conduce ad una equazione del terzo grado, colla differenza per tanto che mentre l'equazione relativa alla duplicazione del cubo non ha che una sola radice reale, quello della trisezione dell'angolo ha le sue tre radici reali.

Se infatti dal vertice dell'angolo da dividersi come centro, con raggio uguale all'unità di lunghezza si descrive un cerchio e se dal punto estremo d'uno dei lati dell'angolo, determinato dalla sua intersezione col cerchio, si abbassi una perpendicolare sull'altro lato, sul quale essa taglierà fuori a partire dal vertice un segmento a, se inoltre si formi un angolo uguale ad un terzo del proposto mediante quel lato su cui fu determinato a e un altro raggio, e se dall'estremo di questo raggio si abbassa nuovamente una perpendicolare, la quale determini sull'altro lato il segmento x, fra a ed x avrà luogo la relazione:

$$a = 4x^3 - 3x.$$

Quantunque lo stato della scienza geometrica non permettesse a quei tempi di formulare per tal modo il problema, pure si comprese tosto che si trattava d'un caso, la cui soluzione eccedeva la portata della geometria elementare, quindi la quadratrice (*τετραγωνίζουσα*) di Dinostrato, (1) curva che avrebbe offerto il doppio vantaggio di dare la trisezione o la moltiplicazione dell'angolo e la quadratura del cerchio (e di quì appunto il suo nome) ove si fosse potuto descriverla per mezzo d'un moto con-

(1) PAPPI *Collectiones mathematicae.* Lib. IV, Prop. XXVI. — PROCLO tuttavia attribuisce l'invenzione di questa curva ad IPPIA contemporaneo di SOCRATE. Cfr. PROCLI DIADOCHI LYCII *in primum Euclidis Elementorum librum Commentariorum Libri IIII.* Patavii, 1560, pag. 155.

Digitized by Google

tinuo colla riga e col compasso. Essa risulta dalla intersezione dei raggi d'un quadrante con una riga che si fa muovere uniformemente e parallelamente ad uno dei raggi estremi del quadrante.

Alla soluzione dei due problemi, della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo è applicabile la concoide di Nicomede (1). Siccome intorno a questa curva dovremo ritornare nel seguito di questo lavoro, così crediamo opportuno di entrare in alcuni particolari relativamente alla sua costruzione.

Abbiasi una linea retta indefinita AB (*fig.* 6) ed un punto P preso fuori di essa, dal quale sia abbassata la perpendicolare PCD e sieno condotte quante si vogliono rette Pcd. Se si suppone che tutte le rette CD, cd sieno uguali fra loro, la linea che passerà per tutti i punti D, d sarà la concoide, della quale il punto P sarà il polo. Essa prende il nome di concoide superiore, allorchè le CD, cd costanti sono prese al di là della base AB rispetto al polo P. Ma se, come può farsi, si prendessero le CE, $c\delta$ fra di loro uguali, al di sotto di questa base, la linea passante per i punti δ sarebbe chiamata concoide inferiore. Così la concoide sarebbe descritta con un movimento continuo, se avendosi una retta indefinita DCE e la parte CD essendo determinata ed invariabile, si facesse muovere questa linea in modo che il punto C percorresse la AB, continuando sempre la DCE a passare per il punto P: allora il punto D passando successivamente per i punti d descriverebbe la concoide. Lo stesso può ripetersi per il punto E se si suppone CE presa al disotto della base. Ora si riconosce facilmente che comunque sia inclinata la cd e per quanto disti da C, vale a dire per quanto sia grande la base CB, il punto d non raggiungerà mai la CB, quantunque le si approssimi infinitamente. Così la retta AB è un assintoto della curva. Nicomede dopo inventata

---

(1) *Archimedis quae supersunt omnia*, ecc. Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 146-149. — Sopra questa applicazione avremo occasione di intrattenerci a lungo più innanzi, tenendo parola dei lavori di NEWTON sulla costruzione delle equazioni.

Digitized by Google

la curva, volle ottenerne il tracciamento mediante un moto continuo e raggiunse questo scopo fissando una riga e facendo girare intorno ad uno dei suoi punti un'altra riga munita di due stili, che si tengono sempre ugualmente lontani l'uno dall'altro: il primo stile percorre la riga fissa, il secondo descrive la curva.

Anche all'infuori della letteratura relativa ai problemi, dei quali siamo venuti occupandoci fin quì, la scuola greca ci somministra numerosi ed importanti materiali per la storia della costruzione grafica dei problemi di terzo grado. Così, per modo di esempio, parecchie costruzioni di simil genere si riscontrano nei commentarii di Eutocio al *Trattato della sfera e del cilindro* di Archimede, e particolarmente risguardanti il problema seguente: (1) » *Data recta* AB, *aliaque item* AΓ, *spatioque* Δ; *proponatur sumendum in* AB *punctum aliquod* E *ejusmodi, ut quemadmodum* AE *ad* AΓ, *ita se habeat spatium* Δ *ad quadratum, quod ab* EB *describitur.* » Per amore di brevità noi non ci fermeremo a discutere queste costruzioni ottenute mediante intersezioni di parabole e di iperbole e piuttosto fisseremo la nostra attenzione sopra la proposizione quinta del secondo libro del trattato in questione, poichè essa riveste per noi un carattere di particolare importanza per gli studii ai quali in seguito porse occasione. La proposizione è così enunciata da Archimede (2): *Datam sphaeram secare, ita ut sphaerae segmenta eamdem ac quae data est inter se invicem rationem habeant.* Dimostra Archimede che questo problema dipende dalla seguente costruzione: Data una retta DZ e su di essa due punti B, T tali che B sia situato fra D e T, determinare un punto X della retta DZ tale che si abbia:

$$XZ : ZT = (BD)^3 : (DX)^3.$$

---

(1) *Archimedis quae supersunt omnia*, ecc. Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 164-169.

(2) *Archimedis quae supersunt omnia*, ecc. Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 157.

Digitized by Google

Riconduciamo questo problema alla sua espressione algebrica, denotando rispettivamente BD, ZT, ZD, DX con a, b, c, x, si tratterà di determinare x, mediante la proporzione:

$$(c - x) : b = a^2 : x^2$$

vale a dire, costruire l'equazione cubica:

$$x^3 + a^2 b = cx^2.$$

Verso la fine della proposizione, (1) Archimede promette di darne la costruzione, ma essa però non vi si trova (2).

---

(1) *Archimedis quae supersunt omnia*, ecc. Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 158.

(2) Crediamo far cosa grata al lettore riproducendo qui le ragioni che di tale omissione dà EUTOCIO: « Id quidem Archimedes se facturum in fine pollicitus est; nec tamen in ullo exemplari invenitur, quod pollicitus erat eum praestitisse. Quapropter Dionysodorus a diversis principiis orsus cum in lemma, quod Archimedes sibi sumpsit, incidere non potuerit, aliam totius problematis conficiendi rationem iniit, quam deinceps describemus. Diocles quidem ipse in libro, quem de igniariis conscripsit, existimans Archimedem promisso, quod hac de re fecerat, nunquam satisfecisse, eidem satisfacere aggressus est. Quam autem rationem inierit, deinceps videbimus. Nihil enim habet ne ista quidem, quod cum lemmate illo conveniat; quippe, haud secus quam Dionysodorus, aliam ingressus demonstrandi viam problema conficit. Porro haec theoremata in vetusto quodam libro; plures enim conquisivimus; scripta invenimus, quae valde obscura erant propter menda, quae irrepserant, figurasque maltifariam depravatas. Quae porro quaeruntur, proposita erant Dorica lingua, quam Archimedes imprimis amat, aliqua ex parte servata nominibusque rerum apud veteres usitatis. Quippe parabole, et hyperbole, altera quidem rectanguli, altera vero obtusangoli coni sectio vocabatur: ut ex iis animum subeat cogitatio, num ipse sit, qui, quod in fine se facturum pollicitus erat, id praestare aggrediatur. Quod circa studiosus conati, cum orationem, ut diximus, difficilem propter mendorum multitudinem nacti simus, singulas ejus sententias paulatim aperire, magisque clare ac populariter, quantum fieri verbis poterit explicare conabimur. » (*Archimedis quae supersunt omnia*, ecc. Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 163). Qui seguono le costruzioni contenute nel commentario di EUTOCIO, delle quali si è fatta superiormente parola.

Digitized by Google

Dalla presente rassegna ci sembra di non dover escludere la dottrina geometrica dei massimi e minimi di Apollonio, la quale presenta soluzioni di interessanti problemi, ottenute con una semplicità ed eleganza che non si possono abbastanza ammirare, e ricorderemo ancora quanto strettamente si leghi alla costruzione grafica delle equazioni l'uso che delle coniche fece lo stesso Apollonio (1).

Non aggiungeremo ipotesi sulle opere dei matematici greci, delle quali non ci rimasero che i titoli, vogliamo pur tuttavia ricordare come fondate induzioni permettano di attribuire ad Ipparco un diffuso trattato relativo alla costruzione delle equazioni del secondo grado (2).

Quantunque le regole aritmetiche immaginate da Pitagora e da Platone per ottenere sistemi indeterminati di triangoli rettangoli i cui lati sieno espressi mediante numeri interi non sembrino legarsi all'argomento nostro così strettamente come le cose finora esposte, pure crediamo opportuno tenerne parola quì, per il ripetuto richiamo che avremo motivo di farne in seguito. Queste regole ci furono conservate da Proclo (3).

---

(1) *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en Géométrie* par M. CHASLES. Bruxelles, 1837, p. 18. — *Die Anfänge und die Entwickelungsstadien des Coordinatenprincipies* von Prof. Dr. SIEGMUND GÜNTHER, (inserito nel tomo sesto delle *Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Nürnberg*) pag. 10. — *Le origini ed i gradi di sviluppo del principio delle coordinate* del prof. Dott. SIGISMONDO GÜNTHER. Traduzione dal tedesco con note del dott. GIOVANNI GARBIERI (inserito nel tomo decimo del *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche*). Roma, 1877, p. 10.

(2) *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits* par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LI, pag. xj. — La testimonianza di altre opere di Ipparco oltre alle astronomiche si trova presso PLUTARCO, il quale lasciò scritto (*Opera omnia*. Ed. di Parigi 1624, t. III, p. 1047): *Χρύσιππον δὲ πάντες ἐλεγχουσιν οἱ ἀριθμητικοὶ ὦι καὶ Ἵππαρχός ἐστιν.*

(3) PROCLI DIADOCHI LYCII *in primum Euclidis Elementorum librum commentariorum libri IIII.* Patavii, 1560, pag. 271-272. — *Die Algebra der Griechen nach den Quellen bearbeitet* von Dr. G. H. F. NESSELMAN, Berlin, 1842, p. 149-153.

Digitized by Google

Traducendo il passo relativo nel linguaggio algebrico odierno, il procedimento immaginato da Pitagora che ha esclusivamente per iscopo di formare dei triangoli rettangoli coi tre lati espressi da numeri interi, uno di essi essendo dato e dispari, si enuncia come appresso. Prendete un numero dispari qualunque z, che rappresenterà il più piccolo dei lati dell'angolo retto, formate due altri numeri y ed x tali che si abbia:

$$y = \frac{1}{2}(z^2 - 1) \qquad x = \frac{1}{2}(z^2 + 1)$$

y sarà il lato maggiore dell'angolo retto, x la ipotenusa, ambedue espressi per numeri interi. Proclo mostra inoltre l'applicazione del principio ad un esempio particolare in cui $z = 3$, si avrebbe allora $y = 4$, $x = 5$ e la imposta condizione sarebbe con ciò pienamenie soddisfatta.

La dimostrazione generale si scorge subito, ponendo l'identità:

$$\frac{1}{4}(z^2 + 1)^2 - \frac{1}{4}(z^2 - 1)^2 = z^2$$

che sussiste sempre fra i valori così ottenuti e presenta la proprietà caratteristica del triangolo rettangolo. L'enunciato pitagorico è ugualmente vero in ciò che nell'applicazione il numero dispari dal quale si parte e che si è denotato con z, esprime sempre il minore dei due lati dell'angolo retto: infatti l'altro y, essendo $\frac{1}{2}(z^2 - 1)$, può porsi sotto la forma:

$$z + \frac{1}{2}(z^2 - 2z - 1)$$

ora il numero dispari z dovendo essere uguale o superiore a 3, la parte di questa espressione che si aggiunge a z è sempre positiva. Il concetto di Platone completa quello di Pitagora. Esso stabilisce una regola analoga, nella quale si parte da un numero

Digitized by Google

pari: eccone la traduzione algebrica secondo il concetto di Proclo. Prendete un numero qualunque pari che rappresenterà uno dei lati dell'angolo retto, deducetene due altri numeri y ed x, tali che si abbia:

$$y = \frac{1}{4} z^2 - 1 \qquad x = \frac{1}{4} z^2 + 1$$

y sarà il secondo lato dell' angolo retto, x la ipotenusa, ambedue espressi mediante numeri interi. Proclo giustifica anche questa regola con un esempio, ma la dimostrazione risulta da ciò che i tre numeri pari così associati hanno fra loro la relazione caratteristica del triangolo rettangolo:

$$\left(\frac{1}{4} z^2 + 1\right)^2 - \left(\frac{1}{4} z^2 - 1\right)^2 = z^2.$$

Non insisteremo ulteriormente sopra queste regole che nella storia della scienza segnano in qualche modo i primi passi nella teoria dei numeri e sulla cui interpretazione geometrica dovremo ritornare più tardi: ci accontenteremo quì di segnalarne al lettore l'interessantissimo svolgimento storico (1).

---

(1) *Die Schriften der römischen Feldmesser* herausgegeben und erläutert von F. BLUME, K. LACHMANN und A. RUDORFF. Erster Band. Berlin, 1848, pag. 300. — *Sur un problème dépendant de l'analyse indéterminée du second degré, dont la solution est antérieure à Diophante* par M. BIOT nei *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XXVIII. Janvier-Juin 1849, pag. 576-581. — *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, découverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des arabes,* par M. F. WOEPCKE negli *Atti dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei.* Anno XIV, pag. 223 224, 268-269. — *Intorno ad un recente lavoro del Dr. Cantor sugli agrimensori romani* per ANTONIO FAVARO nel *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche.* T. IX, pag. 178-180.

Digitized by Google

Nella congerie degli scritti che pervennero fino a noi e che con maggiore o minore asseveranza sono da attribuirsi ad Erone, noi non troviamo altri materiali per la nostra indagine all' infuori di due problemi di analisi indeterminata geometricamente svolti (1). Nell'uno si tratta di trovare due rettangoli, dei quali i perimetri e le aree sieno fra loro come 1 : 3, nell'altro due rettangoli di uguale perimetro, le cui aree stieno fra loro nel rapporto di 1 : 4.

Passeremo sotto silenzio alcune lievi traccie che forse potrebbero mettersi in evidenza in altri autori alessandrini posteriori ad Erone per venire direttamente a Diofanto.

Diofanto occupa nella storia dell'algebra un posto analogo a quello che abbiamo assegnato ad Euclide nella storia della geometria. Come questi vuol essere riguardato quale rappresentante dello sviluppo geometrico fino all'epoca in cui egli visse, così Diofanto non è da considerarsi come l'inventore della scienza ch'egli sviluppò in modo così prodigioso, poichè l'algebra apparisce da indubbii documenti coltivata ed *a fortiori* inventata molto prima di un'epoca, nella quale la scienza greca accenna a toccare un periodo di decadenza.

In Diofanto, lo abbiamo già osservato, trova la sua più splendida manifestazione la dottrina sul modo di considerare i numeri, indipendentemente da qualsiasi rappresentazione sensibile, e quindi a prima giunta sembrerebbe che le opere del più grande algebrista dell'antichità non fossero per fornire notevole contributo sia allo

---

(1) *Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst.* Eine historisch-mathematische Untersuchung von Dr. Moritz Cantor. Leipzig, 1875, pag. 62. — Veggasi a questo riguardo la proposizione 38.ª del libro III delle *Collezioni* di Pappo ed inoltre il problema attribuito da Girolamo Cardano a Giorgio Valla (Hieronymi Cardani *Mediolanensis Philosophi ac Medici celeberrimi operum Tomus Quartus quo continentur Arithmetica, Geometria, Musica,* ecc. Lugduni, M . DC . LXIII, pag. 179, col. II.ª)

Digitized by Google

sviluppo storico dell' argomento che andiamo seguendo, sia in generale alla analisi geometrica. Così è infatti, ma appunto perciò sembrò a noi che quelle pochissime cose, che a questo riguardo si riscontrassero (1) in un autore così caratteristico, divenissero tanto più degne di considerazione e di studio.

Così, per modo di esempio, non può disconoscersi uno stretto legame fra la questione XXX del Primo Libro di Diofanto: *Inveniantur duo numeri, quorum summa et ex multiplicatione unius in alterum productus tanti sint, quantos poscimur* là dove pone la condizione: *Oportet autem numerorum inventorum summae quadratum, quadrato superare numerum qui ex ipsorum fit multiplicatione* od il teorema 5.° del II libro degli *Elementi* – fra la condizione apposta alla questione XXXI del medesimo Primo Libro: *Dare duos numeros, quorum summa, et summa item quadratorum ab ipsis qui fiunt, exprimat mandatos numeros* nei termini seguenti: *Oportet autem duplum summae quadratorum utriusque, quadrato numero praestare et quadrato, quod est summae ipsorum* ed il teorema 9.° dello stesso libro di Euclide. Di più, quadruplicando le quantità uguagliate nel teorema 5.° vi si scorge la condizione apposta alla questione XXXIII del Primo Libro di Diofanto: *Inveniantur duo numeri, quorum intervallum et qui fit altero in alterum multiplicato, exhibeant eos qui praescribuntur numeros*, col dire: *Necesse est autem quadruplum producti multiplicatione eorum cum quadrato intervalli iunctum, conficere quadratum.* Infatti, essendo per quel teorema:

$$\left(\frac{1}{2}a - h\right)\left(\frac{1}{2}a + h\right) + h^2 = \frac{1}{4}a^2$$

---

(1) Mi riferisco in tutto ciò che segue relativamente a DIOFANTO alla seguente edizione: DIOPHANTI ALEXANDRINI *Rerum arithmeticarum libri sex*, quorum primi duo adiecta habent scholia MAXIMI (ut coniectura est) PLANUDIS. Item *Liber de numeris polygonis seu multiangulis*. Opus incomparabile, verae arithmeticae logisticae perfectionem continens, paucis adhuc visum. A GUIL. XYLANDRO. Ecc. Basileae, M D LXXV.

Digitized by Google

ne segue:

$$4\left(\frac{1}{2}a - h\right)\left(\frac{1}{2}a + h\right) + 4h^2 = a^2$$

dove $4h^2$ è il quadrato dell'intervallo $2h$ dei due disuguali numeri:

$$\frac{1}{2}a - h \quad , \quad \frac{1}{2}a + h \, .$$

Parecchi altri punti di contatto potrebbero mettersi in evidenza fra Diofanto ed Euclide, (1), ma con tutto ciò noi non vorremo certo affermare che Diofanto abbia enunciato le sue regole per la risoluzione delle equazioni quadratiche, traendole da Euclide, molto più che non riconoscendo egli in queste se non una radice, mostra di essersi tenuto anche troppo indipendente da altre proposizioni di Euclide che antecedentemente abbiamo avuto occasione di analizzare (2).

Crediamo piuttosto prezzo dell'opera il soffermarci alquanto sopra un'altra questione di Diofanto, la XIII cioè del Quinto Libro, che, per quanto ci fu dato di ritrovare, è la sola nella quale il matematico alessandrino si sia servito di considerazioni geometriche (3). Eccone l'enunciato: *Unitatem secare et adijcere utrique segmento alium atque alium datum numerum, ita quadratum conficere.*

---

(1) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra.* Storia Critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di D. PIETRO COSSALI. Parma, CIↃ. IↃCC. XCVIĪ, Volume I, pag. 93-95.

(2) *Die Algebra der Griechen. Nach den Quellen bearbeitet* von Dr. G. H. F. NESSELMANN. Berlin, 1842, pag. 325-326.

(3) Il BERKHAN (*Die Anwendung der Geometrie auf Arithmetik und Algebra enthaltend die wichtigsten Lehrsätze der Arithmetik und Algebra durch geometrische Constructionen dargestellt*, ecc. Halle, 1861, pag. III) accenna genericamente all'uso che avrebbe fatto DIOFANTO di costruzioni geometriche per rappresentare grandezze numeriche diverse: a noi però non riuscì di

Digitized by Google

Si assuma, scrive egli, una unità AB (*fig.* 7) tagliata in C, secondo prescrive il problema, indi si aggiungano al tratto AC due unità AD ed al tratto CB sei unità BE, così CD e CE saranno quadrati. Ora, poichè AB è una unità, ma AD e BE prese insieme sono otto unità, così l'intera DE è uguale a nove unità. Si ha così da scomporre il numero 9 in due quadrati: ma poichè uno di questi quadrati, cioè CD è maggiore di AD ma minore di BD, il problema è così da proporsi: Scomporre il quadrato 9 in due quadrati in modo che uno cada fra 2 e 3. Trovato a questo modo CD, è data anche AC, poichè $AD = 2$ è dato, e sottraendo AC dall'unità AB si ha l'altro tratto CB. Se noi denotiamo con x^2 il quadrato che deve restare compreso fra 2 e 3, l'altro sarà $9 - x^2$. Assumiamo due quadrati, dei quali l'uno sia maggiore di 2 e l'altro minore di 3: per esempio $\frac{289}{144}$ e $\frac{361}{144}$, se noi riusciremo a trovare x^2 in modo che esso rimanga fra questi due quadrati, avremo risolto il problema. Perchè ciò avvenga deve pur essere la radice di x^2, cioè x, maggiore di $\frac{17}{12}$ e minore di $\frac{19}{12}$ e se vogliamo che $9 - x^2$ sia un quadrato, poniamo la radice di questo quadrato uguale a $3 - mx$ e troviamo $x = \frac{6m}{m^2 + 1}$, espressione che deve essere maggiore di $\frac{17}{12}$ e minore di $\frac{19}{12}$. Dovrà

---

trovarne altri casi all'infuori dell'unico qui riprodotto. E giacchè abbiamo toccato di DIOFANTO in rapporto a costruzioni geometriche, richiamiamo l'attenzione del lettore sull'opera seguente assai interessante: *Diophantus geometra sive opus contextum ex arithmetica et geometria simul; in quo quaestiones omnes Diophanti, quae geometrice solui possunt, enodantur tum algebricis, tum geometricis rationibus. Adiectus est Diophantus geometra promotus, in quo subtiles propositiones non absimili methodo pertractantur, et via noua ad ejusmodi praxes inueniendas aperitur.* Authore P. IACOBO DE BILLY, Societatis Jesu sacerdote. Parisiis, M.DC.LX. Il titolo dell'opera, già tanto specificato ci dispensa dall'entrare in particolari sulle intenzioni dell'Autore.

Digitized by Google

quindi essere:

$$\frac{6m}{m^2+1} > \frac{17}{12} \text{ e quindi } 72\,m > 17\,m^2 + 17$$

e quindi:

$$m < \frac{36+\sqrt{1007}}{17}, \text{ ovvero } m < \frac{67,73...}{17}$$

ovvero, secondo Diofanto, $m < \frac{67}{17}$. Inoltre deve essere:

$$\frac{6m}{m^2+1} < \frac{19}{12} \text{ e quindi } 72\,m < 19\,m^2 + 19$$

e per conseguenza:

$$m > \frac{36+\sqrt{935}}{19} \text{ ovvero } m > \frac{66,57...}{19}$$

ovvero, secondo Diofanto, $m > \frac{66}{19}$.

Diofanto assume per m il valore $\frac{7}{2}$ e quindi $x = \frac{84}{53}$ e di qui ottiene facilmente i tratti cercati, nei quali era da dividersi l'unità come chiedeva il problema.

Per l'interesse che può presentare nel seguito di questo lavoro, noteremo ancora come nella VI questione del Libro Sesto si proponga Diofanto di trovare un triangolo rettangolo in numeri razionali, in modo che l'area del triangolo più uno dei cateti uguagli un numero dato. Denotando rispettivamente i due cateti con ax e bx, il numero dato con k e ponendo $\frac{ab}{2} = c$, si avrà:

$$cx^2 + ax = k$$

Digitized by Google

dunque:

$$(*) \qquad cx = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ck} \ .$$

Giunto a questo punto, Diofanto enuncia la condizione nei termini seguenti che ci piace di testualmente riferire: *καὶ δεῖ τῶν ἀριθμῶν τῷ ημίσει ἐφ' ἑαυτό προσθεῖναι τὰς δυνάμεις επταχις* (1) *γενομενας καί ποεῖν τετράγωνον.* Vale a dire, continuando la nostra interpretazione algebrica, è mestieri si abbia:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ck = y^2$$

ponendo $a = 1$, l'equazione (*) si trasforma in:

$$bx = -1 + \sqrt{1 + 2bk}$$

e si tratta di soddisfare simultaneamente alle due equazioni indeterminate:

$$1 + 2kz = y^2 \qquad 1 + z^2 = t^2.$$

II.

Non è senza motivo che, nel registrare il risultato delle nostre indagini, abbiamo preso le mosse dai Greci e se soltanto in seguito noi ci facciamo a parlare degli Indiani, ciò avviene perchè siamo intimamente persuasi che questo ordine di successione

---

(1) DIOFANTO aveva preso $k = 7$.

Digitized by Google

sia conforme allo sviluppo storico delle matematiche presso questi due popoli.

Imperciocchè, ove pure voglia accettarsi col Cantor (1) la possibilità d' un influsso reciproco delle antiche colture greca e indiana, tuttavia allorquando si discende a ricercare esattamente in quali parti delle matematiche pure ed applicate si riscontrino punti di contatto fra gli scritti dei Greci e quelli degli Indiani, è mestieri ammettere senza restrizioni che nelle cose geometriche questi ultimi furono discepoli dei primi. Ed ancora per quanto si riferisce all' algebra, conosciamo noi forse i lavori della scuola alessandrina in modo così completo da poter affermare in via assoluta che le dottrine contenute nei sei primi libri di Diofanto, i soli che ci siano pervenuti, abbiano tenuto interamente il campo? Troppe invenzioni attribuite agli Indiani furon riconosciute d' origine greca (2) ed è perciò mestieri procedere in questi argomenti colla massima cautela. I più antichi scrittori indiani di cose matematiche, di cui si conoscono le opere e de' quali sia bene accertata l'epoca, non risalgono oltre al V o IV secolo dopo Cristo e sotto questo punto di vista non si può a meno dal riflettere che fin dal IV secolo prima di Cristo le spedizioni di Alessandro Magno condussero i Greci a contatto diretto degli Indiani e dopo quell' epoca non solo l' India si trovò connessa ai dominii Greci dell' Asia, ma perdurarono e si raffermarono le relazioni di essa coi Greci di Alessandria e più tardi con Roma.

E quantunque, come giustamente ha osservato l' Hankel, (3) vi sieno profonde differenze fra i metodi geometrici dei Greci e

---

(1) *Gräko-Indische Studien* von MORITZ CANTOR nella *Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik.* XXII Jahrgang. Leipzig, 1877, pag. 1.

(2) *Bulletin de la Société de Géographie.* Quatrième Série. Tome Deuxième. Année 1851, pag. 429. — *De l'algèbre chez les Arabes* par L. AM. SÉDILLOT. Extrait n.° 12 de l'année 1853 du *Journal Asiatique.* Paris, M DCCC LIII, pag. 8.

(3) *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* von Dr. HERMANN HANKEL. Leipzig, 1874, pag. 205-209.

Digitized by Google

degli Indiani e presso questi ultimi non si trovi traccia alcuna di quelle dimostrazioni rigorose e costruttive così caratteristiche della geometria greca, ciò non pertanto non si può assolutamente conchiudere col citato autore in favore dell'originalità della geometria indiana: molto più che in numero considerevole si incontrano coincidenze di problemi e di formole che non possono essere fortuite e la di cui origine greca deve porsi assolutamente fouri di questione.

Del rimanente lo sviluppo storico della geometria nell'India ci presenta fenomeni tali di regresso in procedere di tempo da far con fondamento presumere esatta l'argomentazione del Cantor, (1) trattarsi cioè principalmente di nozioni straniere trapiantate in modo non naturale nel terreno indiano.

Un recente lavoro pubblicato dal Thibaut (2) e che illustra i Culvasutra (rituali indiani di epoca ignota) contenenti regole geometriche che davano norma alle forme degli altari, abilmente ed eruditamente analizzato dal Cantor, pose in evidenza nuovi fatti contrari ad uno sviluppo indipendente della geometria indiana (3). Nuovi materiali potranno forse modificare tali conclusioni, ma la poca conoscenza attuale della letteratura indiana non permette di formularne altre razionalmente diverse.

---

(1) *Gräko-Indische Studien* von MORITZ CANTOR. Leipzig, 1877, pag. 7.

(2) *The Çulvasûtras* by G. THIBAUT, Ph. D. Anglo-Sanscrit professor. Banāras College. Reprinted from the *Journal of the Astatic Society of Bengal.* Part I, for 1875.

(3) Non crediamo opportuno insistere ulteriormente su tale argomento: si potrà per le diverse opinioni in proposito consultare le opere seguenti: *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle* par GUILLAUME LIBRI. Tome Premier. Deuxième édition. Halle, 1865, pag. 119-130. — *Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwickelung des menschlichen Geistes* von A. ARNETH. Stuttgard, 1852, pag. 140-182. — *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie disciple de Ctésibius,* ecc. per M. TH. HENRI MARTIN. Extrait du tome IV de la première série des *Mémoires présentés*

Digitized by Google

Ed ora riprendiamo il filo delle nostre indagini.

È noto che gli Indiani facevano alternativamente uso dell'algebra e della geometria nelle loro speculazioni matematiche: dell'algebra per abbreviare e facilitare la dimostrazione delle loro proposizioni geometriche e della geometria per dimostrare le loro regole dell' algebra e rappresentare sotto forma sensibile, per mezzo di figure, i risultati dell'analisi. Sembra quindi non arrischiata la induzione che gli Indiani sieno pervenuti alla risoluzione delle equazioni indeterminate del secondo grado, mediante considerazioni geometriche e che a questo motivo sia da attribuirsi la presenza d'un brano geometrico nel *Ganita* di Brahmegupta, brano geometrico intorno al quale crediamo opportuno di entrare in alcuni particolari.

Anzitutto osserveremo come vi si trovi una generalizzazione delle regole per la costruzione d'un triangolo rettangolo che, come abbiamo veduto, Proclo, nel suo Commentario alla quarantesimasettima proposizione del primo libro di Euclide, attribuisce a Platone ed a Pitagora.

Infatti la regola per la costruzione d'un triangolo rettangolo in numeri razionali (1) data da Brahmegupta così si esprime algebricamente: Se a è un lato del triangolo e b una quantità

---

par divers savants à l' académie des inscriptions et belles-lettres. Paris, MDCCCLIV, pag. 164-176. — *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, ecc. par M. CHASLES. Seconde édition. Paris, 1875, pag. 442, 489. — Ecco del rimanente la conclusione conciliativa del CANTOR (*Gräko-Indische Studien.* Leipzig, 1877, pag. 20): « Indische und griechische, insbesondere alexandrinische Mathematik haben sich nicht ganz unabhängig von einander entwickelt. Unser heutiges Wissen berechtigt uns zu der Vermuthung, dass die Inder Lehrer der Griechen in aritmetischen und algebraischen Dingen gewesen sein können; das sie jedenfalls Schüler der Griechen in astronomischen, beziehungsweise astrologischen und in geometrischen Dingen waren. »

(1) La medesima proposizione si riscontra presso BHASCARA nella parte geometrica del *Lilavati* (§. 140), questi però a differenza di BRAHMEGUPTA aggiunge che « *both results are rational quantities* ».

Digitized by Google

qualunque, il secondo lato sarà:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} - b\right)$$

e l'ipotenusa:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right)$$

regola (1) che riposa sulla identità:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b} + b\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b} - b\right) + a^2 .$$

La formula di Brahmegupta testè ottenuta può essere posta sotto la forma: (2)

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2$$

sotto la quale essa fu usata dai geometri moderni, che la posero a fondamento dei metodi da loro proposti per la risoluzione delle equazioni indeterminate del secondo grado.

---

(1) Se nelle formule di BRAHMEGUPTA noi poniamo successivamente $b = 1$ e $b = 2$ otteniamo le due formule seguenti che rappresentano le regole proposte dai geometri greci:

$$\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 + a^2$$

$$\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right\}^2 = \left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right\}^2$$

Cfr. *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en Géométrie*, ecc. par M. CHASLES. Paris, 1875, pag. 426-427. — BOEZIO, che pure si è servito di queste due formole, attribuisce nel II° libro della sua geometria, la seconda ad ARCHITA.

(2) Essa può servire anche per il caso in cui l'ipotenusa sia dato, poichè chiamando questo con c, facendo $b = 1$ nella formola e moltiplicando i suoi due

Digitized by Google

Molti altri paragrafi dell'opera di Brahmegupta presentano uno straordinario interesse sia per la storia delle matematiche in generale, come in particolare per il ristretto argomento, del quale stiamo qui occupandoci.

Da molti autori fu messa in evidenza la proposizione relativa all'area di un triangolo computato in funzione dei lati, ma nessuno, prima di Chasles, aveva richiamata l'attenzione degli studiosi su quella relativa all'area del quadrilatero, la quale offre caratteristiche di ben maggiore importanza, sia perchè suppone una geometria più avanzata e possiede un maggior valore scientifico, sia ancora, perchè secondo l'opinione esternata, quantunque con non molta asseveranza, dallo stesso storico, essa sembra appartenere realmente all'autore indiano.

Riservandoci di approfondire fra poco, ai riguardi dello scopo nostro, l'esame di questa regola, noteremo intanto come nella prima parte della proposizione in questione si annunci come inesatta una regola che lo è infatti, per l'area d'un triangolo e d'un quadrangolo qualunque in funzione dei lati: regola impiegata e ritenuta esatta dagli agrimensori romani ed adoperata come tale fino al medio-evo.

Ora sorge naturalmente il quesito: Questa regola, la quale comprova e documenta un periodo di ignoranza, sarebbe penetrata nell'India dove la si avrebbe riconosciata per falsa? E la seconda

---

membri per $\frac{c^2}{(a^2+1)^2}$ essa diverrà:

$$c^2 = \frac{4a^2 c^2}{(a^2+1)^2} + \frac{c^2 (a^2-1)^2}{(a^2+1)^2}$$

dalla quale si riconosce che i due lati del triangolo assumeranno la forma:

$$\frac{2ac}{a^2+1} \quad , \quad \frac{c(a^2-1)}{a^2+1}$$

a essendo un numero arbitrario. Questa formula fu data da BHASCARA ma non si trova presso BRAHMEGUPTA.

Digitized by Google

parte della proposizione di Brahmegupta verrebbe essa a sostituire una pratica empirica e grossolana con una regola veramente esatta e geometrica? Ci basterà l'aver accennato a questi quesiti, alla cui soluzione lo Chasles ha contribuito colla sua ben nota erudizione.

Alcune regole date da Brahmegupta per la costruzione dei quadrangoli presentano un'interesse affatto speciale, poichè ad esse si lega direttamente, come vedremo, la risoluzione dell'equazione $x^2 + y^2 = A$ in termini razionali (1).

Si assumano (2) due triangoli rettangoli razionali (*fig.* 8) a, b, c, a', b', c'; e si formino dal primo, mediante moltiplica per i cateti del secondo triangolo, i triangoli aa', ba', ca', ed ab', bb', cb' simili al primo, e viceversa $a'a$, $b'a$, $c'a$ ed $a'b$, $b'b$, $c'b$. Di questi quattro triangoli ciascuno ha un cateto comune con altri due e si può perciò comporre con essi un quadrangolo avente per lati ac', ca', bc', cb', nel quale così le diagonali come i loro segmenti e quindi le perpendicolari abbassate dai vertici sui lati sono razionali. È quindi evidente che a questo quadrangolo può essere circoscritto un cerchio.

Sia $ABCD$ la figura proposta: si avrà:

$$AB = ac' \quad , \quad BC = a'c \quad , \quad CD = bc' \quad , \quad AD = b'c.$$

---

(1) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, ecc. par M. CHASLES. Bruxelles, 1837, pag. 438-442. — *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* von Dr. HERMANN HANKEL. Leipzig, 1874, pag. 212. — H. G. ZEUTHEN. *Brahmeguptas Trapez* inserito nel *Tidsskrift for Mathematik*. Kjobenhavn. 1876, pag. 168-174; 181-191. — *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik*. Originalberichte der Verfasser gesammelt und herausgegeben von Dr. LEO KOENIGSBERGER und Dr. GUSTAV ZEUNER. II Band. Leipzig, 1878, pag. 1.

(2) « 38. The uprights and sides of two rectangular triangles reciprocally multiplied by the diagonals are four dissimilar sides of a trapezium. The greatest is the base; the least is the summit; and the two others are the flanks. » (*Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 307).

Digitized by Google

Una formula dedotta da una regola antecedente (1) dà per le diagonali:

$$AC = ab' + ba' \quad , \quad BD = aa' + bb'$$

ed un paragrafo precedente (2) può somministrare l'area della figura, la quale del resto può ottenersi, essendo le diagonali ad angolo retto, dal semi-prodotto di queste due rette, avendosela rappresentata mediante:

$$\frac{1}{2}(ab' + ba')\ (aa' + bb').$$

Il diametro del cerchio circoscritto si ricava da altra regola (3) uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei due lati opposti, che è:

$$\sqrt{a^2 c'^2 + b^2 c'^2} = c' \sqrt{a^2 + b^2} = cc'.$$

---

(1) « 28. The sums of the products of the sides about both the diagonals being divided by each other, multiply the quotients by the sum of the products of opposite sides; the square roots of the results are the diagonals in a trapezium. » (*Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 300).

(2) « 21. The product of half the sides and countersides is the gross area of a triangle and tetragon. Half the sum of the sides set down four times, and severally lessened by the sides, being multiplied together, the square-root of the product is the exact area. » (*Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 295-296).

(3) « 26. The diagonal of a tetragon other than a trapezium, being multiplied by the flank, and divided by twice the perpendicular, is the central line; and so is, in a trapezium, half the square-root of the sum of the squares of opposite sides. » (*Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 299).

Digitized by Google

Le perpendicolari BE, CF abbassate dai due vertici B e C sulla base AD, calcolate nei due triangoli ABD, ACD secondo apposita regola, (1) sono:

$$BE = \frac{a}{c}(aa' + bb') \qquad CF = \frac{b}{c}(ab' + ba')$$

i segmenti che queste perpendicolari determinano sulla base AD, sono:

$$AE = \frac{a}{c}(ab' - ba') \quad DE = \frac{b}{c}(aa' + bb')$$

$$DF = \frac{b}{c}(bb' - aa') \quad AF = \frac{a}{c}(ab' + ba')$$

i segmenti fatti sulle due diagonali, al loro punto d'intersezione, calcolati in base ad una regola antecedentemente esposta, (2) sono:

$$AO = ab' \qquad CO = a'b$$

$$BO = aa' \qquad DO = bb' .$$

---

(1) « 30-31. Assuming two triangles within the trapezium, let the diagonals be the basis of them. Then the segments, separately found, are the upper and lower portion formed by the intersection of diagonals. The lower portions of the two diagonals are taken for the sides of a triangle; and the base [of the tetragon] for its base. Its perpendicular is the lower portion of the [middle] perpendicular of the tetragon: the upper portion of it is the moiety of the sum of the [extreme] perpendiculars less the lower portion. » (*Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 503).

(2) « 22. The difference of the sides being divided by the base, the quotient is added to and subtracted from the base: the sum and the remainder, divided by two, are the segments. The square-root, extracted from the difference of the square of the side and square of its corresponding segment of the base, is the perpendicular. » (*Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 297).

Digitized by Google

Ora le due rette CF, FD sono i lati d'un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è $CD = bc'$. Queste espressioni non contengono esplicitamente la quantità c', nè per conseguenza il lato CD, ma soltanto le quantità a', b', la cui somma dei quadrati uguaglia il quadrato di c'; ovvero CO e DO, la cui somma dei quadrati uguaglia il quadrato di CD. Le dette espressioni sarebbero quindi ancora razionali, quand'anche c', od il lato CD, non lo fossero. Ne segue che le rette CF, FD danno una soluzione geometrica del problema: Decomporre un dato numero (quadrato o meno) in due numeri quadrati, conoscendo una prima soluzione della questione. Ponendo A in luogo di c'^2 si potrà così esprimere algebricamente il problema e la soluzione: Per risolvere l' equazione $x^2 + y^2 = A$ in numeri razionali, quando si conosca un primo sistema di radici x', y' di questa equazione, si assumeranno arbitrariamente tre numeri a, b, c tali che si abbia $a^2 + b^2 = c^2$ e le cercate radici saranno:

$$x = \frac{ay' + bx'}{c}$$

$$y = \frac{by' - ax'}{c}$$

Queste formule, alle quali conduce naturalmente la questione geometrica di Brahmegupta, contengono virtualmente le formule generali per la risoluzione dell'equazione $Cx^2 \pm A = y^2$, non ultimo fra i meriti dell' Eulero che, primo fra i moderni, vi pervenne nello scorso secolo.

Infatti, nell'equazione da risolvere:

$$x^2 + y^2 = A$$

e nelle due equazioni di condizione:

$$x'^2 + y'^2 = A \quad \text{ed} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

poniamo $x\sqrt{C}$ in luogo di x, $x'\sqrt{C}$ in luogo di x' ed $a\sqrt{C}$ in

Digitized by Google

luogo di a: esse diverranno:

$$Cx^2 + y^2 = A$$
$$Cx'^2 + y'^2 = A$$
$$Ca^2 + b^2 = c^2$$

e per il fatto di tali sostituzioni le espressioni delle radici x ed y diverranno:

$$x = \frac{ay' + bx'}{c}$$
$$y = \frac{Cax' - by'}{c}$$

radici dell'equazione:

$$Cx^2 + y^2 = A$$

Ora si osservi che queste radici soddisfanno a tale equazione, qualunque siano i valori dei due numeri C ed A, i quali per conseguenza possono essere supposti negativi: per modo che l'equazione può assumere la forma:

$$Cx^2 \pm A = y^2$$

e le sue radici divengono:

$$(*) \begin{cases} x = \frac{ay' + bx'}{c} \\ y = \frac{Cax' + by'}{c} \end{cases}$$

attribuendo il segno positivo al valore di y, poichè questa variabile non entra nell'equazione, se non al quadrato.

Le equazioni di condizione fra x' ed y' da una parte ed a, b, c dell'altra sono:

$$Cx'^2 \pm A = y'^2$$
$$Ca^2 + c^2 = b^2.$$

Digitized by Google

Vale a dire: x' ed y' costituiscono un sistema di radici dell' equazione proposta ed $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ un sistema di radici dell' equazione:

$$Cx^2 + 1 = y^2$$

Le formule (*) che risolvono l'equazione $Cx^2 \pm A = y^2$ sono precisamente quelle che si riscontrano nell'algebra di Brahmegupta, (1) e possono quindi facilmente dedursi dalla semplice questione geometrica trattata dall'autore indiano.

Quel nesso fra la geometria e l'algebra da un lato e l'algebra e la geometria dall'altro, che avvertimmo come caratteristico della matematica indiana, si appalesa ancora più intimo nelle opere di Bhascara che non in quelle di Brahmegupta. (2).

Si trovano infatti nel *Vija-Ganita* parecchie questioni di geometria risolte col calcolo e parecchie regole d'algebra dimostrate per via geometrica. Così, essendo proposto il problema » Ditemi prontamente qual sia la base d' un triangolo, i cui lati sono i sordi 13 e 5, e la base incognita e l'area quattro? » (3) avverte Bhascara che se si assume per incognita la base cercata, la soluzione è nojosa, (4) mentre cercando la perpendicolare abbassata sopra uno dei lati dati, dal vertice opposto, ed i segmenti

---

(1) *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 364, n.° 68.

(2) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* par M. CHASLES. Bruxelles, 1837, pag. 454-455.

(3) *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 198, n.° 117.

(4) Qui lo CHASLES fa dire a BHASCARA che « si l'on prend pour inconnue la base cherchée, on tombe sur une équation quadratique. » In realtà però BHASCARA ciò non dice, limitandosi ad osservare « if the base be assumed *yavattavat*, the solution is tedious »: è il COLEBROOKE che osserva in una nota « it requires the resolution of quadratic equations. »

Digitized by Google

determinati su questi lati, se ne deduce mediante una semplice estrazione di radice quadrata, la base cercata che è quattro.

Interessantissime sono due dimostrazioni che Bhascara porge del teorema pitagorico. (1) La prima consiste nel cercare mediante una proporzione l'espressione dei segmenti determinati sull' ipotenusa dalla perpendicolare e nel sommare di poi questi segmenti medesimi. La seconda è per lo scopo nostro più importante. Sui lati d'un quadrato Bhascara costruisce internamente quattro triangoli rettangoli uguali fra loro ed aventi questi lati per ipotenuse ed aggiunge: *Guarda.* (2). Ed infatti l'ispezione della figura per tal modo ottenuta basta a mostrare che l'area del quadrato uguaglia la somma delle aree dei quattro triangoli, più l'area d'un piccolo quadrato avente per lato la differenza dei due lati dell'angolo retto di uno dei quattro triangoli. (3)

---

(1) « 146. Say what is the hypotenuse in a plane figure, in which the side and upright are equal to fifteen and twenty? and show the demonstration of the received mode of computation. » (*Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 220).

(2) « With four such triangles, another figure having four sides, each equal to the hypotenuse, is constructed for the purpose of finding the hypotenuse. See. » (*Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 222).

(3) Approfittiamo della menzionata pubblicazione del THIBAUT (*The Çulvasutras* by G. THIBAUT, Ph. D. Anglo-Sanscrit Professor Banāras College. Reprinted from the *Journal of the Asiatic Society of Bengal.* Part. I, for 1875, pag. 7-9) e dell'erudito commento che ne fece il CANTOR (*Gräko-Indische Studien* von MORITZ CANTOR nella *Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik.* XXII Jahrgang. Leipzig, 1877, pag. 12-14) per aggiungere alcuni particolari a proposito del teorema di PITAGORA, quale si trova enunciato nei *Culvasutra* di cui tenemmo già parola.

Anzitutto è da avvertirsi che il testo indiano tradotto dal THIBAUT non parla di triangolo rettangolo, ma l'ipotenusa è considerata come diagonale d'un rettangolo e che inoltre è fatta distinzione fra il caso in cui quel rettangolo è di lati uguali ed il caso dei lati disuguali: ossia fra il caso in cui la radice si deve estrarre dal numero 2, e quello in cui si tratta d'altro numero.

Digitized by Google

Vale a dire denotando con c l'ipotenusa d'uno dei quattro triangoli e con a e b i suoi due altri lati si ha:

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a - b)^2 = 2ab + (a - b)^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

Ecco l'enunciato di BAUDHAYANA: « La corda tesa (obliquamente) attraverso un rettangolo di lati uguali produce il quadrato di area doppia. — La corda tesa (obliquamente) attraverso un rettangolo allungato produce le due aree che derivano dal tenderla sul lato maggiore e sul lato minore. »

BAUDHAYANA non aggiunge dimostrazioni. Per ciò che concerne il primo caso opina THIBAUT che sarebbe nell'indole della mente indiana dividere per metà con una diagonale i quadrati dei due cateti, e in quattro parti colle due diagonali il quadrato dell'ipotenusa, onde risulta evidente a prima vista l'eguaglianza di tutti i triangoli minori così formati, e quindi anche delle somme dei medesimi presi a 4 a 4. Il secondo caso, come espressamente dice BAUDHAYANA, si riconosce dai rettangoli, i cui lati sono 3 e 4; 12 e 5; 15 e 8; 7 e 24; 12 e 35; 15 e 36.

Qui il CANTOR mette in evidenza tre circostanze assai interessanti.

Anzitutto THIBAUT ha già notato, come l'ultimo dei triangoli razionali qui menzionati da BAUDHAYANA, quello coi cateti 15 e 36, è lo stesso che quello di cateti 12 e 5, mutate le dimensioni: locchè non proverebbe troppo in favore dell'autore indiano.

In secondo luogo è degna di attenzione la divisione del teorema pitagorico in due proposizioni distinte ove si osservi che il provare una verità geometrica generale su casi particolari è abitudine propria dei greci matematici. Ora, partendo direttamente da nozioni della letteratura matematica dei Greci, il GÜNTHER (*Ziele und Resultate der neueren mathematischen Forschung* von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. Erlangen, 1876, pag. 41) si è studiato di restituire la dimostrazione che del teorema pitagorico davano gli antichi Pitagorici ed il suo tentativo coincide fin nei particolari con quella divisione in due casi, che è indicata da BAUDHAYANA e col modo proposto da THIBAUT per la dimostrazione del primo caso.

Finalmente è degna di osservazione una analogia che non pare potersi riguardare come semplice opera del caso. Anche nella geometria di ERONE Alessandrino occorre il teorema pitagorico nel calcolo della diagonale d'un rettangolo ancor prima che i triangoli entrino in questione. Ivi pure, in due esempii consecutivi si distingue fra la diagonale d'un rettangolo equilatero e di un rettangolo non equilatero. Veggasi ancora a questo proposito: *Greek geometry from Thales to Euclid.* By GEORGE JOHNSTON ALLMAN. Dublin, 1877, pag. 186-194.

Digitized by Google

La formula, nella quale si traduce la proposizione consecutiva: (1)

$$2ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$$

è dimostrata, senza il sussidio di qualsiasi spiegazione, mediante una figura altrettanto semplice quanto evidente e l'esempio illustrativo che ne è offerto è illustrato mediante vere e reali rappresentazioni grafiche.

Anche le formule:

$$(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$$

$$(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$$

nelle quali si traducono due altre proposizioni, (2) sono pur esse dimostrate mediante figure coll'aggiunta del consueto *Guarda*.

Di straordinario interesse per l'oggetto delle nostre ricerche è la risoluzione offerta da Bhascara (3) dell'equazione indeter-

---

(1) « 147. Rule: Twice the product of the upright and side, being added to the square of their difference, is equal to the sum of their squares, just as with two unknown quantities.

Hence, for facility, it is rightly said « The square-root of the sum of the squares of upright and side, is the hypotenuse? » (*Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE, London, 1817, pag. 222)

(2) « 149. Rule: The difference between the sum of the squares of two quantities whatsoever, and the square of their sum, is equal to twice their product: as in the case of two unknown quantities. »

« 150. Rule: The difference between four times the product and the square of the sum, is equal to the square of the difference of the quantities; as in the instance of unknown ones. »

(*Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 224).

(3) *Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 270. — *Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en Géométrie* par M. CHASLES. Bruxelles, 1837, pag. 455. — *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* von Dr. HERMANN HANKEL. Leipzig, 1874, pag. 199.

Digitized by Google

minata del secondo grado:

$$ax + by + c = xy$$

dalla quale risulta che nell'India era noto quel procedimento più tardi ritrovato in Occidente, e secondo il quale si scompone $ab + c$ in un prodotto di numeri interi $m \cdot n$ e quindi si pone:

$$x = m + b \quad , \quad y = n + a$$

egli mostra infatti che la proposta equazione può trasformarsi in quest'altra:

$$(x - b)\ (y - a) = ab + c$$

d'onde conchiude che per i valori razionali di x ed y si può assumere:

$$x = b + m \quad , \quad y = a + \frac{ab + c}{n}$$

Di questo problema Bhascara porge l'esempio seguente: » Tell two numbers such, that the sum of them, multiplied by four and three, may, added to two, be equal to the product. » (1) Vale a dire sia proposta da risolversi l'equazione:

$$xy = 4x + 3y + 2$$

La soluzione è data graficamente da Bhascara come segue: Sia (*fig.* 9) $AB = x$, $BC = y$, si avrà $ABCD = xy$ e quindi:

$$ABCD = 4x + 3y + 2$$

---

(1) *Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 270-271.

Digitized by Google

si costruisca $4x$ nel rettangolo BE, si faccia inoltre $CG = 3$, allora il rettangolo:

$$FC = 3\,(y - 4)$$

ed il rimanente rettangolo:

$$DF = 3.4 + 2 = 14\,.$$

Ora si scomponga in qualsiasi modo 14 nel prodotto di due numeri interi $m.n$, si faccia $DG = m$, $DE = n$ ed il problema sarà risolto. Segue la dimostrazione algebrica che l'autore indiano aggiunge « ad uso di quelli che non comprendono la geometria. »

Una seconda costruzione offerta dal medesimo Bhascara contempla il caso dei coefficienti negativi, giudichiamo opportuno di riprodurla testualmente: (1) » It has been said above, that the product of the coefficient, added to the absolute number, is the area of another small rectangle within that which represents the factum of the unknown, and situated at its corner. Sometimes, however, it is otherwise. When the coefficients are negative, the rectangle representing the factum will be within the other at its corner. When the coefficients are greater than the side and upright of the rectangle representing the factum, and are affirmative, the new rectangle will stand without that which represents the factum, and at its corner. See (*fig.* 10). When it is so, the coefficients, lessened by subtraction of the assumed number and quotient, are values of *ya* and *ca.* »

Oltre a quanto siamo venuti fin quì esponendo, il *Vija-Ganita* di Bhascara contiene parecchie questioni geometriche risolte

---

(1) *Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE. London, 1817, pag. 272. — La figura da noi riportata è fedelmente riprodotta dal testo di COLEBROOKE. Nè lo CHASLES nè l'HANKEL succitati menzionano questa seconda costruzione.

Digitized by Google

come applicazioni delle regole algebriche: fra queste ci limiteremo ad accennare a quella contemplata dal §. 120, appartenente alla categoria di quelle che dipendono da equazioni indeterminate del secondo grado. Quivi infatti si propone Bhascara di trovare in numeri razionali i lati del triangolo rettangolo la cui area è espressa dallo stesso numero che l'ipotenusa, oppure uguaglia il prodotto dei tre lati: problemi, i quali, come ben si scorge, dipendono rispettivamente dalle equazioni:

$$x^2 y^2 = 4 (x^2 + y^2)$$
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4} .$$

III.

Se, per ciò che si riferisce all'ordine cronologico, non v'ha dubbio alcuno intorno al posto che nello sviluppo storico delle matematiche vengono ad occupare gli Arabi rispetto ai Greci ed agli Indiani, fu tuttavia scopo di molte divergenze lo stabilire da quale di questi due ultimi popoli abbiano attinto gli Arabi i fondamenti della loro coltura scientifica. L'opinione oggidì più accreditata e meglio suffragata dai documenti finora messi in luce, si è che gli Arabi sieno stati nelle scienze gli allievi ed in parte gli eredi dei Greci e degli Indiani. Bagdad, dove i Califfi trasportarono la loro residenza nel 762, posta fra la Grecia e l'India, favorì senza dubbio colla sua situazione geografica la riunione e la fusione delle correnti che da quelle due fonti di coltura scientifica ripetevano la loro origine.

La letteratura matematica dei Greci passò agli Arabi per mezzo dei Siri cristiani, i quali, entrati fin dal tempo della loro conversione al cristianesimo nella piena corrente della vita intel-

Digitized by Google

tuale ellenica, non trascurarono nemmeno in epoche posteriori e meno favorevoli, la coltura delle scienze. Così fin dal nono secolo ebbero gli Arabi una traduzione degli *Elementi* e di altre opere d'Euclide, dei sette libri delle *Coniche* e di quello *De sectione rationis* di Apollonio, delle opere di Archimede, dell'*Almagesto* e con esso di tutti quegli altri scritti che essi chiamavano col nome di libri intermedii (fra gli *Elementi* e l'*Almagesto*), ed ai quali dai più recenti alessandrini fu dato il nome di *μικρὸς ἀστρόνομος* ovvero di *ἀστρονούμενος*. Per quanto in particolare si riferisce all'aritmetica sembra pertanto non conoscessero se non quanto se ne contiene negli *Elementi* ed è dubbio che possedessero una traduzione dell'aritmetica di Nicomaco, poichè il solo Thebit ben Corrah parla di quest'opera, ma versatissimo com'era nella conoscenza della lingua greca, è molto probabile ch'egli l'avesse studiata sull'originale. Il compimento alla conoscenza delle fonti greche fu posto colla traduzione di Diofanto fatta per opera di Abul Wefa nella seconda metà del decimo secolo. Noi avremo motivo di avvertire incidentalmente in seguito gli eventuali richiami fatti dagli autori arabi alla letteratura greca.

Per quanto poi si riferisce alle relazioni coll'India è certo che queste ebbero luogo fin dall'epoca in cui la Persia fu conquistata dagli Arabi: quanto noi potremmo tuttavia dire in generale a questo proposito non avrebbe fondamento alcuno: ci riserviamo quindi di discutere l'origine indiana di taluni teoremi che cadranno entro la cerchia delle nostre considerazioni, quando avremo motivo di occuparcene.

Certo è ad ogni modo che la poderosa corrente della geometria classica greca che si diffuse dalla fine dell'undecimo secolo in poi fra gli Arabi, tolse ben presto ogni influenza indiana: il Sind-hind (Siddhanta) tradotto sotto il regno del Califfo Al Mansur è già abbandonato alla metà del IX secolo e cento anni più tardi la matematica dei Greci esercita un dominio incontrastato su tutte le scuole arabe. Gli *Elementi* di Euclide occupano bentosto presso gli Arabi il medesimo posto ch'essi ebbero più tardi

Digitized by Google

presso i Latini: essi formano il punto di partenza d'ogni indagine matematica e si cerca di facilitarne lo studio mediante commenti e parafrasi, dei quali conosciamo già oltre cinquanta (1).

Tanto abbiamo voluto qui premettere in generale, prefiggendoci del resto di rimanere in seguito fedeli al precetto di Woepcke: (2) » dans la discussion des emprunts scientifiques faits d'un peuple à un autre, le critérium, qui doit figurer en première ligne, et qui l'emporte de beaucoup sur tous les autres, est la conformité ou la différence de l'esprit des méthodes. »

La storia dell'algebra presso gli Arabi, della quale noi possiamo desumere gli elementi da fonti scritte ed irrefragabili, incomincia coll'opera di Mohammed ben Musa: (3) ben può indursi

---

(1) *De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis.* Schediasma historicum auctore J. C. GARTZ. Halae ad Salam, MDCCCXXIII. — *De auctorum Graecorum versionibus et commentariis syriacis arabicis armeniacis persicisque* commentatio quam proposita per regiam scientiarum societatem quae Gottingae floret quaestione scripsit JOANNES GEORGIUS WENRICH. Lipsiae MDCCCXLII, pag. 176-189.

(2) *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ.* (Manuscrit persan n.° 169, ancien fonds de la bibliothèque impériale), par M. F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LV. Extrait de l'Année 1855 du *Journal Asiatique*, pag. 19.

(3) Pubblicato nell'originale e colla traduzione inglese di FEDERICO ROSEN (*The Algebra of Mohammed ben Musa.* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831). — Veggasi una antica traduzione latina data in luce dal LIBRI (*Histoire des sciences mathématiques en Italie*, ecc. par GUILLAUME LIBRI. Tome Premier. Paris, 1838, pag. 253-297). — La parte geometrica del trattato medesimo, intitolata nella detta traduzione del ROSEN: « *Mensuration* » fu tradotta in francese da ARISTIDE MARRE con prefazione e note del traduttore medesimo (*Nouvelles Annales de Mathématiques.* Tome cinquième, pag. 557-581 e pubblicata poi a parte in un opuscolo intitolato: *Partie géométrique de l'algèbre de Abou Abdallah Mohammed ben Moussa (al Khowarezmi)* par M. ARISTIDE MARRE. Paris, 1846. — *Annali di Matematica pura ed applicata* pubblicati da BARNABA TORTOLINI. Tomo VII. Roma, 1856, pag. 269-280. — *Le Messâhat de Mohammed ben Moussa al Khârezmi.* Extrait de son Algèbre traduit et annoté par ARISTIDE MARRE. 2.e Édition revue et corrigée sur le texte arabe publié par Rosen Rome, 1856.

Digitized by Google

da quanto egli stesso ne dice nella prefazione alla sua opera, (1) che altri scritti intorno allo stesso argomento esistessero fra gli Arabi, ma di essi niuno pervenne fino a noi. Ora, da chi attinse Mohammed ben Musa? Se riesce alquanto malagevole il rispondere in via assoluta ed esclusiva a questo quesito, è tuttavia facile il raccogliere alcune prove che agevolano la formazione d' un criterio abbastanza esatto della questione. Che a Mohammed ben Musa fosse famigliare la scienza degli Indiani, risulta evidentemente dal fatto del riassunto ch' egli stese del Sind-hind dietro ordine di Al-Mamun e dalla conoscenza ch' egli aveva dell' indiana *Regula falsi*. Ma se in qualche modo egli ha punti di contatto cogli Indiani per gli argomenti trattati, ne apparisce affatto indipendente nella forma della trattazione, od almeno il metodo da lui seguìto ne differisce sensibilmente. Brahmegupta e Bhascara danno precetti dogmatici, che così per la forma come per la essenza sembrano piuttosto diretti alla memoria che non all' intelligenza del lettore; Mohammed ben Musa invece espone le sue regole in una prosa semplice e ne fonda il rigore su illustrazioni geometriche. La stessa marcatissima differenza esiste sia nel modo di condurre la risoluzione dei singoli problemi troppo recisa e

---

(1) L'autore arabo riferisce ch'egli aveva avuto da AL-MAMUN l'incarico di comporre un trattato di algebra popolare nei termini seguenti (*The Algebra of Mohammed ben Musa* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831, pag. 3): « JMAM AL MAMUN, the Commander of the Faithful.... has encouraged me to compose a short work on Calculating by (the rules of) Completion and Reduction, confining it to what is easiest and most useful in arithmetic » ciocchè potrebbe far credere che gli Arabi possedevano già alcune opere algebriche più estese e d'ordine più elevato. Ora da un lato HADJI-KALFA asserisce che MOHAMMED BEN MUSA fu il primo musulmano che scrisse intorno a questa scienza e dall'altra COLEBROOKE (*Miscellaneous Essays*, T. I, pag. 444, p. 512) CASIRI (*Bibliotheca arabico-hispana Escurialensis*, Tomus Prior, pag. 140) e d'HERBELOT (*Bibliothèque Orientale*, alla voce *Camel*) parlano di ABU-KAMIL-SHUJAA-BEN-ASLAM o SALAM algebrista per lo meno contemporaneo a MOHAMMED BEN MUSA. Cfr. l'introduzione alle *Tables astronomiques d' Oloug-Beg, fils de Schah-Rokh, fils de Tamerlan* commentées et publiés par M. L. P. E. A. SÉDILLOT. Paris, 1839, pag. 62-63.

Digitized by Google

corredata di rari esempi nelle opere indiane, circostanziata e ricca di esempii semplici e razionali nel geometra arabo.

Nella risoluzione delle equazioni quadratiche Mohammed ben Musa segue le stesse norme date da Diofanto, e che, quantunque sotto forma meno comprensiva, si trovano anche presso i matematici Indiani. Opina il Colebrooke (1) tuttavia che il geometra arabo non si sia realmente servito degli scritti di Diofanto, giacchè non si hanno le prove che le opere del matematico greco fossero note agli arabi prima della traduzione che ne fece Abul Wefa, nella seconda metà del decimo secolo. Ma questa prova è impugnata e con validi argomenti dal Sédillot, (2) il quale afferma non potersi inferire dal fatto della traduzione e del commentario di Diofanto per opera di Abul Wefa, che questi sia stato il primo a farne conoscere le opere agli Arabi: Abul Wefa, prosegue il Sédillot, tradusse pure Euclide e tuttavia gli *Elementi* erano insegnati fin dai tempi di Aarun-al-Raschid nelle scuole di Bagdad. Le prove negative non devono essere ammesse se non in quanto esse sieno giustificate da testi positivi.

Mohammed ben Musa intitola il suo (3) libro colle due espressioni *algebra* ed *almuchabala* che si riferiscono alle due ope-

---

(1) *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* Translated by HENRY THOMAS COLEBROOKE, London, 1817, pag. lxxii.

(2) *Matériaux pur servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux* par M. L. P. E. A. SÉDILLOT. Tome Second. Paris, 1845-1849, pag. 449-451. — *De l'Algèbre chez les Arabes* par L. AM. SÉDILLOT. Paris, M DCCC LIII, pag. 7-8. Extrait de l'année 1853 du *Journal Asiatique.*

(3) Desideriamo di dire ben aperto che noi intendiamo di lasciare assolutamente impregiudicata la questione relativa alle fonti *immediate*, alle quali avrà attinto MOHAMMED BEN MUSA. Che quanto egli espone sia veramente suo non crediamo in via assoluta, poichè non si saprebbe spiegare come egli si sia trovato imbarazzato nel costruire una espressione così semplice come $(100 + x^2 - 2x)$. Egli scrive infatti (*The Algebra of Mohammed ben Musa.* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831, pag. 34): « We had, indeed, contrived to construct a figure also for this case, but it was not sufficiently clear. »

Digitized by Google

razioni più semplici della teoria delle equazioni: *algebra* (che il Rosen traduce con *completion*) significa esattamente *completare una negazione*, od in altre parole il trasportare un termine negativo di una equazione da un membro all'altro: *almuchabala* (che il Rosen traduce con *reduction*) denota la riunione di più termini congeneri contenuti in ambedue i membri (1).

Così per modo di esempio, proposta l'equazione:

$$x^2 + 3x - 3 = 5x$$

risulta per algebra:

$$x^2 + 3x = 5x + 3$$

e per almuchabala:

$$x^2 = 2x + 3$$

Quanto alle operazioni elementari insegnate da Mohammed ben Musa, ci limiteremo a porre in evidenza come le regole relative alla somma ed alla sottra vengono dimostrate col mezzo di esempii rappresentando le singole quantità con rette, (2) e verremo direttamente a trattare della risoluzione delle equazioni quadratiche.

---

(1) Cfr. *Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum a* MUSTAFA BEN ABDALLAH KATIB JELEBI *dicto et nomine* HAJI KHALFA *celebrato compositum*, ecc. Tomus Secundus, ecc. Leipzig, M.DCCC.XXXVII. pag. 582-585. — *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831, pag. 177-187.

(2) *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831, pag. 27. — *Histoire des sciences mathématiques en Italie* par GUILLAUME LIBRI. Halle, 1865, pag. 269.

Digitized by Google

Scrivendole egli sempre con termini positivi, distingue i tre casi seguenti:

$$1^{\circ}) \quad cx^2 + bx = a$$
$$2^{\circ}) \quad cx^2 + a = bx$$
$$3^{\circ}) \quad cx^2 = bx + a$$

ed esclude per conseguenza il quarto caso che può essere offerto dall'equazione generale del secondo grado.

Mohammed ben Musa non prende in considerazione che le sole radici positive dell'equazione proposta: egli riporta tuttavia le due radici positive della 2) come vedremo più innanzi.

Dopo aver enunciato le regole, applicandole ad esempii particolari, fa seguire le costruzioni geometriche. E perchè si abbia un criterio della via tenuta in tale illustrazione, daremo qui un saggio di traduzione letterale dell'esempio relativo alla prima delle forme registrate (1).

Dimostrazione del caso » Un quadrato e dieci radici sono uguali a trentanove dramme. »

---

(1) Nel *Lilavati* la regola per la risoluzione di questo caso è espressa in versi che tradotti letteralmente in latino suonano come appresso:

Per multiplicatam radicem diminutae [vel] auctae quantitatis
Manifestae, additae ad dimidiati multiplicatoris quadratum
Radix, dimidiato multiplicatore addito [vel] subtracto,
In quadratum ducta — est interrogantis desiderata quantitas.

Cfr. *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831, pag. 189. È poi interessante il confronto di questa regola con quella analoga data da frate LUCA PACIOLI (*Summa de arithmetica geometria proportioni: et proportionalita.* Distinctio octava. Tractatus tertius):

Si res et census numero coaequantur, a rebus
Dimidio sumpto, censum producere debes,
Addereque numero, cujus a radice totiens
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

Digitized by Google

La figura esplicativa sia un quadrato, i lati del quale sono incogniti. Esso rappresenta il quadrato, il quale, o le radici del quale voi volete conoscere. Tale è la figura *AB* (*fig.* 11), ciascun lato della quale può essere considerato come una delle due radici: e se voi moltiplicate uno di questi lati per un qualunque numero, l'ammontare di quel numero può essere riguardato come il numero delle radici che sono aggiunte al quadrato. Ogni lato del quadrato rappresenta la radice del quadrato, e se, come nell'esempio, le radici fossero legate col quadrato, noi possiamo prendere un quarto di dieci, vale a dire, due e mezzo e combinarlo con ciascuno dei quattro lati della figura. In tal modo col quadrato originale *AB* sono combinati quattro nuovi parallelogrammi, ciascuno dei quali ha un lato del quadrato come sua lunghezza ed il numero di due e mezzo come sua larghezza: essi sono i parallelogrammi *C*, *G*, *T* e *K*. Noi abbiamo ora un quadrato di lati uguali quantunque incogniti, ma in ognuno dei quattro vertici manca un quadrato di due e mezzo moltiplicato per due e mezzo. Per compensare questa mancanza e completare il quadrato, noi dobbiamo aggiungere (a ciò che abbiamo già) quattro volte il quadrato di due e mezzo, cioè venticinque. Noi sappiamo (per dato) che la prima figura, cioè la superficie rappresentante il quadrato, insieme ai quattro parallelogrammi intorno ad essa, che rappresentano le dieci radici, è uguale a trentanove numeri. Se a questo noi aggiungiamo venticinque, che è l'equivalente dei quattro quadrati ai vertici della figura *AB*, mediante i quali è compiuta la grande figura *DH*, allora noi sappiamo che tutto ciò insieme forma sessantaquattro. Un lato di questo gran quadrato è la sua radice, cioè otto. Se noi sottriamo due volte un quarto di dieci, cioè cinque da otto, come dai due estremi del lato del gran quadrato *DH*, il residuo di questo lato sarà tre, e questa è la radice del quadrato, od il lato della figura originale *AB*. Deve osservarsi che noi abbiamo dimezzato il numero delle radici ed aggiunto il prodotto della metà moltiplicato per sè stesso al numero trentanove, per completare

Digitized by Google

la figura nei suoi quattro vertici; perchè il quarto di ogni numero moltiplicato per sè stesso e quindi per quattro, uguaglia il prodotto della metà di quel numero moltiplicato per sè stesso (1). In conformità noi moltiplichiamo soltanto la metà delle radici per sè stesse, in luogo di moltiplicare il suo quarto per sè stesso ed indi per quattro.

Lo stesso procedimento può essere anche illustrato da un'altra figura. Noi partiamo dal quadrato *AB* (*fig.* 12) che rappresenta il quadrato. Cominciamo dall'aggiungervi le dieci radici dello stesso. Noi dimezziamo a tale scopo il dieci, cosicchè ne viene cinque e costruiamo due quadrangoli sopra due lati del quadrato *AB*, cioè *G* e *D*, la lunghezza di ciascheduno di essi essendo cinque, come metà delle dieci radici, mentre la larghezza di ciascuno è uguale ad un lato del quadrato *AB*. Allora un quadrato rimane di contro al vertice del quadrato *AB*. Questo è uguale a cinque moltiplicato per cinque: questo cinque essendo metà del numero delle radici che abbiamo aggiunto a ciascuno dei due lati del primo quadrato. Così noi sappiamo che la prima superficie, che è il quadrato ed i due quadrangoli sui suoi lati, che sono le dieci radici, fanno insieme trentanove. Per completare il grande quadrato, vi manca soltanto un quadrato di cinque moltiplicato per cinque, ovvero venticinque. Questo noi sommiamo con trentanove per completare il grande quadrato *SH*. La somma è sessantaquattro. Noi estriamo la sua radice, otto, che è uno dei lati del grande quadrangolo. Sottraendo da questo la medesima quantità che noi abbiamo prima sommato, cioè cinque, noi otteniamo tre come residuo. Questo è il lato del quadrangolo *AB*, che rappresenta il quadrato: esso è la radice di questo quadrato, ed il quadrato medesimo è nove.

---

(1) Infatti: $4 \times \left(\frac{b}{4}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Digitized by Google

Il procedimento di Mohammed ben Musa può brevemente riassumersi come appresso:

Proposta l' equazione:

$$x^2 + 10x = 39$$

si avrà:

$$AB = x^2 \; ; \quad G = D = \frac{10}{2} x$$

$$AB + (G + D) = x^2 + 2\left(\frac{10}{2} x\right) = 39 \; ; \; \ldots . \; a$$

$$SH - \{AB + (G + D)\} = SH - 39 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 ; \ldots . \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$SH = 39 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 64 \; ; \; \ldots . \; a + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\text{lato di } SH = \sqrt{64} = 8 \; ; \; \ldots . \sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$x = \text{lato di } AB = 8 - \frac{10}{2} = 3 \; ; \; \ldots . \sqrt{a + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} .$$

Per ciò che si riferisce alle altre due forme ci limiteremo ad esporre il procedimento seguìto dall'autore arabo, traducendolo nell'odierno linguaggio abbreviato.

Essendo proposta l' equazione:

$$x^2 + 21 = 10\, x$$

Digitized by Google

si avrà (*fig.* 13):

$$AD = x^2 \; ; \quad HB = 21 \; ; \quad HD = HN \,.\, HC = x \,.\, 10$$

$$CG = HG = \frac{HC}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$GK = CG - GT = 5 - x$$

$$TK = GK + GT = CG = 5$$

$$NT = HG = CG = 5$$

$$MT = 25 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 ; \; \ldots . \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$KL = KG \; ; \quad ML = KM - KL = KT - KG = TG$$

$$LR = KG = CG - GT = CG - CA = GA$$

$$ML \,.\, LR = TG \,.\, GA \; ; \quad MR = TA$$

$$HT + MR = HT + TA = HB = 21 \; ; \; \ldots . \; a$$

$$KR = MT - (HT + MR) = 25 - 21 = 4 \; ; \; \ldots . \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a$$

$$RG = \sqrt{4} = 2 \; ; \; \ldots . \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}$$

$$x = AC = CG - GA = CG - RG = 5 - 2 = 3 \; ; \ldots . \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}.$$

L'autore arabo aggiunge anche che $5 + 2$ soddisferebbe pure all' equazione proposta, ma non ne porge la dimostraziene. Egli dice infatti che si calcolano ambedue, ma che in ogni caso è mestieri accertarsi che le radici rispondano alla questione: si prova da principio la prima che proviene dal segno più e se essa non conviene, la seconda, che proviene dal segno meno, converrà certamente. (*When you meet with an instance which refers you to this case, try its solution by addition, and if that do not serve, then subtraction certainly will*). (1)

---

(1) *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831, pag. 11. Di questa circostanza è ripreso l' autore

Digitized by Google

Veniamo finalmente alla terza forma, per la quale Mohammed ben Musa applica il procedimento geometrico all'esempio seguente:

$$x^2 + 3x = 4$$

Riassumiamo qui pure brevemente l' andamento della dimostrazione da lui offerta.
Avremo (*fig.* 14):

$$AD = x^2 \; ; \; HC = 3 \; ; \; HD = 3x$$
$$HB = AD - HD = x^2 - 3x = 4 \; ; \; \ldots . \; a$$
$$CG = GH = \frac{HC}{2} = \frac{3}{2}$$
$$HT = (HG)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4} \; ; \; \ldots . \left(\frac{b}{2}\right)^2$$
$$TL = AH \; ; \; GT = GH \; ; \; GT + TL = GH + HA$$
$$GL = GA \; ; \; MA = GL = GA$$
$$1) \; AB - MA = AC - GA$$
$$BM = CG = GH = LN$$
$$2) \; GL - GT = GA - GH$$
$$TL = AH = MN$$
$$BM \cdot MN = TL \cdot LN \; , \; BN = TN$$
$$4 = HB = AN + BN = AN + TN$$
$$GM = HT + (AN + TN) = 2\frac{1}{4} + 4 \; ; \; \ldots . \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a$$
$$AG = \sqrt{2\frac{1}{4} + 4} = 2\frac{1}{2} \; ; \; \ldots . \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a}$$
$$x = AG + CG = 2\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 4 \; ; \; \ldots . \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a} + \frac{b}{2} .$$

---

arabo da CARDANO, il quale scrive (*Artis magnae, sive de regulis algebraicis* liber unus. Norimbergae, M. D. XLV, car. 20): « Nec admireris hanc secundam demonstrationem aliter quam a Mahumete explicatam, nam ille immutata figura magis ex re ostendit, sed tamen obscurius, nec nisi unam partem eamque pluribus. »

Digitized by Google

Mohammed ben Musa applica poi le date regole ad una quantità di problemi interessantissimi (1).

Che poi gli Arabi, alla fine del decimo ed al principio dell' undecimo secolo, vale a dire nel periodo scientifico per loro più glorioso, si sieno con singolare predilezione dedicati alle costruzioni geometriche, lo provano fra gli altri i lavori di Abul Wefa che pervennero fino a noi. E questo fatto non potè naturalmente non esercitare una grande influenza anche sui progressi ulteriori della costruzione delle equazioni, che più innanzi avremo motivo di registrare.

Una collezione di costruzioni geometriche di Abul Wefa fu fatta conoscere da Woepcke, (2) che la trasse da un manoscritto persiano contenente la traduzione dall'arabo delle lezioni del celebre geometra raccolte da uno dei suoi discepoli. Fra le questioni trattate in quest'opera tre sono sopratutto degne di particolare attenzione, vale a dire: 1.° la costruzione di parecchi problemi geo-

---

(1) *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831, pag. 41-67. — *Histoire des sciences mathématiques en Italie* par GUILLAUME LIBRI. Halle, 1865, pag. 258-261. — Fra le altre particolarità è da notarsi, come riferisce il ROSEN (pag. 193), un tentativo di costruzione grafica del caso di $[100 + x^2 - 20x] + [50 + 10x - 2x^2]$ che trovasi in margine al manoscritto (Biblioteca Bodlejana di Oxford. Vol. CMXVIII. *Hunt.* 214, *fol.*) del quale si servì per la sua pubblicazione. Il ROSEN però non riproduce questo tentativo nel volume da lui edito. Questo tentativo di rappresentazione, sembrando rivestire sotto il punto di vista storico un carattere di particolare importanza, fece sorgere in noi il desiderio di conoscerlo, la qual cosa ci fu resa possibile mediante la gentile interposizione dell'Eccellentissimo Principe D. BALDASSARRE BONCOMPAGNI. Abbiamo pertanto potuto convincerci che questa figura non offre nessuna caratteristica di eccezionale importanza, essendo perfettamente analoga alle due che la precedono e che nell'edizione a stampa si trovano alle pagine 32 e 33.

(2) *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux d'après des traités inédits arabes et persans. Analyse et extraits d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ.* (Manuscrit persan n.° 169, ancien fonds de la bibliothèque impériale) par M. F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LV. Extrait de l'année 1855 du *Journal Asiatique.*

Digitized by Google

metrici mediante la riga ed una sola apertura di compasso; primo esempio di un genere di costruzioni geometriche, del quale si occuparono in appresso parecchi geometri del rinascimento e di tempi a noi più vicini. 2.° La completa risoluzione del seguente problema: dividere un quadrato in un dato numero di quadrati, approfittando di procedimenti di sovrapposizione, senza ricorrere al teorema di Pitagora. Questa teoria offre in pari tempo traccie numerosissime dell'influenza esercitata da Diofanto, tradotto e commentato, come avvertimmo, da Abul Wefa non solo, ma ciò che più importa per il nostro scopo, col corredo di dimostrazioni fondate su ragionamenti geometrici, come si legge nel *Qitâb Alfhîrist*. Ne ciò basta, riscontrandovisi la prova che non isfuggirono al geometra arabo i rapporti vigenti fra il problema del quale egli si occupa e la teoria dei numeri. 3.° La costruzione dei poliedri regolari e di alcuni poliedri semi-regolari con un metodo diverso dei due così differenti fra loro seguìti da Euclide e da Pappo.

In questa medesima raccolta si contengono ancora taluni problemi che non appartengono alla categoria dei geometrici propriamente detti, vale a dire di quelli solubili mediante la retta ed il cerchio. Tali sono: una costruzione della trisezione dell'angolo, una costruzione della duplicazione del cubo e due relative ad uno specchio parabolico, o per dir meglio due costruzioni per punti della parabola generativa di questo specchio. Nota il Woepcke che le costruzioni dei due primi problemi si trovano esattamente sotto la stessa forma in un manoscritto della Biblioteca di Leida, ma esse vi sono inoltre ricondotte alla intersezione d'un cerchio e d'una parabola ed accompagnate da dimostrazioni, e la seconda vi è impiegata per la determinazione di due medie proporzionali, ciocchè, come abbiamo già avuto motivo di avvertire, torna lo stesso.

Il manoscritto in questione non dà se non le costruzioni dei problemi, tace le dimostrazioni, le quali forse, come opina il Woepcke, si trovavano nell'opera originale.

Digitized by Google

Tutto ciò senza tener conto di altri scritti di Abul Wefa, dei quali si trova cenno presso Abulfaragio e che interesserebbero assai più da vicino l'argomento, (1) del quale ci stiamo occupando, ma che andarono perduti.

Thebit-ben-Corrah, discepolo di Mohammed ben Musa, diede opera assidua ad indagini analoghe a quelle, delle quali il Maestro di lui erasi occupato. Montucla, dalla lettura dei titoli delle numerose opere di questo matematico, conservatici dal Casiri (2), era già stato indotto a pensare che presso gli Arabi di quel tempo era in fiore la vicendevole applicazione dell' algebra e della geometria.

Abu Said Ahmed Ben Mohammed ben Abd Aldjalil Alsidjzi ci ha conservato dello stesso Thebit-ben-Corrah una soluzione grafica del problema della trisezione dell' angolo, assieme ad altre dovute ad Abu Sahl Alquhì, ad Abul Hassan Alchamsi Alharawi, ad Abu Hamid Alsagani, ad Abul Rihan (Albiruni) ed a lui stesso (3).

Rimandando per le particolarità che presentano queste diverse soluzioni, alla fonte citata, noi ci limiteremo a mostrare quì come da un caso particolare del problema sia lecito inferire che gli Arabi avevano fin d' allora riconosciuta la dipendenza di un tale problema da una equazione del terzo grado.

Infatti la terza fra un complesso di questioni proposte da Albiruni ad Abul Djoud è così concepita: » Poichè abbiamo detto nella settima proposizione del settimo capitolo del quarto libro del nostro trattato di geometria, che, mediante questa proposizione si può costruire algebricamente l' enneagono. »

---

(1) *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques chez les orientaux*, ecc. par M. WOEPCKE. Paris, M DCCC LV. Extrait de l'année 1855 du *Journal Asiatique*, pag. 28, 36.

(2) *Bibliotheca Arabico-Hispana Escurialensis*, ecc. Opera et studio MICHAELIS CASIRI. Tomus Prior. Matriti. Anno M. DCC. LX, pag. 386-392.

(3) *L' algèbre d' Omar Alkayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, par. F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LI, pag. 117-127.

Digitized by Google

Abul Djoud nella sua risposta considera la corda AB (*fig.* 15) che sottende la nona parte della circonferenza d'un cerchio circoscritto al triangolo isoscele ABC. Egli prende:

$$AD = AB\ ,\ ED = AD\ ,\ EZ = ED\ .$$

Considerando gli angoli alle basi dei differenti triangoli isosceli così formati, si trova $CZ = AB$ (1) ed $EA = AB$.

Abbassando le perpendicolari AT, ZK, si avrà:

$$CZ : CK :: CA : CT$$

dunque:

$$CZ : CE = CA : 2CT$$

e per conseguenza:

$$CZ : (CZ + CE) = CA : (CA + 2CT)$$
$$AB : (EA + CE) = CA : \{CB + (CB + CD)\}$$

vale a dire:

$$AB : CA = CA : (CD + 2CB)$$

Arrivato a questo punto, il geometra arabo pone $AC = 1$, $AB = x$ ed ottiene:

$$x\,(CD + 2) = 1$$

ma dalla somiglianza dei triangoli ABC, BDA segue:

$$AC\ .\ BD = (AB)^2\ ;\ BD = x^2\ ;\ CD = 1 - x^2$$

---

(1) Assumendo in generale l'angolo $\widetilde{ABC} = \frac{360^\circ}{n}$, n essendo un numero intero della forma $4m + 2$ si arriverà sempre al vertice dell'angolo, collocando così la corda sottendente successivamente m volte fra i due lati dell'angolo.

Digitized by Google

e sostituendo nell'equazione testè ottenuta si avrà: (1)

$$x^3 + 1 = 3x .$$

Considerazioni affatto analoghe erano usate dagli Arabi per costruire il lato dell'eptagono inscritto nel cerchio. Woepcke ne trovò l'esposizione nella risposta anonima ad un problema proposto da Abu Beqr Mohammed ben Jakub Alchamsi così enunciato: » Determinare in un triangolo rettangolo il rapporto d'un cateto all'altro, essendo dato l'angolo opposto al primo dei due cateti. »

L'autore comincia dall'osservare che si può risolvere questo problema per approssimazione mediante la tavola delle corde ed in seguito determina i valori esatti del menzionato rapporto facendo l'angolo noto successivamente uguale ai differenti submultipli d'un angolo retto.

Denotando con B il vertice dell'angolo retto, con C il vertice dell'angolo noto α ed il terzo vertice con A, il geometra arabo trova:

Per $\alpha = \frac{90^\circ}{2}$	$AB : BC = 1 : 1$	$AB : AC = 1 : \sqrt{2}$	
» $\alpha = \frac{90^\circ}{3}$	$AB : BC = 1 : \sqrt{3}$		
» $\alpha = \frac{90^\circ}{4}$	$AB : BC = 1 : (1 + \sqrt{2})$	$(AB)^2 : (AC)^2 = 1 : (4 + \sqrt{8})$	
» $\alpha = \frac{90^\circ}{5}$	$(AB)^2 : (BC)^2 = 1 : (5 + \sqrt{20})$	$AB : AC = 1 : (1 + \sqrt{5})$	
» $\alpha = \frac{90^c}{6}$	$AB : BC = 1 : (2 + \sqrt{3})$	$AB : AC = 1 : (\sqrt{6} + \sqrt{2})$	

---

(1) Così infatti avviene dell'equazione:

$$4 \left(sen \frac{1}{3} v \right)^3 + sen\, v = 3\, sen \frac{1}{3} v$$

per $v = 30^\circ$, ponendo $x = 2 \left(sen \frac{1}{3} v \right)$.

Digitized by Google

Per $\alpha = \frac{90^\circ}{8}$ Egli dimostra che il rapporto del quadrato di $AD = 2AB$ al quadrato del diametro AH (*fig.* 16) del cerchio circoscritto al triangolo ACD (la corda DE, perpendicolare al diametro AH essendo presa in questo caso per unità) uguaglia il rapporto:

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$

che si ha:

$$CB \,.\, BT = (AB)^2 \;;\; CB + BT = CT$$

e conseguentemente sono noti CB, BT ed il rapporto $AB : BC$.

» $\alpha = \frac{90^\circ}{10}$ Egli divide il raggio del cerchio circoscritto al triangolo ACD in media ed estrema ragione.
Allora la parte maggiore $AD = 1$, la parte minore $= \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$,

$$MT = \frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}} = AM \quad , \quad AB = \frac{1}{2}$$

dunque:

$$(MB)^2 = 1\frac{1}{4} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$$

ed essendo noto MB, saranno pur noti BC, $\frac{AB}{BC}$, $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$, $\frac{AB}{AC}$.

Digitized by Google

Per $a = \frac{90^\circ}{7}$ Egli dimostra, facendo $AB = BD$ (*fig.* 17) e $DE = AD$, che:

$$AE : AD = AD : AC$$

$$AD : CE = AC : (AC + CE) .$$

» $a = \frac{90^\circ}{9}$ Egli dimostra che:

$$AE : AD = AD : AC = AC : (2AC + CE) .$$

La dimostrazione di quest'ultimo caso è assolutamente identica a quella testè riprodotta e per la dimostrazione del caso $a = \frac{90^\circ}{7}$ l'anonimo si serve egualmente d'un processo affatto analogo a quello impiegato da Abul Djoud per la costruzione del lato dell'enneagono.

Ora facendo $AC = 1$, $AD = x$, le due relazioni date per $a = \frac{90^\circ}{7}$ si trasformano in:

$$AE = x^2 \quad , \quad (1 - x^2) = x\,(2 - x^2)$$

dunque:

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

si scorge adunque che la costruzione dell'eptagono inscritto nel cerchio è fatta dipendere da una equazione del terzo grado, ovvero dalla intersezione di due coniche. Infatti così si esprime l'autore nell'introduzione della sua memoria: » Quando, per modo di esempio, si saranno determinati i due lati che comprendono l'angolo retto in un triangolo, nel quale uno degli altri due angoli uguaglia la settima parte d'un angolo retto, si può facilmente costruire la corda della settima parte della circonferenza, la cui determinazione non erasi potuto ottenere finchè Abu

Digitized by Google

Sahl Alquhì ed io l'abbiamo costruita mediante le sezioni coniche. » Indi, dopo aver compiuta la discussione del caso $\alpha = \frac{90^\circ}{7}$ l'autore aggiunge: » E mediante questa proposizione ho costruito l'eptagono inscritto nel cerchio. »

In una rassegna del contributo recato dagli Arabi alla costruzione delle equazioni, non possono essere passati sotto silenzio taluni commenti ch'essi fecero sul trattato del cilindro e della sfera di Archimede, del quale già tenemmo parola, ed in particolare sul secondo libro di esso. Delle nove proposizioni che lo costituiscono, Abu Abdallah Almahani (1) riuscì a costruirne otto, essendosi egli invano adoperato nel dare una soluzione esatta della quinta (2) (a noi già nota per indagini precedenti) a motivo della difficoltà del lemma necessario, secondo le di lui viste, alla completa trattazione di essa. Egli cercò allora di risolverla ricorrendo all'algebra e ricondusse il problema all'eguaglianza d'un cubo e d'un numero a quadrati: ciò vale quanto applicare ad una linea data un parallelepipedo di volume dato e mancante d'un cubo. A questo passo pervenne un geometra arabo risolvendo poscia il seguente problema: » Essendo date due rette AB (*fig.* 18) e c dividere AB nel punto D in modo che AD sia a c, come il quadrato di c al quadrato di BD. Ma ciò non è possibile se non quando la retta c non è maggiore di quella che può il solido avente per spigolo un terzo di AB e mancante d'un (cubo che ha per base il) quadrato, il cui lato uguaglia due terzi di AB, (3) vale a dire, la retta che può quattro noni d'un terzo del cubo di AB. Supponiamo tuttavia che c possa

---

(1) *L'algèbre d'Omar Alkayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LI, pag. 96-103.

(2) Veramente nel testo tradotto dal WOEPCKE si legge « quarta »,

(3) Questa costruzione d'un parallelepipedo applicato ad una retta e mancante d'un cubo è ricalcata su quella d'un rettangolo applicato ad una retta e mancante d'un quadrato, data da EUCLIDE nella proposizione 28.ª del libro VI

Digitized by Google

essere maggiore, consideriamo AB nei due casi, supponendo nell'uno di togliere BD da AB e nell'altro di aggiungere BD ad AB per modo che sia AD a c come il quadrato di c al quadrato di BD. »

Ecco ora in forma abbreviata la soluzione offerta dal geometra arabo. Egli fa $BE = c$ e costruisce su BE come base il quadrato $BEZH$: descrive una parabola, che ha per vertice A, per asse AB e per parametro c, indi egli fa passare per Z una iperbole avente EB, BH per assintoti. Le due coniche necessariamente si incontrano. Dal punto d'intersezione T si abbassano due perpendicolari TK, TD sopra BH, BE. Si avrà in virtù della parabola:

$$AD : TD = TD : c \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ed in virtù dell'iperbole:

$$BK : BE = EZ : KT$$

$$TD : c = c : BD \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

e combinando le (1) e (2) si ottiene:

$$AD : TD = TD : c = c : BD$$

$$AD : c = c : (BD)^2$$

Il geometra arabo ritorna in seguito al problema principale.

» Dopo aver risolto preventivamente questo lemma, prendiamo AB nei due casi e proponiamoci di applicare ad AB un solido

---

degli *Elementi*. Infatti, denotando con l la retta data, con v od s il volume o la superficie data, la prima costruzione si esprimerà colla formula:

$$v = (l - x)\, x^2,$$

la seconda coll'altra:

$$s = (l - x)\, x.$$

Digitized by Google

a lati paralleli, uguale ad un solido dato, eccedente o mancante d'un cubo (1). Sia la retta c il lato d'un cubo uguale al solido dato. In uno dei due casi togliamo da AB e nell'altro aggiungiamo una retta BD tale che AD sia a c come il quadrato di c al quadrato di BD. La possibilità di questa costruzione non è limitata al secondo caso, ma essa lo è necessariamente al primo. Il limite è che la retta c non sia maggiore di quella che può un cubo uguale a quattro noni d'un terzo del cubo di AB, vale a dire il solido avente per spigolo un terzo di AB e mancante d'un cubo che ha per base il quadrato il cui lato è uguale a due terzi di AB. Il prodotto del quadrato di BD in AD è uguale al solido a lati paralleli, terminato da due quadrati di BD e da quattro rettangoli AD, BD; il prodotto del quadrato di c in c è il cubo uguale al solido dato. Il solido applicato ad AB sarà in un caso mancante, nell'altro eccedente d'un cubo il cui lato è uguale a BD, ciocchè volevasi dimostrare. »

Il geometra arabo si propone in seguito il seguente problema più generale: Essendo dato un volume V, un parallelepipedo P ed una retta a, applicare a questa retta un parallelepipedo uguale a V e mancante od eccedente un parallelepipedo simile a P.

Ecco brevemente la dimostrazione mercè la quale il geometra arabo riconduce questo problema al lemma precedentemente risolto.

Denotiamo con p, q, r tre spigoli d'un parallelepipedo che vanno a riferire a un medesimo vertice, e con α, β, γ gli angoli compresi fra questi tre spigoli presi a due a due, il volume di questo parallelepipedo sarà rappresentato dall'espressione:

$$pqr\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2}.$$

Finchè si tratti, come quì ne è il caso, di parallelepipedi simili, α, β, γ saranno costanti, q ed r potranno sostituirsi con

(1) Che il volume dato sia uguale al cubo c^3. Mediante il lemma si trova AD, per modo che $AD(BD)^2=c^3$, ma $AD=(AB\pm BD)$; dunque $AB(BD)^2\pm(BD)^3$ uguale al volume dato, come appunto si cercava.

Digitized by Google

$\lambda . p$, $\mu . p$ denotando con λ e μ dei rapporti costanti, p solo restando variabile, il volume di uno qualunque di questi parallelepipedi si esprimerà con $p^3 k$, denotando con k una costante.

Determiniamo ora p^3, ponendo $p^3 k = V$, indi risolviamo l'equazione:

$$(a - x)\, x^2 = p^3$$

risoluzione data dall'autore nel suo lemma: avendo determinato x, prendiamo sopra AB (*fig.* 19) un segmento $DB = x$ e facciamo il parallelepipedo BK simile a P. Si avrà il volume di BK rappresentato con $x^3 k$. E poichè:

$$BK : AK = BD : AD$$

si avrà il volume di AK:

$$(a - x)\, x^2\, k = p^3\, k = V.$$

Ora, ciò che particolarmente apparisce degno di attenzione è il limite enunciato in questo brano relativamente alla solubilità dell'equazione:

$$(AB - x)\, x^2 = c^3$$

facendo $BD = x$, ovvero dell'equazione:

$$x^3 + a = bx^2.$$

Quivi infatti l'autore dichiara con tutta la desiderabile precisione che il lemma di Archimede fu ricondotto da Almahani ad una equazione dell'ultima forma registrata e che la risoluzione di questa equazione che si propose Almahani dipende alla sua volta dal lemma risolto dall'autore, vale a dire dalla costruzione dell'equazione:

$$(AB - x) : c = c^2 : x^2$$

Digitized by Google

La relazione che esprime il limite di solubilità d'uno di questi problemi connessi vicendevolmente è quindi da riguardarsi data nel tempo stesso che per gli altri.

Ora l'autore enuncia questo limite allo stesso modo che usano i moderni, esprimendolo colla relazione:

$$c = \sqrt[3]{\frac{4}{27}\,(AB)^3} \text{ ovvero } 27\,a = 4c^3\,.$$

Non è senza interesse lo studiare il progresso che nella soluzione del lemma di Archimede verificarono gli Arabi in confronto di Eutocio. Questi infatti aveva data la sua soluzione sotto la forma seguente: Determinare sopra una retta data AB un segmento BE tale che AE sia ad una linea data come una superficie data al quadrato di BE; indi egli aveva osservato e dimostrato che il prodotto della superficie data nella linea data non deve essere maggiore del prodotto $AE\,(EB)^2$ quando si prenda $BE = 2EA$. Il geometra arabo invece pervenne alla moderna espressione di questo limite, sostituendo al prodotto dei due dati, il lineare ed il superficiale, il cubo d'una sola retta data. Finalmente è ancora da osservarsi come quanto in Eutocio non è se non una proprietà isolata di un certo caso di geometria, si tramuta in mano agli arabi in un teorema appartenente alla teoria delle equazioni cubiche.

Woepcke opina che autore di questa bella ed importante scoperta sia Abu Sahl Vidjan Ben Vastem Alquhi, a ciò confortato dalla discussione d'un problema che indubbiamente appartiene a questo autore e nel quale si riscontrano altre considerazioni dei limiti ugualmente fondate sul teorema di Eutocio.

Questo nuovo problema è contenuto in un brano di manoscritto inedito, fatto pur esso conoscere da Woepcke (1). In que-

---

(1) *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits,* par F. WOEPCKE. Paris, MDCCCLI, pag. 103-114.

Digitized by Google

sto brano, opera di un anonimo relatore, è riferito che nello scritto originale di Alquhi si contengono tre costruzioni sul secondo libro della citata opera di Archimede, le due prime fra di esse essendo già state date da Archimede istesso, che tuttavia trascurò la terza. Ecco intanto i tre problemi ai quali le anzidette costruzioni si riferiscono:

I. Costruire un segmento di sfera uguale in volume ad un segmento di sfera dato e simile ad un secondo segmento di sfera, pur esso dato (1).

II. Costruire un segmento di sfera uguale in superficie ad un segmento di sfera dato e simile ad un secondo segmento di sfera, pur esso dato (2).

III. Costruire un segmento di sfera uguale in volume ad un segmento di sfera dato ed uguale in superficie ad un secondo segmento di sfera pur esso dato.

Denotando con r il raggio della sfera, alla quale appartiene il segmento che si tratta di costruire e con Δ la distanza del piano secante dal polo del segmento, si avrà:

$$\text{I.}\quad \frac{\pi}{3}\Delta^2(3r-\Delta)=a\,,\quad \frac{\Delta}{r}=c\ldots\quad r=\sqrt[3]{\frac{3a}{\pi c^2(3-c)}}\,,$$

$$\Delta=\sqrt[3]{\frac{3a\,c}{\pi(3-c)}}$$

$$\text{II.}\quad 2\pi\Delta r=b\,,\quad \frac{\Delta}{r}=c\ldots\quad r=\sqrt{\frac{b}{2\pi c}}\,,\quad \Delta=\sqrt{\frac{bc}{2\pi}}$$

---

(1) *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis.* Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 117.

(2) *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis.* Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 181. — Qui nella superficie del segmento non è compresa la base circolare.

Digitized by Google

III. 1) $\frac{\pi}{3}\Delta^3(3r-\Delta)=a$

2) $2\pi\Delta r=b$.

E ponendo $\frac{a}{b}=a'$, $\frac{b}{\pi}=b'$:

3) $\Delta^3-\frac{3}{2}b'\Delta+3a'b'=0$

4) $r^3-\frac{b'}{4a'}\ r^2+\frac{b'^2}{24a'}=0$

E siccome convien escludere i valori negativi di r e di Δ e fra i valori positivi quelli che renderebbero $\Delta>2r$, (1) si trova:

1.° Il problema non ammette soluzione se non in quanto $b' \underset{>}{=} 18a'^2$

2.° Per $b'=18a'^2$, il segmento cercato è l'emisfero, scomponendosi in questo caso le due equazioni nel modo seguente:

$$\left(\Delta-\sqrt{\frac{b'}{2}}\right)^2\left(\Delta+\sqrt{2b'}\right)=0$$

$$\left(r-\sqrt{\frac{b'}{2}}\right)^2\left(r+\frac{1}{4}\sqrt{2b'}\right)=0.$$

3.° Per $36a'^2>b'>18a'^2$ si ottengono due segmenti, dei quali l'uno maggiore e l'altro minore della metà della sfera.

---

(1) La discussione delle due equazioni proposte sotto quest'ultimo rapporto riesce facile ove si sostituisca ad r l'unità, vale a dire, mutando la condizione $b'>18a'^2$ in $4>\Delta(3-\Delta)^2$, e si esamini, in base al teorema di STURM, il numero delle radici reali dell'equazione:

$$\Delta^3-6\Delta^2+9\Delta-\varepsilon=0$$

nella quale $4>\varepsilon>0$, comprese nei due intervalli da 0 ad 1 e da $+1$ a $+2$, distinguendo per il secondo intervallo i casi $4>\varepsilon>2$; $2>\varepsilon>0$; $\varepsilon=2$: in quest'ultimo caso si avrà:

$$\Delta^3-6\Delta^2+9\Delta-2=(\Delta-2)(\Delta-2-\sqrt{3})(\Delta-2+\sqrt{3}).$$

Digitized by Google

4.° Per $b' = 36a''$, esistono due soluzioni, delle quali una dà una sfera intera, l'altra un segmento la cui altezza riportata all'unità del raggio è circa 0, 268.

5.° Per $b' > 36a'^2$ non si ha che una unica soluzione ed un solo segmento minore della metà della sfera.

Questa rapida esposizione mostra che il problema propostosi dal geometra arabo è ben più difficile dei due primi risolti da Archimede: gli è anzi in grazia della forma particolare delle equazioni 1) e 2) che il problema non conduce ad una equazione del sesto grado. Ora Alquhi non solo risolve il problema, ma altresì ne discute nel modo più completo i particolari. Ecco come egli procede.

Egli costruisce due coni tali che il primo sia uguale in volume al primo segmento dato di sfera e che il secondo abbia per altezza e per raggio della sua base una retta uguale alla retta HN, condotta dal polo del secondo segmento di sfera dato ad un punto qualunque della circonferenza della sua base; retta, che, come ben si scorge, ha una lunghezza costante per tutti i segmenti sferici uguali in superficie. Denotando rispettivamente i volumi di questi due coni con C e C', si avrà:

$$HN = \sqrt{b'} \qquad C = a \qquad C' = \frac{b'^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}.$$

Indi egli prende due rette:

$$BK = \frac{3}{2}\frac{C'}{C}\,HN = \frac{1}{2}\frac{b'}{a'}$$

$$s = HN \cdot \frac{C}{C'} = 3a' \ .$$

e con questi dati costruisce due coniche, cioè:

una iperbole equilatera $xy = (HN)^2$

ed una parabola $y^2 = (BK - x)\,s$

Digitized by Google

la cui intersezione ha per ordinata l'altezza del segmento che si tratta di costruire e per ascissa il diametro della sfera alla quale il segmento appartiene. Infatti, eliminando alternativamente x ed y fra le equazioni delle due sezioni coniche, dopo aver sostituito ad HN, BK, s i loro valori in funzione di a' e b' si avrà:

$$y^3 - \frac{3}{2} b' y + 3a'b' = o$$

$$x^3 - \frac{b'}{2a'} x^2 + \frac{b'^2}{3a'} = o$$

equazioni che, confrontate colle 3) e 4), mostrano immediatamente la corrispondenza di y a Δ e di x a $2r$.

Richiamiamo in particolar modo l'attenzione del lettore sopra questa costruzione simultanea di due equazioni che contengono due incognite, mediante l'intersezione di due coniche e passiamo alla discussione che il geometra arabo fa dei casi particolari.

Alquhi distingue questi casi secondo i diversi valori che può assumere il rapporto $\frac{C'}{C}$, cioè:

$$\frac{C'}{C} \leqq \frac{\sqrt{2}}{1}, \quad \frac{\sqrt{2}}{1} < \frac{C'}{C} < \frac{2}{1}, \quad \frac{C'}{C} \geqq \frac{2}{1}$$

vale a dire:

$$b' \leqq 18a'^2, \quad 18a'^2 < b' < 36a'^2, \quad b' \geqq 36a'^2.$$

Egli dimostra dapprima in modo rigoroso, ricorrendo alla considerazione della tangente comune, che nel caso del contatto delle due coniche si ha $\frac{C'}{C} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, indi che si ha in generale $\left(\frac{C'}{C}\right)^2 = \frac{(2r)^3}{\Delta\,(3r - \Delta)^2}$ e che il denominatore di quest' ultima

Digitized by Google

espressione diventando un massimo nel caso del contatto, poichè allora $\Delta = r$, il valore $\frac{\sqrt{2}}{1}$ corrispondente al caso del contatto sarà il valor minimo del rapporto $\frac{C'}{C}$ ed il limite inferiore che non può essere oltrepassato.

Egli dimostra in seguito in modo non meno rigoroso e non meno puramente geometrico, che fintantochè $\Delta > r$, si avrà: $\frac{C'}{C} < \frac{2r}{r}$, d'onde segue che allorquando il segmento che si tratta di costruire deve esser maggiore dell'emisfero, il rapporto dato $\frac{C'}{C}$ ha per limite superiore $\frac{2}{1}$. L'autore mette inoltre in evidenza che allorquando il segmento è minore dell'emisfero, il rapporto $\frac{C'}{C}$ non ha limite superiore e che da quanto si è detto consegue che ai valori di $\frac{C'}{C}$ compresi fra $\frac{\sqrt{2}}{1}$ e $\frac{2}{1}$ possono corrispondere segmenti nelle due metà della sfera.

Dopo aver compiuta l'analisi del problema egli aggiunge una discussione sopra basi geometriche, del più alto interesse, fa poi seguire la sintesi del problema e la dimostrazione della sintesi, dopo di che il geometra arabo considera una seconda volta i casi particolari riuscendo a stabilire perfettamente le medesime categorie che poco fa furono messe in evidenza, approfittando dei metodi moderni.

Quanto poi alla proposizione enunciata ma non risolta da Archimede, e della quale tenemmo a suo luogo parola, ecco la costruzione che ne porge Abul Hassan ben Alhassan ben Alhaitham.

Sieno (*fig.* 20) *AD*, *ET*, *CZ* uguali a *BD* e perpendicolari a *DZ* e congiungiamo i punti *A*, *E*, *C* che sono in linea retta, indi facciamo passare per *E* una iperbole i cui assintoti sieno *CZ*, *ZD*: essa taglierà *AD* in un punto *K* situato fra *A* e *D*.

Digitized by Google

Indi costruiamo una parabola il cui asse sia DA, il vertice D ed il parametro DB. Essa taglierà AC in un punto S, di maniera che si avrà $(AS)^2 = AD \cdot BD = (BD)^2$ dunque $AS = BD$. E poichè $AE = DT > DB$, si avrà $AE > AS$. Il punto E sarà adunque situato nella regione esterna del piano rispetto alla parabola, mentre K, come punto del suo asse, si troverà nella regione interna: ne segue che l'iperbole e la parabola avranno una intersezione. Abbassiamo dal punto M d'intersezione una perpendicolare sopra DZ: il piede H di essa sarà il punto cercato. Infatti conducendo per M una retta NML parallela a DZ, si avrà in virtù della parabola:

$$(MN)^2 = BD \cdot DN \quad ; \quad (DH)^2 = BD \cdot MH$$

$$(BD)^2 : (DH)^2 = BD : MH \ldots\ldots (1)$$

E per l'iperbole:

$$ML : EC = ET : MH$$

$$HZ : ZT = BD : MH \ldots\ldots (2)$$

E, combinando assieme le (1) e (2):

$$HZ : ZT = (BD)^2 : (DH)^2$$

come appunto volevasi dimostrare.

Denotando del resto rispettivamente DB, TZ, DZ, DH con a, b, c, x ed assumendo D per origine delle coordinate, l'equazione dell'iperbole sarebbe:

$$y(c - x) = ab$$

e quella della parabola:

$$x^2 = ya$$

le quali assieme combinate darebbero l'equazione che si trattava di costruire:

$$x^2(c - x) = a^2 b.$$

Digitized by Google

Nello stesso manoscritto inedito dal quale Woepcke tolse la memoria, di cui ci siamo testè occupati, si trova un'altra soluzione dello stesso problema, preceduta da queste parole: » Di un altro modo di un altro, mediante il movimento della linea. » Si tratta quivi di una soluzione meccanica, assai interessante anche perchè essa concorre a provare quanto gli Arabi abbiano saputo penetrare nello spirito dei metodi greci.

Ecco pertanto in breve il procedimento del geometra arabo.

Conducendo dai punti D e Z (*fig.* 21) due perpendicolari alla DZ, egli prende sulla prima un segmento $DA = BD$ e sul prolungamento di DZ un segmento ZC uguale a ZT. Indi egli immagina due rette giranti intorno ai punti A e C rimanendo costantemente fra loro parallele: la prima di queste rette mobili taglierà costantemente la retta DZ, la seconda taglierà la perpendicolare condotta dal punto Z: la congiungente dei due punti d'intersezione muterà di posizione colle rette mobili e comprenderà con esse angoli variabili. Fra tutte le posizioni che successivamente assume il sistema di queste tre rette mobili, fissiamo quella nella quale la terza retta che congiunge i punti d'intersezione riesce perpendicolare alle due parallele mobili; il punto d'intersezione H della prima retta mobile colla retta fissa DZ corrispondente a questa posizione, sarà quello che si tratta di trovare. Infatti si avrà:

$$AD : DH = HZ : ZE$$
$$(AD)^2 : (DH)^2 = (HZ)^2 : (ZE)^2 = HZ : ZC$$

ed essendo $AD = BD$, $ZC = ZT$, si avrà:

$$(BD)^2 : (DH)^2 = HZ : ZT$$

Denotando del resto, come superiormente si è fatto, BD, TZ, DZ, DH rispettivamente con a, b, c, x, si tratta quivi di costruire l'equazione:

$$(1) \quad \ldots \quad x^3 - cx^2 + a^2 b = o$$

Digitized by Google

La costruzione del geometra arabo consiste essenzialmente nel costruire la curva luogo geometrico dei piedi di tutte le perpendicolari abbassate dal punto C su tutte le tangenti d'una parabola, della quale A è fuoco, e DC la tangente al vertice, e nel tagliare questa curva mediante una retta perpendicolare a DC nel punto Z. In altri termini, prendendo il punto C per origine delle coordinate, si combina la curva: (1)

$$(I) \ldots\ldots y^3 + x'^2 y - (b + c) x' y + a x'^2 = o$$

colla retta $x' = b$ ed introducendo x in luogo di y, mediante la relazione:

$$a : x = y : x' = y : b$$

si ottiene realmente la proposta equazione.

Abbiamo a suo luogo accennato alla soluzione data da Platone del problema delle due medie proporzionali: in quella circostanza pertanto noi ci siamo a bella posta limitati ad un semplice cenno, riservandoci di entrare quì in alcuni particolari onde mostrare come la costruzione del geometra arabo si colleghi a quella data da Platone.

La soluzione platonica (2) consiste essenzialmente nell'assumere sopra i due lati dell'angolo retto a partire dal vertice B (*fig.* 22) due segmenti BA, $B\Gamma$ rispettivamente uguali alle due

---

(1) Discutendo l'equazione, si trova che questa curva ha due rami infiniti, avendo per assintoto comune la direttrice della parabola summenzionata e diretti d'ambe le parti di questo assintoto. Essa forma sopra l'asse CD (*fig.* 21) un nodo rivolto verso AD ed ha un punto doppio in C: si allontana maggiormente dall'asse delle ascisse ai due punti che hanno per coordinate:

$$y = \frac{\pm d - a}{2} \quad , \quad x' = \frac{b + c}{2} \cdot \frac{\pm d - a}{\pm d + a}$$

ponendo $d^2 = a^2 + (b + c)^2$.

(2) *Archimedis quae supersunt omnia*, ecc. Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 135..

Digitized by Google

linee date e nel trovare mediante lo strumento da lui ideato a tale scopo, due punti E, Δ situati sui prolungamenti di AB e di ΓB, per modo che $\Gamma E\Delta$, $E\Delta A$ sieno angoli retti.

Denotando $B\Gamma$ con b, BE con y, $B\Delta$ con z, BA con a, si avrà infatti $b : y = y : z = z : a$, dunque si sarà costruita la equazione:

$$(2) \ldots\ldots y^3 = a \cdot b^2 \cdot$$

Ora evidentemente questo processo consiste nel costruire la curva luogo geometrico dei piedi di tutte le perpendicolari abbassate dal punto Γ su tutte le tangenti della parabola, della quale A è il fuoco e $B\Gamma$ la tangente al vertice e nel tagliare questa curva col prolungamento della retta AB.

Questa curva è adunque identica a quella della quale ci siamo testè occupati. Prendendo il punto Γ per origine delle coordinate, la curva:

$$(II) \ldots\ldots y^3 + x^2 y - bxy - ax^2 = o$$

combinata colla retta $x = b$, ne dà $y^3 = ab^2$. Scambiando le direzioni positiva e negativa delle y, le equazioni (I) e (II) divengono identiche quando sieno gli stessi i parametri $(b + c)$ e b.

Il geometra arabo si è adunque ingegnosamente servito dei mezzi immaginati da Platone per costruire l'equazione (2), applicandoli alla costruzione della (1).

Non possiamo ancora passare sotto silenzio la soluzione data da un anonimo geometra arabo del seguente problema: (1) » Costruire un trapezio $ABCD$ (*fig.* 23) in modo che ciascuno dei lati AB, AD, BC sia eguale a 10 e l'area della figura sia uguale a 90. » L'autore mostra espressamente che questo problema dipende da una equazione del quarto grado: egli prende a tale scopo $DK = x$ (AK essendo la perpendicolare abbassata da A sul prolunga-

---

(1) *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LI, p. 114-116.

Digitized by Google

mento di CD) d'onde segue $(AB - x)\ AK = 90$, dunque $(AB - x)^2$ $(AK)^2 = 90^2$; ma $AB = 10$ ed $(AK)^2 = 10^2 - x^2$, per conseguenza:

$$(10 - x)^2\ (100 - x^2) = 8100$$
$$x^4 + 2000\ x = 20\ x^2 + 1900.$$

Indi egli costruisce il problema nel modo seguente. Assume $AB = 10$ e fa EB perpendicolare ad AB ed uguale a $\frac{9}{10}\ AB$; completato il rettangolo BZ, fa passare per E una iperbole avente per assintoti BA, AZ. Un cerchio descritto dal centro B e di raggio BA taglierà l'iperbole, perchè $AB > BE$. Conduciamo $BC = AB$ e costruiamo un angolo $BAD = ABC$, formando $AD = BC$. Allora $ABCD$ sarà il trapezio domandato (1).

In un ulteriore lavoro intorno a questo stesso argomento, (2) il Woepcke ha posto in evidenza come gli Arabi possedessero tutti i mezzi necessari alla costruzione delle equazioni del quarto grado ad eccezione di un solo caso (3).

---

(1) Denotando con a la lunghezza AB, l'area data con b^2, l'equazione che si tratta di costruire sarà:

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^3\ x - a^4 + b^4 = 0$$
$$(a - x)^2\ (a^2 - x^2) = b^4$$

Prendendo B per origine delle coordinate, l'equazione dell'iperbole sarà $(a - x)\ y = b^2$, quella del cerchio $x^2 + y^2 = a^2$: queste due curve costruiscono adunque il problema.

(2) *Sur la construction des équations du quatrième degré par les géomètres arabes;* par M. WOEPCKE. Nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* etc. publié par J. LIOUVILLE. Deuxième Série - Tom. VIII. — Année 1863. pag. 57-70.

(3) È quello che corrisponde alla circostanza particolarissima, nella quale per la curva:

$$y = x^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$$

gli assi sieno collocati in tale maniera che una sola intersezione della curva coll'asse delle ascisse sia situata da una parte dell'asse delle ordinate, mentre tutte le altre intersezioni, del pari che tutti i massimi ed i minimi dell'ordinata, si trovano dall'altra parte.

Digitized by Google

Nel notevolissimo scritto di Alkarkhi pubblicato pur esso da Woepcke (1) troviamo fra le dimostrazioni della risoluzione delle equazioni quadratiche le dimostrazioni aritmetiche di Diofanto esplicitamente contrapposte alle geometriche; queste ultime però non hanno l'evidenza immediata della costruzione geometrica insegnata da Mohammed ben Musa, ma si fondano segnatamente sui teoremi geometrici del II libro degli *Elementi* di Euclide. Noi non insisteremo qui maggiormente sopra quest'opera fra le più importanti della letteratura matematica degli arabi, proponendoci di ritornarvi e con ogni particolare quando ci faremo a trattare di Leonardo Pisano e delle evidenti traccie arabe che nei di lui scritti si riscontrano anche per ciò che si riferisce allo speciale argomento del quale stiamo occupandoci.

Ed ora veniamo senz'altro all'analisi d'uno scritto arabo, il quale occupa un punto culminante nell'insieme dell'indagine presente.

Da oltre un secolo e mezzo l'algebra di Omar Alkhayyamî ha più o meno direttamente richiamata l'attenzione dei matematici. Infatti, Gherardo Meermann nella prefazione al suo *Specimen calculi fluxionalis* pubblicato a Leida nel 1742, tracciando lo sviluppo successivo del calcolo analitico, cita un manoscritto arabo di Omar-ben-Ibrahim, intitolato: *l'algebra delle equazioni cubiche* oppure *la risoluzione dei problemi solidi* e da questo titolo egli fu indotto a congetturare ch'esso contenesse la risoluzione algebrica delle equazioni cubiche. Questa asserzione del Meermann venne riprodotta e confortata di qualche argomento dal Klügel (2) e dal

---

(1) *Extrait du Fakhri, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhi (Manuscrit 952, supplément arabe de la bibliothèque impériale); précédé d'un mémoire sur l'algèbre indeterminée chez les Arabes* par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LIII. — *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* von Dr. HERMANN HANKEL. Leipzig, 1874, pag. 267.

(2) *Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik*, ecc. von GEORG SIMON KLÜGEL. Erste Abtheilung. *Die reine Mathematik*. Erster Theil. Leipzig, 1803, pag. 32.

Digitized by Google

Montucla, (1) il quale ultimo anzi, accennando alla importanza che lo studio di tale opera potrebbe avere per la storia delle matematiche, deplora che fra i cultori di queste scienze, alcuno non ve ne sia stato fino ai suoi tempi, il quale conoscesse l'arabo a tal punto da poter prendere cognizione dei molti mss. arabi inediti che le riguardano. Questo voto dell'insigne storico non tardò ad essere appagato, mediante la cooperazione dei due distinti orientalisti Sédillot e Woepcke.

Il primo infatti fin dal Maggio 1834, annunziava nel *Nouveau Journal Asiatique* di aver scoperto in un manoscritto arabo della Biblioteca Reale di Parigi un frammento assai interessante d'un trattato d'algebra, il cui contenuto presentava una rimarchevole analogia con quello, che, secondo ogni probabilità, doveva costituire l'argomento del manoscritto di Leida. Qualche anno dopo il Sédillot istesso dava alla luce il frammento, (2) accompagnandolo con opportune illustrazioni, ma si astenne completamente da conghietture intorno all'autore di esso, dichiarandolo senz'altro anonimo.

---

(1) *Histoire des Mathématiques*, ecc. par J. F. MONTUCLA. Nouvelle édition. Tome Premier. Paris, An. VII, pag. 383.

(2) *Recherches nouvelles pour servir à l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux. ou notice de plusieurs opuscules mathématiques qui composent le manuscrit arabe n.° 1104, ancien fonds de la Bibliothèque du Roi,* par M. L. AM. SÉDILLOT, ecc. Paris, 1837. — *Notices et extraits de manuscrits de la Bibliothèque du Roi et autres bibliothèques publiés par l'Institut de France, faisant suite aux notices et extraits lus au comité établi dans l'académie des inscriptions et belles-lettres.* Tome Treizième. Paris, M.DCCC.XXXVIII, pag. 130 e seg. — *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les grecs et les orientaux* par M. L. P. E. A. SÉDILLOT, ecc. Tome Premier. Paris, 1845-1849, pag. 123, 367. — *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne,* ecc. par M. CHASLES. Paris, 1875, pag. 493.

Digitized by Google

Il Libri però, appena ebbe fra mano il manoscritto, asserì (1) che l'opera della quale si era pubblicato un frammento, era contenuta per intero in un'altro manoscritto arabo appartenente alla medesima biblioteca e della quale doveva essere autore » Omar Alkheyamy di Nisapour » ne riconobbe l'identità col manoscritto di Leida, ed annunciò anzi il proposito di pubblicarlo per intero.

Confortato da tali autorevolissimi voti il Woepcke si accinse a darlo alla luce con una traduzione francese, servendosi di tutte e tre le fonti indicate.

Omar Alkhâyyamî fu non solo geometra, (2) ma bensì fra i più illustri astronomi del suo tempo, poichè fu uno dei principali autori della riforma del calendario introdotta nel 1079 da Maliq-Shah (3), e poeta: (4) noi tuttavia ci limiteremo qui all'esame dell'algebra, valendoci appunto della accurata e dottissima traduzione fattane dal Woepcke (5).

L'opera è divisa nelle seguenti cinque parti:

1.° l'introduzione, che comprende una prefazione, le definizioni delle nozioni fondamentali dell'algebra ed un quadro delle equazioni che l'autore si propone di discutere.

---

(1) *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle,* par GUILLAUME LIBRI. Tome Premier, Deuxième édition. Halle, 1865, pag. 300-301.

(2) La Biblioteca di Leida (cifr. Mss. n.° 1067 del catalogo pubblicato nel 1716) possiede un'opera di lui sulle difficoltà offerte dalle definizioni premesse agli *Elementi* di EUCLIDE.

(3) È degno di nota che in tale occasione egli determinò con mirabile precisione la durata dell'anno tropico, evitando anche l'errore dei tre giorni in diecimila anni, nel quale cadde più tardi ALOISIO LILIO (SÉDILLOT. *Manuel de Chronologie Universelle.* T. I. Paris, 1851, pag. 165. — SÉDILLOT. *Lettre à M. de Humboldt sur les travaux de l'école arabe.* Paris, 1852, pag. 28. — *Veterum Persarum et Parthorum et Medorum religionis historia.* Autor est THOMAS HYDE, ecc. Ed. II. Oxonii, M DCC LX, pag. 529-531).

(4). J. v. HAMMER. *Geschichte der schönen Redekünste Persiens.* Wien, 1818, pag. 80-82.

(5) *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits,* par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LI.

Digitized by Google

2.° la risoluzione delle equazioni dei due primi gradi.

3.° la costruzione delle equazioni cubiche.

4.° la discussione delle equazioni a termine frazionario aventi per denominatori delle potenze dell' incognita.

5.° Osservazioni addizionali.

Una particolarità per noi estremamente interessante consiste in ciò che l'autore, per tutte le equazioni delle quali si occupa, aggiunge alla risoluzione numerica od aritmetica, la costruzione geometrica e viceversa.

E nelle equazioni cubiche, dove egli è costretto a limitarsi a quest' ultima, segnala la lacuna ai futuri algebristi, esprimendo la lusinga ch' essa venga colmata.

La risoluzione numerica offerta dall'algebrista arabo comprende:

1.° ciò che oggidì si designa col nome di risoluzione algebrica d'una equazione.

2.° la determinazione delle condizioni necessarie perchè la funzione dei coefficienti, che è uguale all' incognita, divenga un numero intero.

Se i coefficienti dell' equazione proposta soddisfanno a queste condizioni, la risoluzione numerica, secondo il nostro autore, è possibile: impossibile invece nel caso contrario. Attesa questa impossibilità, la costruzione geometrica serve nel trattato dell'algebrista arabo non solo di schiarimento e spiegazione, ma altresì di necessario complemento alla risoluzione numerica. In questo senso si spiega la definizione ch' egli dà dell' Algebra, esprimendo che » *ha per iscopo la determinazione delle incognite così numeriche come geometriche.* »

In ordine a quanto precedentemente venne esposto, rapporto alla posizione che nello svolgimento storico dell'argomento vengono ad occupare gli Arabi, il nostro stesso autore somministra elementi preziosi: dopo aver detto di non aver trovato alcuno presso gli antichi che si sia occupato dell' argomento da lui impreso a trattare, segnala fra quelli a lui più vicini, Almahani,

Digitized by Google

il quale » concepì l'idea di risolvere algebricamente il teorema ausiliario impiegato da Archimede nella quarta proposizione del secondo libro del suo trattato della sfera e del cilindro: ora egli fu condotto ad una equazione contenente dei cubi, dei quadrati e dei numeri, che non riuscì a risolvere dopo averne fatto lo scopo di lunga meditazione: si dichiarò adunque che questa risoluzione era impossibile, finchè comparve Abu Djafar Alkhazin, che risolse l'equazione mediante le sezioni coniche. Dopo di lui tutti i geometri avevano bisogno di specie dei suddetti teoremi, ed uno ne risolse uno e l'altro un'altro. Ma niuno di essi espresse cosa alcuna sulla enumerazione di queste specie, nè sulla esposisizione dei casi di ciascuna specie, nè sulle loro dimostrazioni, eccettuate due specie che non mancherò di segnalare. » (1)

L'autore arabo presuppone noti al suo lettore gli *Elementi* ed i *Dati* d'Euclide ed i due primi libri delle coniche di Apollonio, asserendo anzi aver durato fatica a limitarsi nelle citazioni alle sole tre opere accennate. Indi, fatto osservare ch'egli non considera se non quattro ordini di quantità, vale a dire numeri assoluti, i lati o radici, i quadrati ed i cubi e che non si può concepire oltre a tre dimensioni, (2) aggiunge che nei trattati degli algebristi arabi che lo precedettero non si trova se non la risoluzione delle equazioni dei tre primi ordini, vale a dire in numeri assoluti, in lati ed in quadrati, ma che egli darà delle regole per dedurre l'incognita in ciascuno dei quattro ordini, servendosi a tale scopo delle proprietà del cerchio e delle sezioni coniche contenute nelle opere precitate.

---

(1) *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LI, pag. 2-3.

(2) È notevolissimo a questo riguardo il passo seguente (pag. 6): « Per grandezze misurabili io intendo la quantità continua, della quale si hanno quattro specie: la linea, la superficie, il solido ed il tempo.... non si usa introdurre il tempo fra gli oggetti dei problemi algebrici, ma se lo si fosse fatto, la cosa sarebbe stata perfettamente ammissibile. »

Digitized by Google

Egli divide poi le equazioni fra le quantità dei quattro ordini in *semplici* e *composte* e cominciando dalle prime (binarie) dice esservene sei specie che enumera e che, tradotte negli odierni simboli, sarebbero:

1.°) $a = x$

2.°) $a = x^2$

3.°) $a = x^3$

4.°) $bx = x^2$

5.°) $bx = x^3$

6.°) $cx^2 = x^3$

La quarta e la sesta riducendosi, come egli stesso osserva, alla prima, la quinta alla seconda, la terza non potendo essere risolta in numeri che mediante l'*istikra* (1) e per via geometrica se non ricorrendo alle sezioni coniche.

Le equazioni composte egli le divide in trinomie e quadrinomie: distingue dodici specie di trinomie, delle quali le tre prime:

7.°) $x^2 + bx = a$

8.°) $x^2 + a = bx$

9.°) $bx + a = x^2$

sono trattate nei libri d'algebra e dimostrate geometricamente ma non numericamente. Le tre seguenti:

10.°) $x^3 + cx^2 = bx$

11.°) $x^3 + bx = cx^2$

12.°) $cx^2 + bx = x^3$

---

(1) Vale quanto considerazione di tutti i casi particolari ai quali una data proposizione generale è applicabile — in questo caso significherebbe quindi — conoscenza preventiva della serie dei numeri cubici.

Digitized by Google

sono riguardate come omogenee alle prime, finalmente le sei altre sono:

13.°) $x^3 + bx = a$

14.°) $x^3 + a = bx$

15.°) $bx + a = x^3$

16.°) $x^3 + cx^2 = a$

17.°) $x^3 + a = cx^2$

18.°) $cx^2 + a = x^3$

e di esse nei trattati dei precedenti algebristi non si trova se non la discussione della 17.ª mentre il nostro Autore si propone di discuterle e dimostrarle geometricamente, mediante le proprietà delle sezioni coniche.

Quanto alle quadrinomie, in numero di sette, le distingue in due classi: la prima comprende i quattro casi in cui vi sono tre ordini di quantità uguali ad un solo, cioè:

19.°) $x^3 + cx^2 + bx = a$

20.°) $x^3 + cx^2 + a = bx$

21.°) $x^3 + bx + a = cx^2$

22.°) $cx^2 + bx + a = x^3$

la seconda comprende i tre casi in cui due ordini sono uguali a due altri, cioè:

23.°) $x^3 + cx^2 = bx + a$

24.°) $x^3 + ba = cx^2 + a$

25.°) $x^3 + a = cx^2 + bx$

di queste sette annuncia di non aver potuto ottenere la soluzione se non geometricamente: la dimostrazione non potendo essere effettuata se non ricorrendo alle proprietà delle sezioni coniche.

Quanto alla prima equazione binaria riconosce Omar Alkhayyâmî che la radice è necessariamente nota: della seconda ottiene

Digitized by Google

una risoluzione aritmeticamente mediante estrazione ed una geometrica, costruendo il rettangolo avente per lati il numero dato e l'unità e determinando in base alla proposizione 14.ª del II libro degli *Elementi* il lato del quadrato ad esso equivalente.

E quì, riferendosi frequentemente ad Euclide, ed adottando talvolta dimostrazioni e spesso forme di Mohammed ben Musa, (1) risolve aritmeticamente e geometricamente le altre quattro, delle trinomie e quadrinomie le sei prime ed osserva che la risoluzione geometrica delle sei altre esige l'impiego delle sezioni coniche come la terza delle binarie e che lo stesso ha luogo per le sette quadrinomie.

Prima tuttavia di occuparsi a mostrare il metodo geometrico del quale si serve per risolvere queste quattordici equazioni, egli porge la soluzione dei tre seguenti problemi:

1.° Inserire due medie proporzionali fra due linee date.

2.° Costruire sopra un rettangolo dato un parallelepipedo rettangolo equivalente ad un solido dato.

3.° Costruire un solido avente per base un quadrato e l'altezza uguale ad una retta data che sia contemporaneamente equivalente ad un solido dato.

Ecco testualmente la costruzione del primo fra questi tre problemi offerta dal geometra arabo e che è la stessa della seconda fra le due attribuite a Menecmo (2).

Sieno (*fig.* 24) AB, BC le due rette date e collochiamole in modo che esse comprendano l'angolo retto B.

---

(1) Così, per modo d'esempio OMAR ALKHAYYAMÎ si serve della stessa equazione $x^2 + 10\,x = 39$, che già vedemmo usata da MOHAMMED BEN MUSA, tuttavia ALKHAYYAMÎ deduce la sua dimostrazione geometrica con molto maggiore eleganza dalla proposizione di EUCLIDE (*Elementi*, II, 5, 6. — VI, 28, 29. — *Dati*, 58, 59). Questo metodo è sfuggito a MOHAMMED BEN MUSA, benchè, vivendo egli alla corte di AL-MAMUN, dovesse conoscere gli *Elementi* tradotti in arabo fin dal tempo di AARUN-AL-RASCHID.

(2) *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis.* Ex recensione JOSEPHI TORELLI. Oxonii, M DCC XCII, pag. 142.

Digitized by Google

Costruiamo una parabola il cui vertice sia situato nel punto *B*, e che abbia per asse *BC* e per parametro *BC*.

Sia la conica *BDE*. Essa sarà nota di posizione, poichè lo sono il suo asse ed il suo vertice ed è noto in grandezza il parametro. Essa toccherà la retta *BA*, poichè l'angolo *B* è retto e per conseguenza uguale all'angolo d'ordinazione, come ciò è dimostrato nella trentesima terza proposizione del primo libro delle coniche (1). Similmente noi costruiamo un'altra parabola avente per vertice il punto *B*, per asse *AB* e per parametro *AB*. Sarà la conica *BDZ*, come ciò è dimostrato da Apollonio nella 56.ª proposizione del I libro.

La conica *BDZ* toccherà la retta *BC*. Le due parabole adunque necessariamente si taglieranno. Sia *D* il loro punto d'intersezione. Così il punto *D* sarà noto di posizione, poichè lo sono le due coniche. Abbassiamo dal punto *D* due perpendicolari *DH*, *DT* sopra *AB*, *BC*. Esse saranno note in grandezza, come ciò è dimostrato nei *Dati* ed io dico che allora le quattro rette *AB*, *BH*, *BT*, *BC* sono in proporzione continua.

Dimostrazione. Il quadrato di *HD* è uguale al prodotto di *BH* in *BC*, perchè la retta *DH* è ordinata della parabola *BDE*, conseguentemente *BC* sta ad *HD* che è uguale a *BT* come *BT* ad *HB*. La retta *DT* è ordinata della parabola *BDZ*. Il quadrato della *DT*, la quale è uguale a *BH*, sarà adunque uguale al prodotto di *BA* in *BT*. Per conseguenza *BT* sarà a *BH* come *BH* a *BA*. Le quattro rette sono adunque in proporzione continua e la retta *DH* è nota in grandezza, atteso che essa è condotta da un punto noto in posizione ad una retta nota in posizione, sotto un angolo di grandezza nota. Ne segue che le due rette *BH*, *BT* sono note in grandezza e che esse sono in pari tempo medie proporzionali fra le due rette *AB*, *BC*, vale a dire che *AB* sta a *BH* come *BH* sta a *BT* e come *BT* a *BC*, come trattavasi di dimostrare.

---

(1) Veramente la proposizione a cui allude il geometra arabo è la trentesima seconda. Cfr. l'edizione di Oxford, pag. 57.

Digitized by Google

Per la costruzione e la dimostrazione degli altri due problemi proposti, il geometra arabo si basa sulla proposizione 34.ª dell'undecimo libro degli *Elementi*.

Egli riprende in seguito la terza delle binarie, alla quale applica la soluzione delle due medie proporzionali mediante due parabole e passa alle tredici altre equazioni, che, come la precedente, sono del terzo grado e per le quali egli non si propone che di dare una soluzione geometrica.

Noi esporremo quì gli schemi di queste risoluzioni riportate dal Woepcke.

XIII. $x^3 + bx = a$

Fig. 25. $(AB)^2 = b \quad , \quad (AB)^2 BC = a$

B vertice; BZ asse; AB parametro della parabola HBD.

BC diametro del cerchio CBD.

Parabola $(DZ)^2 = AB.BZ, DZ = BE, BZ = DE \ldots AB : BE = BE : DE$

Cerchio $BE : DE = DE : EC$

$(AB)^2 : (BE)^2 = BE : EC, (BE)^3 = (AB)^2 EC$

$(BE)^3 + (AB)^2 EB = (AB)^2 . EC + (AB)^2 EB = (AB)^2 CB$

$(BE)^3 + b.BE = a$

$x = BE$

XIV. $x^3 + a = bx$

Fig. 26. $(AB)^2 = b \quad , \quad (AB)^2 BC = a$

B vertice, BH asse, AB parametro della parabola DBE.

C vertice, CT asse, BC parametro dell'iperbole equilatera ECZ.

Iperbole $(ET)^2 = BT . CT$ $\qquad BT : ET = ET : TC$

Parabola $(EH)^2 = BH.AB, EH = BT, BH = ET \ldots AB : BT = BT : ET$

$(AB)^2 : (BT)^2 = BT : TC, (BT)^3 = (AB)^2 TC$

$(BT)^3 + (AB)^2 BC = (AB)^2 TC + (AB)^2 BC = (AB)^2 . BT$

$(BT)^3 + a = b.BT$

$x = BT.$

Digitized by Google

L'algebrista arabo avverte che questa forma comprende diversi casi e che alcuni fra i problemi che da essa dipendono sono impossibili. L'equazione proposta infatti ha sempre una radice reale e negativa, della quale l'autore non tien conto; le due altre radici sono, o immaginarie (ed in questo caso il problema è » impossibile »), o positive ed uguali $\left(x = \sqrt{\frac{b}{3}}\right)$, o positive e disuguali, ciocchè costituisce la varietà dei casi menzionata testè.

XV. $$bx + a = x^3$$

Fig. 27. $$(AB)^2 = b \quad , \quad (AB)^2 BC = a$$

B vertice, BT asse, AB parametro della parabola DBE.

B vertice, BH asse, BC parametro dell'iperbole equilatera ZBE.

Iperbole $(EH)^2 = CH \,.\, BH$, $EH = BT$... $\qquad BH : BT = BT : CH$

Parabola $(ET)^2 = AB \,.\, BT$, $ET = BH$... $\qquad AB : BH = BH : BT$

$$(AB)^2 : (BH)^2 = BH : CH$$

$$(BH)^3 = (AB)^2 CH = (AB)^2 BH + (AB)^2 BC$$

$$(BH)^3 = b.\ BH + a$$

$$x = BH$$

L'autore esprime che questa forma non ammette una varietà di casi e che i problemi che ne dipendono nulla contengono di impossibile. Ora una delle radici della proposta equazione è sempre reale e positiva, le due altre sono sempre o negative o immaginarie: di questi casi però egli non tiene conto alcuno.

Digitized by Google

XVI. $x^3 + cx^2 = a$

Fig. 28. $AB = c \quad , \quad H^3 = a \quad , \quad H = BC = BT$

BC, BT assintoti dell'iperbole equilatera EDN, che passa per il punto D.

A vertice, AT asse, BC parametro della parabola AEK.

Parabola $BC : EZ = EZ : AZ$

Iperbole $BZ : BC = BC : EZ$

$$(BZ)^2 : (BC)^2 = BC : AZ$$

$$(BC)^3 = (BZ)^2 \cdot AZ = (BZ)^3 + (BZ)^2 AB$$

$$a = (BZ)^3 + c\,(BZ)^2$$

$$x = BZ.$$

Questa forma, secondo l'autore, non comprende nè varietà nè casi di problemi, com'egli si esprime, impossibili. Ora, questa equazione ha sempre una radice reale e positiva, mentre le sue due altre radici sono negative od immaginarie.

XVII. $x^3 + a = cx^2$

Fig. 29. $AC = c \quad , \quad H^3 = a$

a, c, x si considerano come quantità positive.

$H \gtreqless AC.$ I. $H = AC$ $\qquad x \gtreqless H$

1) $x = H \ldots \quad AC \cdot x^2 = H^3 \quad , \quad cx^2 = a \quad ; \quad cx^2 < a + x^3$

2) $x < H \ldots \quad AC \cdot x^2 < H^3 \quad , \quad cx^2 < a \quad ; \quad cx^2 < a + x^3$

3) $x > H \ldots \quad x^3 > AC \cdot x^2 \quad , \quad x^3 > cx^2 \quad ; \quad x^3 + a > cx^2$

II. $H > AC \ldots$ impossibile.

III. $H < AC \ , \ BC = H \ldots \quad BC \gtreqless AB \ , \ \sqrt[3]{a} \gtreqless \frac{c}{2} \ ;$

$$BCDE = H^2 = a^{\frac{2}{3}}.$$

Digitized by Google

CA, *CE* assintoti dell'iperbole equilatera *DZ* (*fig.* 29_1), *DT* (*fig.* $29_{2,3}$), che passa per il punto *D*.

A vertice, *AC* asse, *BC* parametro della parabola *AT* (*fig.* 29_1) *AL* (*fig.* 29_2), *AK* (*fig.* 29_3).

1) $BC = AB$ (*fig.* 29_1) . . . $(BD)^2 = AB.\,BC$, dunque *D* è un punto sulla parabola; l'altro punto di cui parla l'autore avrà per ascissa (prendendo *C* per origine) $x = \frac{1}{4}\,c\left\{\sqrt{5}+1\right\}$ e per ordinata $y = \frac{1}{4}\,c\left\{\sqrt{5}-1\right\}$.

2) $BC > AB$ (*fig.* 29_2) . . . $(BD)^2 > AB.\,BC$ d'onde segue che la parabola passa al di quà del punto *D*. L'autore arabo aggiunge che allorquando $\sqrt{a} > \frac{1}{2}\,c$, x deve essere compreso fra c e $\sqrt[3]{a}$; dall'equazione proposta $x^3 + a = cx^2$ segue immediatamente $cx^2 > x^3$ ovvero $x < c$; rimane dunque a provare che $x > \sqrt[3]{a}$. Si osservi dapprima che il caso di incontro delle due coniche non può avvenire se non in quanto $\sqrt[3]{a} < \frac{2}{3}\,c$, perchè da $\sqrt[3]{a} \overset{=}{>} \frac{2}{3}\,c$ segue $27\,a \overset{=}{>} 8c^3 > 4c^3$, ciocchè renderebbe immaginaria l'intersezione. Ora si ha $\frac{d\,(cx^2 - x^3)}{dx} = 3x\left\{\frac{2}{3}\,c - x\right\}$, d'onde segue che per tutti i valori di x compresi fra 0 e $\frac{2}{3}\,c$, $cx^2 - x^3$ decrescerà con x. Per $x = \sqrt[3]{a}$,

Digitized by Google

essendo nel tempo istesso $c < 2\sqrt[3]{a}$, si trova $cx^2 - x^3 < a$, dunque per tutti i valori di x inferiori a $\sqrt[3]{a}$, $cx^2 - x^3 < a$. Il caso del contatto dà due radici uguali e positive $x = \frac{2}{3}c$.

3) $BC < AB$ (*fig.* 29_3) . . . $(BD)^2 < AB.\ BC$; la parabola passa al di là del punto D ed incontra necessariamente l'iperbole in due punti: la qual cosa consegue pure da ciò che da $\sqrt[3]{a} < \frac{1}{2}c$ si ricava $4c^3 > 32\,a > 27\,a$.

Iperbole $ZC : BC = BC : TZ$

Parabola $BC : TZ = TZ : ZA$

$$(ZC)^2 : (BC)^2 = BC : ZA,\ (BC)^3 = (ZC)^3\ ZA.$$

$$(ZC)^3 + (BC)^3 = (ZC)^3 + (ZC)^2\ ZA = (ZC)^2\ AC.$$

$$(ZC)^3 + a = c\,(ZC)^2$$

$$x = ZC.$$

Avverte infine l'algebrista arabo che questa forma comprende una varietà di casi e che essa contiene dei problemi impossibili. Realmente però la proposta equazione ha sempre una radice reale e negativa di cui l'autore non tenne conto. Le due altre radici sono positive o immaginarie (1).

---

(1) Non isfuggirà all'attento lettore la stretta correlazione fra la costruzione delle equazioni XVI e XVII e quella delle equazioni:

$$(AB \pm x)\ x^2 = c^3$$

di ALMAHANI, delle quali ci siamo già occupati.

Digitized by Google

XVIII. $$cx^2 + a = x^3$$

Fig. 30. $$AB = c \quad , \quad AB\,(BC)^2 = a$$

AB, AD assintoti dell'iperbole equilatera CEZ che passa per il punto C.

B vertice, BK asse, AB parametro della parabola BEH.

Iperbole $BC : AK = EK : AB$, $(BC)^2 : (AK)^2 = (EK)^2 : (AB)^2$

Parabola $AB : EK = EK : BK$, $(EK)^2 : (AB)^2 = BK : AB$

$$(BC)^2 : (AK)^2 = BK : AB \quad , \quad (AK)^2\,BK = AB\,(BC)^2$$

$$(AK)^2\,AB + (AK)^2\,BK = (AK)^2\,AB + AB\,(BC)^2$$

$$(AK)^3 = c\,(AK)^2 + a$$

$$x = AK.$$

Questa forma, secondo l'autore arabo, non contiene nè varietà di casi, nè problemi impossibili. Effettivamente poi essa ammette sempre una radice reale e positiva: le due altre radici sono sempre immaginarie.

XIX. $$x^3 + cx^2 + bx = a$$

Fig. 31. $$(EB)^2 = b \quad , \quad (EB)^2\,BC = a \quad , \quad BD = c$$

DC diametro del cerchio DZC.

EA, EK assintoti dell'iperbole equilatera CZ che passa per il punto C.

Iperbole $ZE = BK$, dunque $ZE - EL = BK - EL$, o $ZB = LK$

$ZL : LC = TL : BL = EB : BL$, $(ZL)^2 : (LC)^2 = (EB)^2 : (BL)^2$

Cerchio $(ZL)^2 : (LC)^2 = DL : LC$

$$(EB)^2 : (BL)^2 = DL : LC$$

$$(EB)^2\,LC = (BL)^2\,DL = (BL)^3 + (BL)^2\,BD$$

$$(BL)^3 + BD\,(BL)^2 + (EB)^2\,BL = (EB)^2\,LC + (EB)^2\,BL = (EB)^2\,BC$$

$$(BL)^3 + c\,(BL)^2 + b.\,BL = a$$

$$x = BL.$$

Digitized by Google

Secondo le dichiarazioni dell'algebrista arabo questa forma non conterrebbe nè varietà di casi, nè, per usare della sua frase consueta, problemi impossibili. Sta però il fatto ch'essa ammette sempre una radice reale e positiva, mentre le sue due altre radici (trascurate dall'autore) sono o negative o immaginarie.

XX. $x^3 + cx^2 + a = bx$

Fig. 32. $(AB)^2 = b \quad , \quad BC = c \quad , \quad (AB)^2\, BD = a$

AB, AE assintoti dell'iperbole equilatera ZDH che passa per il punto D.

D vertice, DL asse, DC parametro dell'iperbole equilatera TDH.

Iperbole $ZDH\ldots$ $AH = AD$ dunque $AH - EM + DH = AD - EM + DH$, o $EL = LM$

" $(KL)^2$ o $(AB)^2 : (BL)^2 = (HL)^2 : (LD)^2$

Iperbole $TDH\ldots$ $(HL)^2 = LD.\ CL$, $\overline{(HL)^2 : (LD)^2 = CL : LD}$

$$(AB)^2 : (BL)^2 = CL : LD$$

$$(BL)^2\ LC = (AB)^2\ LD$$

$$(BL)^3 + (BL)^2\ BC + (AB)^2\ BD = (AB)^2\ LD + (AB)^2\ BD = (AB)^2\ BL$$

$$(BL)^3 + c\,(BL)^2 + a = b.\ BL$$

$$x = BL.$$

Dichiara l'autore essere evidente che questa forma ammette diversi casi: ora essa ammette sempre una radice reale e negativa trascurata dall'algebrista arabo. Le sue due altre radici sono o immaginarie (quando il problema è " impossibile "), ovvero positive ed uguali ($x = -\frac{1}{3}\,c + \frac{1}{3}\sqrt{3b + c^2}\ldots$. contatto delle due iperbole), o positive e disuguali (intersezione delle iperbole in due punti, oltre D) ciocchè costituisce la varietà di casi menzionata superiormente.

Digitized by Google

XXI. $x^3 + bx + a = cx^2$

Fig. 33. $BE = c \quad , \quad (BC)^2 = b \quad , \quad (BC)^2 AB = a$

Rettangolo HC uguale al rettangolo CA.

AE diametro del cerchio $AZLNE$.

CZ, CM assintoti dell'iperbole equilatera LHN che passa per il punto H.

Iperbole $LC = CH = CA$, dunque $LC + CK = CA + CK$ o $TH = DK$

" $(LK)^2 : (KA)^2 = (AD)^2 : (KB)^2 = (BC)^2 : (KB)^2$

Cerchio $(LK)^2 : (KA)^2 = EK : KA$

$$(BC)^2 : (KB)^2 = EK : KA$$

$$(BC)^2 KA = (KB)^2 EK$$

$$(KB)^3 + (BC)^2 KB + (BC)^2 AB = (KB)^3 + (KB)^2 EK = (KB)^2 BE$$

$$(KB)^3 + b.\ KB + a = c\,(KB)^2$$

$$x = KB.$$

XXII. $cx^2 + bx + a = x^3$

Fig. 34. $(BE)^2 = b \quad , \quad (BE)^2 AB = a \quad , \quad BC = c$

Rettangolo HE = rettangolo EA.

EM, ES, assintoti dell'iperbole equilatera HTK che passa per il punto H.

C vertice, CN asse, AC parametro dell'iperbole equilatera LCT.

Iperbole $HTK\ldots$ $TE = HE = EA$, $TE + EN = EA + EN$ o $TB = AS$

$$(AN)^2 : (TN)^2 = (NB)^2 : (SN)^2 = (NB)^2 : (BE)^2$$

Iperbole $LCT\ldots$ $(TN)^2 = NC.\ AN$ o $(AN)^2 : (TN)^2 = AN : NC$

$$(NB)^2 : (BE)^2 = AN : NC$$

$$(BE)^2 : AN = (NB)^2 : NC$$

$$(BE)^2.\ AB + (BE)^2 NB + (NB)^2 BC = (NB)^2 NC + (NB)^2 BC = (NB)^3$$

$$a + b.\ NB + c\,(NB)^2 = (NB)^3$$

$$x = NB.$$

Digitized by Google

Asserisce l'algebrista arabo che questa forma non presenta nè varietà di casi, nè problemi impossibili; mentre essa ammette sempre una radice reale positiva, le due altre radici sono immaginarie o negative.

XXIII. $x^3 + cx^2 = bx + a$

Fig. 35. $(BD)^2 = b \quad , \quad BC = c \quad , \quad (BD)^2 . S = a$

$S \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} BC$. I. $S < BC$ (fig. 35,$_1$)

$AB = S$. Rettangolo $ED =$ rettangolo AD.

DZ, DO assintoti dell'iperbole equilatera EH che passa per il punto E.

A vertice, AB asse, AC parametro dell'iperbole equilatera AHT.

Iperbole EH.

$$HD = ED = AD \text{ , } HD + DK = AD + DK \text{, o } HB = AM$$

$$(HK)^2 : (KA)^2 = (MK)^2 : (KB)^2 = (BD)^2 : (KB)^2$$

Iperbole AHT

$$(HK)^2 : (KA)^2 = CK : AK$$

$$(BD)^2 : (KB)^2 = CK : AK$$

$$(KB)^2 \, CK = (BD)^2 \, AK$$

$$(KB)^3 + (KB)^2 \, BC = (BD)^2 \, KB + (BD)^2 \, AB$$

$$(KB)^3 + c\,(KB)^2 = b . KB + a$$

$$x = KB.$$

II. $S = BC$

$x = BD$.

Infatti $(BD)^2 \, BD = (BD)^3$ ovvero $b . BD = (BD)^3$

$(BD)^2 \, BC = (BD)^2 S$ „ $c\,(BD)^2 = a$

$$(BD)^3 + c\,(BD)^2 = b . BD + a$$

Digitized by Google

Ma nel tempo istesso essendo:

$$(BD)^3 + a = c\,(BD)^2 + b\,(BD)$$

si rientra nella categoria dell' equazione XXV.

III. $S > BC$ (*fig.* 35_2)

La dimostrazione data antecedentemente si applica anche alla seconda figura, avendo anche rapporto a questa:

$$(HK)^2 : (KA)^2 = CK : AK$$

Ed infatti nulla è mutato nelle due coniche che costruiscono l' equazione: soltanto l' intersezione qui considerata avviene sull' altro ramo della seconda iperbole. Si può passare dal primo caso al secondo, facendo muovere A sopra BC fino al di là di C; quando A e C coincidono ($S = BC$) la seconda iperbole si identifica coi suoi assintoti e la prima iperbole si trova combinata con una retta passante per A e che forma con AB un angolo di 45.°

Secondo l' algebrista arabo questa forma presenta casi differenti, ma non dà luogo a problemi impossibili. Si scorge tuttavia ch' essa ha sempre una radice reale e positiva: le sue due altre radici sono o negative o immaginarie. I » casi differenti » presentati da questa forma sono $S \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} BC$, vale a dire $\frac{a}{b} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} c$.

XXIV. $x^3 + bx = cx^2 + a$

Fig. 36. $BC = c \quad , \quad (BD)^2 = b \quad , \quad (BD)^2\, S = a$

$S \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} BC$. I. $S < BC$ (*fig.* 36_1)

$AB = S$

Digitized by Google

AC, diametro del cerchio AKC.

DB, DZ, assintoti dell'iperbole equilatera HAT che passa per il punto A.

Iperbole. $AD = KD$, $AD - MZ + AK = KD - MZ + AK$, o $BK = AL$.

$(KE)^2 : (EA)^2 = (LE)^2 : (BE)^2 = (BD)^2 : (BE)^2$

Cerchio. $(KE)^2 : (EA)^2 = EC : EA$

$(BD)^2 : (BE)^2 = EC : EA$

$(BD)^2 \, EA = (BE)^2 \, EC$

$(BE)^3 + (BD)^2 \, EA = (BE)^3 + (BE)^2 \, EC = (BE)^2 \, BC$

$(BE)^3 + (BD)^2 \, BE = BC \, (BE)^2 + (BD)^2 \, AB$

$(BE)^3 + b. \, BE = c \, (BE)^2 + a$

$x = BE$.

II. $S = BC$

$x = BC$.

Infatti $(BC)^3 = BC \, (BC)^2$ ovvero $(BC)^3 = c \, (BC)^2$

$(BD)^2 \, BC = (BD)^2 \, S$ „ $b. \, BC = a$

$(BC)^3 + b. \, BC = c \, (BC)^2 + a$

Ma nel tempo stesso essendo:

$$(BC)^3 + a = c \, (BC)^2 + b. \, BC$$

si rientra nella categoria dell'equazione XXV.

III. $S > BC$. (*fig.* 36_2)

$AB = S$

Iperbole. $AD = KD$, $AD - ED = KD - ED$, o $EZ = BK$

$(KE)^2 : (EA)^2 = (ZA)^2 : (BE)^2 = (BD)^2 : (BE)^2$

Cerchio. $(KE)^2 : (EA)^2 = EC : EA$

$(BD)^2 : (BE)^2 = EC : EA$

$(BE)^2 \, EC = (BD)^2 \, EA$

Digitized by Google

$$(BE)^3 = (BD)^2\, EA + (BE)^2\, BC$$
$$(BE)^3 + (BD)^2\, EB = (BD)^2\, AB + BC\,(BE)^2$$
$$(BE)^3 + b.\, BE = a + c\,(BE)^2$$
$$x = BE.$$

L'autore arabo annuncia che questa forma presenta casi differenti e non dà luogo a » problemi impossibili ». Ora, risulta che la forma proposta ha sempre una radice reale e positiva. Nei casi II e III quando $\frac{a}{b} \gtreqless c$, le due altre radici sono immaginarie, ma nel primo caso $\frac{a}{b} < c$, esse possono essere positive, di maniera che l'equazione avrà allora tre radici positive.

XXV. $x^3 + a = cx^2 + bx$

Fig. 37.

$S \lessgtr BC$. I. $S < BC$ (*fig.* 37, $_1$)

$AB = S$

BD, DZ assintoti dell'iperbole equilatera HAT che passa per il punto A.

C vertice, CE asse, AC parametro dell'iperbole equilatera KML.

Iperbole HAT.

$$DA = DM\ ,\ DA - ZN + AM = DM - ZN + AM$$
o $NE = ZE$
$$(ME)^2 : (EA)^2 = (OE)^2 : (BE) = (DB)^2 : (BE)^2$$

Iperbole KML.

$$(ME)^2 : (EA)^2 = CE : EA$$

$$(BD)^2 : (BE)^2 = CE : EA$$

Digitized by Google

$$(BE)^2\ CE = (BD)^2\ EA$$

$$(BE)^2\ BC + (BE)^2\ CE, \text{ o } (BE)^3 = (BE)^2\ BC + (BD)^2\ EA$$

$$(BE)^3 + (BD)^2\ AB = (BE)^2\ BC + (BD)^2\ BE$$

$$(BE)^3 + a = c\,(BE)^2 + b.\ BE$$

$$x = BE.$$

II. $S = BC.$

$x = BC.$

Infatti $(BC)^3 = BC(BC)^2$ ovvero $(BC)^3 = c(BC)^2$

$(BD)^2\ S = (BD)^2\ BC$ » $\underline{a = b.\ BC}$

$(BC)^3 + a = c\,(BC)^2 + b.\ BC$

Ma in pari tempo essendo:

$$(BC)^3 + b.\ BC = c\ (BC)^2 + a$$

si rientra nella categoria dell'equazione XXIV.

Sfugge però all'autore arabo che in questo caso anche $x = BD$ è una soluzione e che si ha:

$(BD)^3 = (BD)^2\ BD$ ovvero $(BD)^3 = b.\ BD$

$(BD)^2\ S = (BD)^2\ BC$ » $\underline{a = c\,(BD)^2}$

$(BD)^3 + a = c(BD)^2 + b.\ BD$

In pari tempo si avrà:

$$(BD)^3 + c\,(BD)^2 = b.\ BD + a$$

e si rientra nella categoria dell'equazione XXIII.

III. $S > BC$ (*fig.* 27_2).

$AB = S.$

Iperbole *HAT ut supra.*

A vertice, *AE* asse, *AC* parametro dell'iperbole equilatera ***KML***.

La dimostrazione segue come nel caso I.

Avverte l'algebrista arabo che questa forma offre diversi casi e fra questi alcuni impossibili. Ora risulta che nei casi $S \leqq BC$

Digitized by Google

vale a dire $\frac{a}{b} \leqq c$, l'equazione proposta ha sempre due radici positive. Nel caso $\frac{a}{b} < c$, l'autore non trova colla sua costruzione che una sola di queste due radici, mentre l'altra gli sfugge. A quest'ultima corrisponde il punto d'intersezione P (*fig.* 37_1) dell'iperbole HAT coll'altro ramo dell'iperbole KCL. La perpendicolare abbassata da P su γA incontrerà questa retta fra γ e A, vale a dire questa perpendicolare incontrerà la parte positiva dell'asse delle ascisse.

Quando $\frac{a}{b} = c$, l'altra radice positiva è $x = +\sqrt{b}$ ovvero $x = \gamma D$.

Nel caso di $\frac{a}{b} > c$, osserva giustamente l'autore che, o le due coniche avranno una intersezione in due punti, od un contatto in un punto, od il problema sarà impossibile, vale a dire l'equazione ha, o due radici positive e disuguali, o positive ed uguali $\left(x = \frac{1}{3} < + \frac{1}{3}\sqrt{3b + c^2}\right)$, o due radici immaginarie.

Oltre a queste due radici conjugate l'equazione presenta, in tutti e tre i casi, una radice reale e negativa, la cui esistenza è ignorata dall'algebrista arabo.

Riassumendo brevemente il metodo seguìto da Alkayyâmî nella costruzione delle equazioni cubiche, osserveremo come egli cominci sempre dal rendere omogenea l'equazione proposta: in seguito egli determina, mediante i coefficienti trasformati dell'equazione, due coniche ed approfittando delle loro intersezioni, arriva alla uguaglianza di due solidi. Finalmente, sia decomponendoli, sia aggiungendo o togliendo da una parte e dall'altra dei solidi comuni, egli ottiene l'equazione proposta.

Poniamo ora sotto forma generale il metodo seguìto da Alkhayyâmî per determinare le due coniche col mezzo delle costanti dell'equazione proposta. Formando le equazioni analitiche delle

Digitized by Google

coniche da lui impiegate, confrontando fra loro queste equazioni e denotando con $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, ϕ, delle quantità che non possono assumere se non i valori $+1$ e -1 (la qual cosa permetterà di porre $\varkappa.\ \lambda = \frac{\varkappa}{\lambda}$, $\varkappa^2 = 1$, ecc.) si trova che il procedimento del geometra arabo si riduce ai tre sistemi seguenti:

$$\text{I.}\quad y^2 + \varkappa x^2 + \lambda \frac{a}{b} x = o \begin{cases} \varkappa = o & \ldots \text{ parabola} \\ \varkappa = +1 & \ldots \text{ cerchio} \\ \varkappa = -1 & \ldots \text{ iperbole} \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - \sqrt{b}.\ y = o \ \ldots \text{ parabola}}{x^4 + \varkappa b x^2 + \lambda a x = o \text{ ovvero } x^3 + \varkappa b x + \lambda a = o}$$

$$\text{II.}\quad \frac{yx - \sqrt{a.\ m} = o \ \ldots \text{ iperbole}}{y^2 + \varkappa m x + \lambda m c = o \ \ldots \text{ parabola}}$$

$$\varkappa x^3 + \lambda c x^2 + a = o \text{ ovvero } x^3 + \varkappa \lambda c x^2 + \varkappa a = o$$

$$\text{III.}\quad y^2 + \varkappa x^2 + \lambda \left\{ \frac{a}{b} + \mu c \right\} x + \nu \frac{ac}{b} = o \begin{cases} \varkappa = +1 \ldots \text{cerchio} \\ \varkappa = -1 \ldots \text{iperbole} \end{cases}$$

$$\frac{yx + \xi \sqrt{b}.\ x + \phi \frac{a}{\sqrt{b}} = o \ \ldots \text{ iperbole}}{\varkappa x^4 + \lambda \left\{ \frac{a}{b} + \mu c \right\} x^3 + \left\{ b + \nu \frac{ac}{b} \right\} x^2 + 2\xi\phi a x + \frac{a^2}{b} = o}$$

ovvero:

$$x^4 + \varkappa\lambda \left\{ \frac{a}{b} + \mu c \right\} x^3 + \varkappa \left\{ b + \nu \frac{ac}{b} \right\} x^2 + 2\varkappa\xi\phi a x + \varkappa \frac{a^2}{b} = o$$

Digitized by Google

Il sistema I serve alla costruzione delle equazioni III, XIII, XIV, XV, ponendo:

III.	$x = o$	$\lambda = -1$	$b = 1$
XIII.	$x = +1$	$\lambda = -1$	
XIV.	$x = -1$	$\lambda = +1$	
XV.	$x = -1$	$\lambda = -1$	

Il sistema II è impiegato per le equazioni XVI, XVII, XVIII, facendo:

XVI.	$m = \sqrt[3]{a}$	$x = -1$	$\lambda = -1$
XVII.	$m = \sqrt[3]{a}$	$x = +1$	$\lambda = -1$
XVIII.	$m = c$	$x = -1$	$\lambda = +1$

Finalmente il sistema III corrisponde alle equazioni XIX, XX, XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV, attribuendo alle quantità x, λ, μ, ν, ξ, ϕ i valori che risultano dal quadro seguente:

	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV
x	+1	−1	+1	−1	−1	+1	−1
λ	−1	+1	+1	−1	−1	−1	+1
μ	−1	−1	−1	−1	+1	+1	+1
ν	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
ξ	+1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
ϕ	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1

Dividendo l'equazione del quarto grado che risulta dal sistema III per $\left(x \pm \frac{a}{b}\right)$ la si riconduce alla equazione cubica proposta:

$$x^3 + \rho c x^2 + \sigma b x + \tau a = o$$

Digitized by Google

poichè:

$$\left\{ x^3 + \rho c x^2 + \sigma b x + \tau a \right\} \cdot \left\{ x + \frac{\tau}{\sigma} \cdot \frac{a}{b} \right\} =$$

$$= x^4 + \left\{ \rho c + \frac{\tau}{\sigma} \cdot \frac{a}{b} \right\} x^3 + \left\{ \sigma b + \frac{\rho\tau}{\sigma} \cdot \frac{ac}{b} \right\} x^2 + 2\tau a x + \frac{\tau^2}{\sigma} \cdot \frac{a^2}{b} =$$

$$= x^4 + \left\{ \sigma\tau \frac{a}{b} + \rho c \right\} x^3 + \sigma \left\{ b + \rho\tau \frac{ac}{b} \right\} x^2 + 2\tau a x + \sigma \frac{a^2}{b}$$

dove i valori da assegnarsi alle quantità ρ, σ, τ sono i seguenti:

	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV
ρ	+ 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1	− 1
σ	+ 1	− 1	+ 1	− 1	− 1	+ 1	− 1
τ	− 1	+ 1	+ 1	− 1	− 1	− 1	+ 1

Alkayyâmî poi non ha osservato che nell'equazione generale del terzo grado si può sempre far sparire il secondo termine, circostanza questa della quale se avesse approfittato, avrebbe potuto fare a meno dei sistemi II e III.

È poi da notarsi ancora che Alkhayyâmî, analogamente a Mohammed ben Musa, non tien conto alcuno delle radici negative, nè, a più forte ragione, delle radici immaginarie, infatti dal momento che un problema non ammette radici reali e positive, egli lo dichiara « impossibile ». Ed è sorprendente che costruendo le equazioni del terzo grado, egli non abbia rimarcato l'esistenza delle radici negative, poichè nulla, quanto la costruzione delle equazioni, riesce a metterle in piena evidenza ed a somministrare idee giuste ed esatte sulla loro natura. L'essere sfuggita questa scoperta al valentissimo algebrista è senza dubbio da attribuirsi alla condannevole abitudine di segnare soltanto semi-cerchii, semi parabole ed un solo ramo delle iperbole. Questa medesima circostanza impedì al nostro autore di riconoscere

Digitized by Google

che una equazione (XXV) ha due radici positive, limitandosi egli a costruirne una sola ed in altra occasione (XXIV) non trova che una sola radice positiva, mentre l'equazione proposta ne ammetteva tre.

Poichè era già nota agli Arabi l'esistenza d'una certa equazione del secondo grado a due radici, se Alkhayyamî avesse osservato che una equazione cubica ammetteva in certi casi tre soluzioni, questa coincidenza fra il grado del problema ed il numero delle soluzioni lo avrebbe assai probabilmente messo sulla via d'ulteriori scoperte.

Egli non trova adunque che una unica soluzione per le equazioni III, XIII, XV, XVI, XVIII, XIX, XXII, XXIII, XXIV, il cui termine noto è affetto del segno negativo: egli ne trova due per le equazioni XIV, XVII, XX, XXI, XXV, il cui termine noto è affetto del segno positivo, ma le cui due radici conjugate sono o immaginarie o positive. Per queste ultime equazioni, quando esse non ammettono radici positive, egli le dichiara » impossibili » e stabilisce perfettamente il criterio geometrico della realtà delle due radici conjugate, vale a dire, l'incontro in due punti, o il contatto delle due coniche che costruiscono l'equazione. Nel caso del contatto egli non ammette naturalmente che una sola radice e non distingue due radici uguali.

Nell'ultima parte del suo lavoro Alkhayyâmî propone l'equazione binomia del sesto grado.

In generale questa parte dell'algebra è di grande interesse sotto il punto di vista storico, poichè dimostra quello spirito di sistema di cui tutta l'opera di Alkhayyâmî porta l'impronta. Si allude quì in particolare alla discussione delle equazioni a termini frazionarii, i cui denominatori sono potenze dell'incognita. L'autore riconduce queste equazioni alle sue venticinque equazioni primitive: le une, sostituendo all'incognita una nuova incognita che è il valore reciproco della prima; le altre, moltiplicando l'equazione proposta per una potenza dell'incognita.

Digitized by Google

Quanto alle equazioni del quarto grado, Alkhayyamî dichiara l'impossibilità di costruirle coi metodi da lui sviluppati.

Nella stessa algebra della quale stiamo occupandoci, Alkhayyamî menziona un celebre geometra arabo Alhassan Ben Alhassan Ben Alhaitham, che avrebbe costruita l'equazione binomia del quinto grado. Si può argomentare ch'egli si sia servito a tale scopo, o di una delle curve superiori di cui gli Arabi ebbero conoscenza dalle opere dei Greci, o di uno di quei procedimenti meccanici, di cui le opere medesime offrono, come vedemmo, esempi numerosi. Alkhayyâmî dice soltanto » la soluzione di questo problema non può essere effettuata coi metodi che noi abbiamo esposti, perchè essa dipende dalla determinazione di quattro linee (medie proporzionali) fra due linee date, in modo che le sei linee sieno in proporzione continua. » Infatti determinando quattro rette x, y, v, w, in modo che:

$$1 : x = x : y = y : v = v : w = w : a$$

si avrà:

$$x^5 = a \text{ oppure } x^2 = a.\frac{1}{x^3}$$

Aggiunge poi lo stesso algebrista arabo: » Questa costruzione è assai difficile, di maniera che noi non possiamo aggiungerla al presente trattato. » Il Woepcke riporta poi un elenco delle opere del geometra citato da Alkhayyâmî e con tutta probabilità il metodo per la costruzione della equazione binomia del quinto grado si trova in quella così intitolata: » Memoria sulla determinazione di quattro linee (medie proporzionali) fra due linee date ».

E giacchè stiamo occupandoci di Alhassan Ben Alhassan Ben Alhaitham, più noto sotto il nome abbreviato di Alhazen, aggiungeremo come nel quinto libro della sua ottica si trovi risolto il problema di determinare sopra uno specchio sferico il punto di

Digitized by Google

riflessione, dati il luogo dell'occhio e quello dell'oggetto (1). Per verità asserì il Montucla ripetutamente (2) che assai verosimilmente Alhazen trasse dall'ottica di Tolomeo la soluzione di questo problema, che conduce ad una equazione del terzo grado; ma il Delambre stesso, che in generale si appalesa assai favorevole ai greci, affermò che tale congettura è affatto destituita di fondamento, giacchè Tolomeo non diede nell'opera testè citata alcuna soluzione di questo genere e che la soluzione del problema consistente nel determinare sopra uno specchio sferico il punto di riflessione, quando si conosce il luogo dell'occhio e quello dell'immagine, deve essere resa ad Alhazen (3). Anche il Venturi, dopo aver esaminato manoscritti dell'Ottica di Tolomeo, asserì esplicitamente che il problema in questione, nonchè risolto, non era neppure stato trattato dal geometra Alessandrino (4).

Ma ancora in una rassegna dei procedimenti geometrici usati dagli Arabi nella risoluzione delle equazioni noi non possiamo passare sotto silenzio quello che è noto sotto il nome di *regola dei piatti* (d'una bilancia), e del quale abbiamo materiali molteplici negli scritti degli arabi che pervennero fino a noi. Per procedere secondo l'ordine cronologico, questa regola, di assai probabile origine indiana, trovasi in uno scritto di un maestro Abramo,

---

(1) *Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi, ejusdem liber de crepusculis et nubium ascensionibus. Item Vitellionis thuringopoloni libri X.* Omnes instaurati, figuris illustrati et aucti, adiectis etiam in Alhazeni commentarijs a FEDERICO RISNERO. Basileae, per episcopios. M D LXXII, pag. 142-151. — *Commentarii sopra la storia e le teorie dell'ottica* del cavaliere GIAMBATTISTA VENTURI. Tomo Primo. Bologna, 1814, pag. 230-231. — *Elementi di ottica e di astronomia* del canonico GIUSEPPE SETTELE. Vol. I. Roma, MDCCCXVIII, pag. 71.

(2) *Histoire des Mathématiques.* Nouvelle édition par J. F. MONTUCLA. Tome Premier. Paris, An. VII, pag. 314, 359-360, 414.

(3) *Connaissance des tems* ecc. pour l'année 1816, publiée par le bureau des longitudes. Paris, 1813, pag. 248. — *Histoire de l'Astronomie ancienne* par M. DELAMBRE. Tome Second. Paris, 1817, pag. 422.

(4) *Commentarij sopra la storia e le teorie dell'ottica* del cavaliere GIAMBATTISTA VENTURI. Tomo Primo. Bologna, 1814, pag. 230-231.

Digitized by Google

che il Libri opina essere Abraham Aben Ezra, autore di altri trattati scientifici, (1) poi con maggiori particolari, troviamo esposta la medesima regola nel *Talkhys* d'Ibn Albannâ, (2) poi ancora nel trattato d'Aritmetica di Alkalsadi (3) e finalmente nel *Kholasat al Hissab* di Beha-Eddin (4).

Per porgere una idea di questo metodo noi ci limiteremo a riprodurre quanto ne scrive Ibn Albannâ, servendoci a tal uopo della traduzione del Marre:

» *Les plateux de balance.* C'est par l'art géométrique et la méthode est celle-ci:

---

(1) *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle* par GUILLAUME LIBRI. Tome Premier, Deuxième édition. Halle s|S. 1865, pag. 304. — Questo trattato è riprodotto dal LIBRI nel presente volume alla nota XIV, pag. 304-369 col titolo seguente: *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.* Noi ci riferiamo qui in particolare ai due capitoli *de negociatione*, pag. 323-328.

(2) *Le Talkhys* (Traité d'analyse des opérations du Calcul) *d'Ibn Albannâ, traduit pour la premiere fois d'après un Ms. inédit de la Bibliothéque Bodleienne coté « Marsh* 378 », (*n.°* CCXVII *du Catalogue d'Uri*). Par ARISTIDE MARRE. Negli « *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei compilati dal Segretario.* » Anno XVII. Sessione VI del 1.° Maggio e Sessione VII del 5 Giugno 1864. Roma, 30 novembre 1864, pag. 314-317.

(3) *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, decouverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni, et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes.* Par M. F. WOEPCKE. — II. *Traduction du traité d'Arithmétique d'Aboûl Haçan Ali ben Mohammed Alcalçâdî.* Negli « *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei compilati dal Segretario.* » Anno XII, Sessione VII del 5 Giugno 1859. Roma, 27 Novembre 1859.

(4) *The Khoolasut-ool-Hisab a Compendium of Arithmetic and Geometry, in the arabic language, by Buhae-ood-Deen of Amool in Syria, with a translation into persian and commentary*, by the late MUOLOWEE RUOSHUN ULEE OF JUONPOOR *to which is added a Treatise on Algebra by Nudjm-ood-Deen Ulee Khan*, ecc. Calcutta, 1812. — *Essenz der Rechenkunst von Mohammed Behaeddin ben Alhossain aus Amul arabisch und deutsch* herausgegeben von Dr. G. H. F. NESSELMANN. Berlin, 1843, pag. 26. — *Kholâçat al Hissâb, ou quintessence du calcul par Behâ-Eddîn al Aamoulî, traduit et annoté* par ARISTIDE MARRE. Rome, 1864, pag. 24-25.

Digitized by Google

Tu prends des balances de cette forme:

tu places ce qui est connu et proposé sur la voûte, tu déposes sur un des deux plateaux tel nombre que tu voudras, tu effectues là dessus ce qui est proposé par l'addition, l'abaissement, ou autre opération, puis tu compares avec cela ce qui est sur la voûte; si tu est tombé juste, ce plateau là c'est le nombre inconnu: si tu est tombé à faux, marque l'erreur au dessus du plateau si elle est par exces, ou au-dessous si elle est par defaut; ensuite dépose sur l'autre plateau tel nombre que tu voudras, différent du premier, et procède avec lui comme tu as procèdé avec le premier; puis multiplie l'erreur de chaque plateau par le (supposé) vrai de l'autre; puis examine: si les erreurs sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, soustrais la plus pétite de la plus grande, et le plus petit des deux produits du plus grand, et divise le reste des deux produits par le reste des deux erreurs; et si l'une des deux est positive et l'autre négative, divise la somme des deux produits par la somme des deux erreurs.

Si tu veux, dépose sur le second plateau le nombre du premier ou un autre, dégages-en les parties, compare avec elles ce qui est sur la voûte, multiplie cela par le (supposé) vrai du premier, et multiplie l'erreur du premier par le (supposé) vrai du second: puis si l'erreur du premier est par défaut, additionne les deux produits; si elle est par exces prends la différence entre eux deux; tu divises le résultat par les parties du second plateux, et tu obtiens le nombre demandé. »

Ovvero, sia data l'equazione:

$$mx = a$$

e sieno:

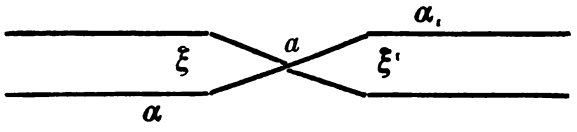
$$m\xi = a + \alpha \qquad m\xi' = a + \alpha'$$

Digitized by Google

si avrà:

$$x = \frac{\xi a' - \xi' a}{a' - a}$$

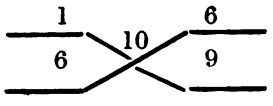
ovvero lo schema:



Che esso si fondi sopra un principio geometrico, è cosa evidente, anzi la interpretazione geometrica di esso ne costituisce la più semplice e chiara dimostrazione. Non crediamo necessario di soffermarci ulteriormente su questo argomento rimandando in una nota (1) alcuni esempi di applicazione che togliamo ugual-

---

(1) Sia proposto di trovare il numero, che, aumentato dei suoi due terzi e dell'unità, dà 10.

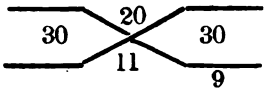


$9 + \frac{2}{3}9 + 1 = 16 = 10 + 6$ Primo errore $= +6$

$6 + \frac{2}{3} - 6 + 1 = 11 = 10 + 1$ Secondo » $= +1$

$$x = \frac{6 \times 6 - 1 \times 9}{6 - 1} = 5\,\frac{2}{5}$$ (BEHA-EDDIN)

Applicando ora il procedimento nel quale si pone sul secondo piatto lo stesso numero come sul primo; sia proposto di trovare la quantità, della quale il quinto ed il sesto sommati assieme danno 20.



Poniamo 30 sul primo piatto e così pure sul secondo. Liberiamo quello che l'autore chiama « le parti » vale a dire $\frac{30}{5} + \frac{30}{6}$ ossia il numero 11. La differenza con 20 è di 9 in meno: il primo errore è dunque (-9), poniamolo sotto il primo piatto, sia il numero 11 sotto la vôlta, moltiplichiamo quest'ultimo numero 11 per il 30 del primo piatto, poi l'errore del primo piatto, 9 per il 30 del secondo piatto, sommiamo i due risultati:

$$11 \times 30 + 9 \times 30 = 600$$

dividiamo per le parti del secondo piatto, vale a dire per l'11 posto sotto la vôlta e ne risulta:

$$x = \frac{11 \times 30 + 9 \times 30}{11} = \frac{600}{11} = 54\,\frac{6}{11}.$$

Digitized by Google

mente dal citato *Talkhys* d'Ibn Albannâ, nella traduzione fattane dal Marre (1).

IV.

Assai giustamente osservò l'Hankel (2) che lo sviluppo delle matematiche, quantunque non si manifesti nella storia con caratteri di assoluta e regolare continuità, pure non ammette lacune. Infatti, non appena un popolo appalesa un certo decremento nelle facoltà di indagine matematica, tosto gliene subentra un'altro, che prosegue, tutto al più con variato indirizzo, ma tendendo a scopi che in ultima analisi sono gli stessi. Così, per seguire il filo della nostra esposizione, quando colla preponderanza militare degli Arabi cadde pure la loro preminenza scientifica, Leonardo Pisano ne raccolse l'eredità, trasmettendola, arricchita del suo personale contributo, agli Italiani.

Lo sviluppo dei metodi geometrici di calcolo seguì questa medesima via.

È noto infatti che il Targioni-Tozzetti (3) credette vedere in uno dei manoscritti magliabecchiani dell'abbaco di Leonardo.

---

(1) Noi crediamo opportuno di qui arrestarci per ciò che si riferisce al contributo recato dagli Arabi alle costruzioni geometriche, nel timore di uscire di troppo fuori dell'argomento prefissato. Ci accontenteremo quindi di segnalare la *Lettre du Chaïkh Aboû Dja' far Mohammed Ben Alhoçaïn à Aboû Mohammed Abdallah Ben Alî le calculateur, sur la formation des triangles rectangles à côtés rationnels et sur l'utilité qu'offre leur connaissance*, pubblicata da F. WOEPCKE negli *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei*. Anno XIV. Sessione V del 7 Aprile 1861. Roma, 28 Settembre 1861.

(2) *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* von Dr. HERMANN HANKEL. Leipzig, 1874, pag. 172.

(3) *Relazioni d'alcuni viaggi fatti in diverse parti della Toscana*, ecc. dal dottor GIO. TARGIONI-TOZZETTI. Edizione seconda, ecc. Tomo secondo. In Firenze MDCCLXVIII, pag. 58 e seg.

Digitized by Google

le quantità espresse per le piccole lettere dell'alfabeto e che la cosa stessa fu affermata sulla fede di lui dal Tiraboschi (1) e riconosciuta erronea dall'Andres (2) e dal Cossali (3). Ora, esaminando questa notazione un po' attentamente si riconosce che, massimamente nei problemi i quali richiedono per la relativa loro complicazione o maggiori sviluppi o una più intensa attenzione, Leonardo rappresenta la cosa cercata *ut ad oculum clarius videatur* mediante una linea segnata con una piccola lettera e finalmente con lettere rappresenta il numero dato e gli effetti delle operazioni volute dalle condizioni del problema e si è appunto ragionando sopra tali rappresentazioni lineari ch'egli riduce al conveniente *capitolo* ed a scioglimento l'equazione. Questo metodo di rappresentazione grafica è così giudicato dal Cossali: (4) » Si può dire il metodo di Leonardo una sorta di *analisi speciosa lineare;* e se resta nei pregi e nei vantaggi inferiore alla *speciosa analisi letterale* odierna, riesce certamente superiore di molto ad una semplice *analisi numerica*, prestando ajuto alla fantasia, spargendo lume sul computo e dandogli una certa generalità. Le rappresentazioni delle note ed ignote quantità per linee sono simboli indeterminati, il calcolo su di essi guidato partecipa della indeterminata estension loro; ancorchè di mano in mano applicando si vada ai numeri proposti, ai quali le linee sostituite furono, comprendesi tuttavia, che ugualmente ad altri dati numeri qualunque appli-

---

(1) *Storia della letteratura italiana* del cavaliere abate GIROLAMO TIRABOSCHI, ecc. Prima edizione veneta. Tomo IV dall'anno MCLXXXIII all'anno MCCC. In Venezia MDCCXCV, pag. 161.

(2) *Dell'origine, de' progressi e dello stato attuale d'ogni letteratura* dell'abate D. GIOVANNI ANDRES. Parte Prima che contiene le Scienze Naturali. Tomo Decimo. In Venezia CIↃ. IↃCC. XCIII, pag. 154.

(3) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, Storia Critica, ecc. di D. PIETRO COSSALI. Vol. I. Parma, CIↃ. IↃCC. XCVII, pag. 37.

(4) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, ecc. di D. PIETRO COSSALI. Volume I. Parma CIↃ. IↃCC. XCVII. pag. 37-38, 46.

Digitized by Google

cherebbesi; che anzi senza numerica applicazione veruna su le linee assolutamente continuar si potrebbe; e così, se non è generale il processo, ne è generale lo spirito; se si particolarizza l'atto, non lascia d'esserne assoluta la virtù. » Nè in ciò fu Leonardo pedissequo imitatore di Euclide, poichè come assai giustamente esprime lo storico testè citato; » laddove, adoperando Euclide le linee a' generali teoremi di grandezze e de' numeri, la generale rappresentativa di quelle convenientemente seguiva la general verità di questi; applicando Leonardo le linee alle condizioni, ai dati numerici d'un particolar problema, questo veniva a ricever da quelle un' ampiezza, che da sè non aveva, e su la risoluzione di esso spargevasi un lume di general risoluzione di tutti i problemi simili. »

Prima di procedere oltre avvertiamo pertanto che è mestieri ben distinguere l'impiego fatto da Leonardo delle rette nelle operazioni algebriche, e del quale ci siamo finora occupati, dalla costruzione geometrica dei problemi della quale terremo parola in appresso. Del primo, lo ripetiamo, egli si serve semplicemente per designare concisamente mediante rette le quantità che sono oggetto o risultato delle operazioni algebriche, ottenendo per esso l'equazione: colla seconda egli risolve questa equazione od in altre parole sostituisce all'algebra la geometria (1). Talvolta ancora, come avremo motivo di riconoscere, Leonardo combina in modo assai ingegnoso la sua notazione lineare con una costruzione geometrica e di tale combinazione si serve per risolvere il proposto problema.

Soverchiamente lunga, quantunque non priva di interesse, riuscirebbe una particolareggiata esposizione di quanto nelle opere di Leonardo si contiene di importante per lo studio dello sviluppo

---

(1) *Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî* (Manuscrit 952, Supplément arabe de la Bibliothèque impériale); précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminée chez les arabes, par F. Woepcke. Paris, M DCCC LIII, pag. 26.

Digitized by Google

che presso di lui ebbero i metodi geometrici di calcolo: noi reputiamo tuttavia sufficiente di limitare il nostro esame allo scopo diretto di questo lavoro, cioè a quelli fra i suoi scritti, nei quali si contiene l'analisi delle equazioni.

Fra questi menzioneremo anzitutto un capitolo così intitolato: (1) *Incipit pars tertia de solutione quarumdam quaestionum secundum modum algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem:* in margine ad esso nel codice magliabecchiano C. I, 2616, *Badia Fiorentina*, n.° 73 (f.° 187 *verso*) si legge » Maumeht », colla quale indicazione volle certamente Leonardo richiamarsi in modo esplicito a Mohammed ben Musa.

Leonardo distingue (2) sei forme di equazioni, ch'egli enumera nell'ordine seguente:

1.°) $x^2 = nx$

2.°) $x^2 = n$

3.°) $px = n$

4.°) $x^2 + px = n$

5.°) $px + n = x^2$

6.°) $x^2 + n = px$

chiamando le prime tre: *modi semplices*, le altre *compositi*.

---

(1) *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie, depuis le renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle* par GUILLAUME LIBRI. Tome Second. Paris, 1838, pag. 356. — *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano* pubblicato secondo la lezione del codice magliabecchiano C. I, 2616. *Badia Fiorentina*, n.° 73 da BALDASSARRE BONCOMPAGNI. Roma, M DCCC LVII, pag. 406. — *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie*, ecc. par GUILLAUME LIBBI. Tome Second. Deuxième édition. Halle, 1865, pag. 356.

(2) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra*, di D. PIETRO COSSALI. Parma, CIↃ . IↃCC . XCVII, pag. 2-4.

Digitized by Google

Lasciando di parlare della risoluzione dei semplici, diamo un saggio del metodo seguìto da Leonardo nella geometrica dimostrazione dei composti, riassumendone brevemente la prolissa esposizione.

IV. $x^2 + px = n$ (1)

Si costruisca (*fig.* 38) sopra una retta $BC > \frac{1}{2}p$ il quadrato $ABCD$ e prese sui lati le porzioni CG, CH, DF, BE tutte eguali a $\frac{1}{2}p$ e condotte le rette GF, HE che si intersecano in I, si formi il quadrato $IGCH = \frac{1}{4}p^2$. Si supponga $EI = AF = EA = IF = BG = DH$ la quantità cercata x, sarà il quadrato AI uguale ad x^2, il rettangolo $BI = \frac{1}{2}px$ e parimenti il rettangolo $ID = \frac{1}{2}px$. Dunque il quadrato intero sarà:

$$ABCD = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$$

Ma $x^2 + px = n$, dunque lo stesso quadrato sarà $ABCD = n + \frac{1}{4}p^2$, per conseguenza il lato BC di esso quadrato sarà $\sqrt{(n + \frac{1}{4}p^2)}$ e la quantità cercata:

$$x = BC - GC = BC - \frac{1}{2}p = \sqrt{(n + \frac{1}{4}p^2)} - \frac{1}{2}p.$$

---

(1) L'esempio proposto da LEONARDO è il seguente: « *Census et decem radices equentur* 39 ». Ora questa stessa equazione coi medesimi coefficienti si trova nell'algebra di MOHAMMED BEN MUSA (pag. 8 e 13 della traduzione di ROSEN), nell'algebra di ALKHAYYAMÎ (pag. 17 della traduzione di WOEPCKE) ed in quella di ALKARKHÎ (pag. 65 della traduzione di WOEPCKE).

Digitized by Google

V. $px + n = x^2$

Sia (*fig.* 39) $BC = x$ e il quadrato su di essa costruito $ABCD = x^2$. Si prenda su BC la porzione $EC = p$ e si innalzi la perpendicolare $EF = x$, si otterrà il rettangolo $ED = px$, quindi il rettangolo residuo $EA = n$. E per essere $EA = BE$. $BA = BE$. BC, sarà $n = BE$. $BC = (BE)^2 + BE$. EC. Si divida EC per metà in G e sarà:

$$n + (EG)^2 = (BE)^2 + BE.\ EC + (EG)^2$$

Di qui: $\sqrt{\{n + (EG)^2\}} = BE + EG = BG$,

e $GC + \sqrt{\{n + (EG)^2\}} = GC + BG = BC$.

Onde, essendo $GC = EG = \frac{1}{2}p$, $BC = x$, sarà:

$$\frac{1}{2}p + \sqrt{(n + \frac{1}{4}p^2)} = x.$$

VI. $x^2 + n = px$

Quest'ultimo caso è così discusso dal nostro Leonardo: » Et cum occurrerit quod census, et numerus equentur radicibus, scias hoc fieri non posse, nisi numerus fiat equalis, vel minor quadrato medietatis radicum: qui si equalis fuerit, habebitur pro radice census numerus medietatis radicum: et si numerus, qui cum censu equatur radicibus, fuerit minus quadrato medietatis radicum, extrahe ipsum numerum ex ipso quadrato; et ejus quod remanserit radicem extrahe ex numèro medietatis radicum; et si id quod remanserit non erit radix quesiti census, tunc addes id quod extraxisti super numerum, de quo extraxisti et habebis radicem quesiti census. » Od in altre parole:

Digitized by Google

Se $\frac{1}{4}p^2 < n$, l'equazione è impossibile.

Se $\frac{1}{4}p^2 = n$, sarà $x = \frac{1}{2}p$.

Se $\frac{1}{4}p^2 > n$, sarà: $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - n\right)}$

$$x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - n\right)}$$

» et sic cum non solvetur questio cum diminutione, solvetur sine dubio cum additatione. » Di ciò porge l'esempio seguente: » census et 40 equantur 14 radicibus » ovvero:

$$x^2 + 40 = 14\,x$$

ch'egli risolve nel modo che quì appresso simbolicamente si riassume.

Si conduca (*fig.* 40) AB che rappresenti p e si divida in due uguali parti in G ed in due disuguali in D e sopra una delle parti disuguali, considerata uguale ad x, si costruisca un quadrato che sarà x^2: si prolunghi la retta FE fino in I in modo che sia $FI = BA$ e si tracci IA. Sarà tutto il rettangolo:

$$AF = BA \,.\, BF = px$$

onde, essendo il quadrato $BE = x^2$, sarà il rettangolo:

$$AE = AD \,.\, DE = AD \,.\, BD = n$$

ed aggiungendo d'ambo le parti il quadrato $(GD)^2$ sarà:

$$AD \,.\, BD + (GD)^2 = n + (GD)^2.$$

Ora essendo divisa la AB in D in due parti disuguali ed in G in due uguali ed essendo conseguentemente GD la differenza

Digitized by Google

delle parti disuguali e delle uguali, per la proposizione 5.ª del libro II degli *Elementi*, sarà:

$$AD \,.\, DB + (GD)^2 = (BG)^2.$$

Perciò $(BG)^2 = n + (GD)^2$ e $(BG)^2 - n = (GD)^2$ per la qual cosa:

$$\sqrt{(BG)^2 - n} = GD \text{ e } BG - \sqrt{(BG)^2 - n} = BG - GD = DB,$$

ossia:
$$\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - n} = x.$$

Se il quadrato x^2 si costruisce sopra la parte maggiore AD considerata uguale ad x, si troverà analogamente:

$$\sqrt{(AG)^2 - n} = GD \text{ ed } AG + \sqrt{(AG)^2 - n} = AG + GD = AD,$$

cioè:
$$\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - n} = x.$$

Dopo ciò dichiara Leonardo » cum his autem sex regulis possunt solutiones infinitarum questionum reperiri.... » e dopo breve avvertenza scrive: (1) » Expliciunt introdutiones algebre et almuchabale. Incipiunt questiones eiusdem. » Di questi problemi torna assai malagevole il precisare il numero e quindi distinguerli tutti l'uno dall'altro, giacchè sovente Leonardo, dopo aver discusso un problema, indica come la soluzione si ottenga in modo

---

(1) *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie*, ecc. par GUILLAUME LIBRI. Tome Second. Paris, 1838, pag. 364. — *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano* pubblicato ecc. da BALDASSARRE BONCOMPAGNI, Roma, MDCCCLVII, pag. 410. — *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie*, ecc. par GUILLAUME LIBRI. Tome Second. Deuxième édition. Halle, 1865, pag. 364.

Digitized by Google

più o meno analogo, allorchè l'enunciato subisce certe modificazioni. Il Woepcke (1) ne contò da 90 a 100. Ancor più malagevole riuscirebbe lo stabilire se di questi problemi e delle relative soluzioni sia veramente autore il nostro Leonardo, avendo il Woepcke stesso posto in chiaro come di essi ben 23 sieno tratti dall'Algebra di Mohammed ben Musa, e 25 dall'algebra di Alkarkhi. Per circa una metà adunque questi problemi appartengono ai due autori arabi testè menzionati e niuno potrebbe assicurare che anche i rimanenti non sieno stati tratti da qualche autore arabo del quale le opere o andarono perdute o non vennero ancora scoperte.

Ecco pertanto la distinta dei ventitrè problemi tolti dall'Algebra di Mohammed ben Musa e che, per amore di brevità, registriamo servendoci degli odierni simboli:

1. $x^2 = 4x\,(10 - x)$ . . . . . (2)

2. $10^2 = x^2 \,.\, 2\frac{7}{9}$ . . . . . (3)

3. $\frac{10 - x}{x} = 4$ . . . . . (4)

---

(1) *Extrait du Fakhrî*, ecc. par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LIII, pag. 28-29.

(2) *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Edited and translated by FREDERIC ROSEN. London, 1831, pag. 35, lin. 15. — *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie*, ecc. par GUILLAUME LIBRI. Tome Second. Paris, 1838, pag. 364, lin. 20. — *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie*, ecc. par GUILLAUME LIBRI. Tome Second. Deuxième èdition. Halle, 1865, pag. 364, lin. 19. — *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano* pubblicato ecc. da BALDASSARRE BONCOMPAGNI. Roma, MDCCCLVII, pag. 410, lin. 1.

(3) *The Algebra*, ecc. pag. 36, lin. 19. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 366, lin. 4. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 410, lin. 24. — *Histoire*, ecc. Halle, 1866, pag. 366, lin. 2

(4) *The Algebra*, ecc. pag. 37, lin. 16. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 366, lin. 14. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 410, lin. 30. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 366, lin. 12.

Digitized by Google

4. $$\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{4}x+1\right)20 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

5. $$x^2+(10-x)^2=58 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

6. $$(10-x)^2-x^2=40 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

7. $$\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4}=x+24 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

8. $$\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

9 $$\frac{5x}{2(10-x)}+5x=50 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

10. $$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

---

(1) *The Algebra*, ecc. pag. 38, lin. 11. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 367, lin. 15. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 411, lin. 7. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 367, lin. 14.

(2) *The Algebra*, ecc. pag. 39, lin. 17. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 368, lin. 9. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 411, lin. 21. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 368, lin. 8.

(3) *The Algebra*, ecc. pag. 42, lin. 18. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 369, lin. 5. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 411, lin. 38. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 369, lin. 5.

(4) *The Algebra*, ecc. pag. 40, lin. 21. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 369, lin. 14. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 411, lin. 43. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 369, lin. 14.

(5) *The Algebra*, ecc. pag. 44, lin. 18. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 369, lin. 27. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 412, lin. 8. *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 369, lin. 27.

(6) *The Algebra*, ecc. pag. 46, lin. 12. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 371, lin. 5. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 412, lin. 30. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 371, lin. 5.

(7) *The Algebra*, ecc. pag. 63, lin. 11. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 372, lin. 4. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 413, lin. 6. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 372, lin. 5.

Digitized by Google

11. $$\frac{x\,(10-x)}{10-2x} = 5\,\frac{1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

12. $$4x \,.\, 5x = 2x^2 + 36 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

13. $$4x^2 = 20 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

14. $$x \,.\, \frac{x}{3} = 10 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

15. $$x \,.\, 4x = \frac{x}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

16. $$x^2 \,.\, x = 3x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

17. $$\left(\frac{x}{3}+1\right) - \left(\frac{x}{4}+2\right) = x + 13 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

---

(1) *The Algebra*, ecc. pag. 51, lin. 13. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 381, lin. 5. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 416, lin. 21. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 381, lin. 5.

(2) *The Algebra*, ecc. pag. 55, lin. 13. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 395, lin. 15. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 422, lin. 9. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 395, lin. 11.

(3) *The Algebra*, ecc. pag. 53, lin. 21. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 395, lin. 29. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 422, lin. 17. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 395, lin. 24.

(4) *The Algebra*, ecc. pag. 54, lin. 4. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 396, lin. 1. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 422, lin. 19. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 395, lin. 27.

(5) *The Algebra*, ecc. pag. 54, lin. 9. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 396, lin. 4. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 422, lin. 22. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 395, lin. 30.

(6) *The Algebra*, ecc. pag. 54, lin. 15. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 396, lin. 8. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 422, lin. 25. — *Histoire*, ecc. Paris, 1865, pag. 396, lin. 4.

(7) *The Algebra*, ecc. pag. 58, lin. 8. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 396, lin. 13. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 422, lin. 28. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 396, lin. 9.

Digitized by Google

18. $\left(x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x - 4\right)^2 = x + 12$ . . . . (1)

19. $\frac{x^2 - 4x}{3} = 4x$ . . . . . (2)

20 $(x^2 - 3x)^2 = x^2$ . . . . . (3)

21. $x \cdot \frac{2}{3}x = 5$ . . . . . (4)

22. $\frac{2}{3}x^2 = 5$ . . . . . (5)

23. $\left\{x - \left(\frac{x}{3} + 3\right)\right\}^2 = x$ . . . . . (6)

Di tutti questi problemi Leonardo non risolve geometricamente se non il 10.°, risoluzione geometrica ch'egli eseguisce dopo aver ridotto il problema stesso ad una equazione del secondo grado.

---

(1) *The Algebra*, ecc. pag. 60, lin. 7. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 397, lin. 11. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 423, lin. 3. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 397, lin. 8.

(2) *The Algebra*, ecc. pag. 66, lin. 9. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 398, lin. 8. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 423, lin. 20. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 398, lin. 6.

(3) *The Algebra*, ecc. pag. 67, lin. 14. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 398, lin. 14. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 423, lin. 24. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 398, lin. 12.

(4) *The Algebra*, ecc. pag. 62, lin. 13. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 398, lin. 20. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 423, lin. 27. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 398, lin. 18.

(5) *The Algebra*, ecc. pag. 64, lin. 18. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 398, lin. 20. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 423, lin. 27. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 398, lin. 18.

(6) *The Algebra*, ecc. pag. 56, lin. 21. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 398, lin. 31. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 423, lin. 34. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 398, lin. 29.

Digitized by Google

I seguenti problemi sono tratti invece dall' algebra di Alkarkhî:

I. $x + y = 10, \left(10 + \frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x} + 10\right) = 122\frac{2}{3}$ . . (1)

II. $x + y = 10, \left(10 + \frac{y}{x}\right)\left(10 - \frac{x}{y}\right) = 107\frac{1}{3}$ . . (2)

III. $x + y = 10, \frac{y}{x}(y - x) = 24$ . . . . . (3)

IV. $x + y = 10, \frac{y}{x} + x = 5\frac{1}{2}$ . . . . . (4)

V. $x + y = 10, \left(\frac{y}{x} + y\right)x = 30$ . . . . . (5)

VI. $x + y = 10, \frac{y}{x} \cdot y = 9$ . . . . . (6)

---

(1) *Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhî* (manuscrit 952, supplément arabe de la Bibliothéque impériale) précédé d' un mémoire sur l' algèbre indéterminée chez les arabes, par F. WOEPCKE. Paris, M DCCC LIII, pag. 26, lin. 17. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 382, lin. 4. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 416, lin. 40. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 382, lin. 4.

(2) *Extrait*, ecc. pag. 26, lin. 30. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 383, lin. 7. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 417, lin. 15 — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 383, lin. 6.

(3) *Extrait*, ecc. pag. 26, lin. 1. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 386, lin. 3. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 418, lin. 24. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 386, lin. 3.

(4) *Extrait*, ecc. pag. 26, lin. 1. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 388, lin. 20. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 419, lin. 29. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 388, lin. 20.

(5) *Extrait*, ecc. pag. 26, lin. 1. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 389, lin. 17. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 420, lin. 1. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 389, lin. 17.

(6) *Extrait*, ecc. pag. 26, lin. 1. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 390, lin. 7. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 420, lin. 9. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 390, lin. 6.

Digitized by Google

VII. $\left(x-\frac{x}{3}\right).3\sqrt{x}=x$ . . . . . (1)

VIII. $4\sqrt{x^2-3x}+3x=20$ . . . . . (2)

IX. $4\sqrt{x^2-3x}+3x=x^2+4$ . . . . . (3)

X. $10\sqrt{x^2-8x}+8x=x^2+21$ . . . . . (4)

XI. $x\,(x+\sqrt{10})=9x$. . . . . (5)

XII. $\sqrt{8x}.\sqrt{3x}+20=x^2$ . . . . . (6)

XIII. $\sqrt{6x}.\sqrt{5x}+10\,x+20=x^2$ . . . . . (7)

---

(1) *Extrait*, ecc. pag. 26, lin. 24. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 392, lin. 6. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 421, lin. 1. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 392, lin. 5.

(2) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 4. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 392, lin. 12. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 421, lin. 5. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 392, lin. 11.

(3) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 4. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 393, lin. 17. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 421, lin. 21. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 393, lin. 15.

(4) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 4. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 394, lin. 13. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 421, lin. 38. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 394, lin. 11.

(5) *Extrait*, ecc. pag. 25, lin. 5. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 403, lin. 19. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 426, lin. 4. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 403, lin. 19.

(6) *Extrait*, ecc. pag. 25, lin. 5. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 406, lin. 17. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 427, lin. 13. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 406, lin. 16.

(7) *Extrait*, ecc. pag. 25, lin. 5. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 407, lin. 20. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 427, lin. 35. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 407, lin. 19.

Digitized by Google

XIV. $x + y = 10\ ,\ y^2 - x\sqrt{8} = 40$ . . . . . (1)

XV. $x + y = 10\ ,\ \dfrac{x \cdot y}{y - x} = \sqrt{6}$ . . . . . (2)

XVI. $x - y = 5\ ,\ \sqrt{x \cdot 10x} = y^2$ . . . . . (3)

XVII. $(\sqrt{x \cdot 2x} + 2)\, x = 30$ . . . . . (4)

XVIII. $2\sqrt{x^2} + \sqrt{\dfrac{x^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2}{3}} = x^2$ . . . . . (5)

XIX. $2\sqrt{x^2} + \sqrt{\dfrac{x^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2}{3}} = 20$ . . . . . (6)

XX. $(x + 7)\sqrt{3x} = 10\, x$ . . . . . (7)

---

(1) *Extrait*, ecc. pag. 25, lin. 12. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 411, lin. 13. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 429, lin. 17. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 411, lin. 13.

(2) *Extrait*, ecc. pag. 25, lin. 21. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 408, lin. 31. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 428, lin. 19. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 408, lin. 30.

(3) *Extrait*, ecc. pag. 25, lin. 12. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 414, lin. 15. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 430, lin. 35. — *Histoire*, ecc. Paris, 1865, pag. 414, lin. 14.

(4) *Extrait*, ecc. pag. 25, lin. 12. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 420, lin. 18. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 433, lin. 31. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 420, lin. 16.

(5) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 9. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 442, lin. 3. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 443, lin. 26. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 442, lin. 3.

(6) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 9. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 443, lin. 1. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 443, lin. 40. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 443, lin. 1.

(7) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 16. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 447, lin. 26. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 445, lin. 35. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 447, lin. 25.

Digitized by Google

XXI. $y = 3x$, $(y + \sqrt{y})\,(x + \sqrt{x}) = 10y$ . . . (1)

XXII. $x + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{5x^2} = 10$ . . . . . (2)

XXIII. $x^2 + y^2 = z^2$, $xz = y^2$, $xy = 10$ . . . . . (3)

XXIV. $x + y = 10$, $x - 2\sqrt{x} = y + 2\sqrt{y}$ . . . (4)

XXV. $x + y = 10$, $\left(\frac{10}{x} + \frac{10}{y}\right)^2 = 30$ . . . . . (5)

Di tutti questi problemi Leonardo, dopo averli ridotti ad una equazione del secondo grado, costruisce geometricamente al modo degli arabi i seguenti: VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XXIII.

Veniamo ora all'esame d'un altro scritto del nostro Leonardo, pubblicato per la prima volta da D. B. Boncompagni ed intitolato: (6) *flos Leonardi bigolli super solutionibus quarumdam questionum ad*

---

(1) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 16. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 448, lin. 16. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 446, lin. 5. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 448, lin. 15.

(2) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 16. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 449, lin. 31. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 446, lin. 34. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 449, lin. 30.

(3) *Extrait*, ecc. pag. 27, lin. 22. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 451, lin. 3. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 447, lin. 14. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 451, lin. 3.

(4) *Extrait*, ecc. pag. 28, lin. 1. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 461, lin. 14. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 451, lin. 40. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 461, lin. 14.

(5) *Extrait*, ecc. pag. 28, lin. 4. — *Histoire*, ecc. Paris, 1838, pag. 475, lin. 16. — *Il Liber Abbaci*, ecc. pag. 418, lin. 19. — *Histoire*, ecc. Halle, 1865, pag. 475, lin. 15.

(6) *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, pubblicati da BALDASSARRE BONCOMPAGNI, Vol. II. (Leonardi Pisani Practica Geometriae ed opuscoli). Roma, 1862, pag. 227.

Digitized by Google

numerum et ad geometriam, vel ad utrumque pertinentium. Questo opuscolo di Leonardo non riguarda questioni geometriche, come già ebbe ad osservare il Genocchi, (1) ma il nostro autore dice spettanti alla geometria anche quelle nella cui risoluzione fa uso di proprietà e dimostrazioni geometriche.

Noi ricorderemo quì in particolar modo il problema proposto a Leonardo da maestro Giovanni da Palermo, filosofo dell'imperatore Federico II di Svevia, nel quale si domanda di trovare (2) *quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis, et decem radicibus in unum collecti essent viginti:* ovvero determinare la incognita x nella equazione cubica:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Leonardo diresse quivi tutti i suoi sforzi alla ricerca della radice positiva, e così infatti doveva egli procedere, poichè la x non può essere reale negativa: e ciò fece egli di proposito, giacchè in altri luoghi del medesimo opuscolo, dove convenga di farlo, egli non trascura le considerazioni relative alle soluzioni negative.

Per ciò che riguarda il procedimento seguìto, noi ci limiteremo a riferire col Genocchi (3) che Leonardo riporta le distinzioni Euclidee delle *linee razionali in lunghezza o potenza*, delle *medie*, dei *binomii*, e *recisi* o *apotomi* e delle loro radici, espressioni che

---

(1) *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* compilati da BARNABA TORTOLINI. Tomo Sesto. Roma, 1855, pag. 161. — *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni.* Note analitiche di ANGELO GENOCCHI. Roma, 1855, pag. 3.

(2) *Scritti di Leonardo Pisano,* ecc. pubblicati da BALDASSARRE BONCOMPAGNI. Vol. II. Roma, 1862, pag. 228.

(3) *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* compilati da BARNABA TORTOLINI. Tomo Sesto. Roma, 1855, pag. 162. — *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano,* ecc. Roma, 1855, pag. 4.

Digitized by Google

corrispondono ai simboli oggi usati:

$$a, \sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

quando per a e b s'intendano numeri razionali positivi e negli ultimi si supponga $a > b$, indi prova che il valore cercato non può esprimersi in alcuno di questi modi. In sostanza la dimostrazione si riduce a porre in luogo di x nell'equazione il valore supposto e mostrare che ne risulterebbe l'eguaglianza fra un numero intero ed una frazione, oppure fra due quantità l'una incommensurabile coll'altra; ma Leonardo rappresenta l'equazione con una figura geometrica, formando un rettangolo che ha l'altezza uguale a 10 e la base a 2, e che è diviso in tre altri rettangoli della medesima altezza e di aree uguali ad x^3, $2x^2$, $10x$ e sopra questa figura, alla quale fa di mano in mano qualche aggiunta, spiega i suoi raziocinii, supplendo con tali costruzioni alle trasformazioni dei membri dell'equazione.

Giunto alla fine d'una discussione, che il Genocchi chiama giustamente ammirabile, Leonardo non depose già il pensiero di trovare la domandata radice, ma non dubitando della reale esistenza di questa, ne volle, determinare il valore per approssimazione, (1) ed il calcolo a tale uopo intrapreso (2) gli fornì:

$$x = 1.\ 22^{\mathrm{i}}\ 7^{\mathrm{ii}}\ 42^{\mathrm{iii}}\ 33^{\mathrm{iv}}\ 4^{\mathrm{v}}\ 10^{\mathrm{vi}}.$$

---

(1) Intorno alla risoluzione numerica approssimata delle equazioni cubiche per opera degli Arabi, cfr. *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche.* Tomo V. Roma, 1872, pag. 399-401. — *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* von Dr. HERMANN HANKEL. Leipzig, 1874, pag. 291-293. — *Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin* 1.° par M. WOEPCKE nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées* publié par JOSEPH LIOUVILLE. Tome XIX, Année 1854, Paris, 1854, pag. 153-176; 301-303.

(2) *Scritti di Leonardo Pisano,* ecc. pubblicati da BALDASSARRE BONCOMPAGNI. Vol. II. Roma, 1862, pag. 234.

Digitized by Google

Il Woepcke, che di tale determinazione si occupò in modo speciale, (1) sostituendo alla dimostrazione geometrica di Fibonacci, la più succinta algebrica, vi premette queste significanti parole: » En reproduisant, par defaut d'espace, les raisonnements de Fibonacci sous la forme algébrique qui suit, nous gagnons en précision, mais non en clarté. » Il Genocchi alla sua volta, occupandosi dello stesso argomento (2), si studiò di divinare il metodo tenuto da Leonardo per giungere ad una approssimazione tanto inoltrata.

Alle dimostrazioni geometriche date da Leonardo nel suo *Liber quadratorum* ci limiteremo ad accennare semplicemente, poichè talvolta egli non introduce le figure se non per ajutare la mente a rappresentarsi le quantità non individuate da particolari valori numerici, ed anche quando il metodo ne è più strettamente geometrico, non ci sembra che nello svolgimento si offra uno straordinario interesse sotto il punto di vista costruttivo, tale insomma da giustificare intorno ad esso una particolareggiata esposizione.

Di frate Luca Pacioli, che tanta parte degli scritti di Leonardo raccolse nella vasta sua opera, poco o nulla abbiamo a dire per quanto riguarda direttamente lo scopo nostro: infatti nella trattazione delle equazioni del secondo grado, quantunque egli dimostri le regole da lui date in versi latini per via di considerazioni geometriche, (3) pure i metodi da lui seguìti in questa

---

(1) *Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenu dans un ouvrage de Léonard de Pise découvert par M. le prince Balthasar Boncompagni* par M. WOEPCKE nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées* publié par JOSEPH LIOUVILLE. Tome XIX. Année 1854. Paris, 1854, pag. 403.

(2) *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* compilati da BARNABA TORTOLINI. Tomo Sesto. Roma, 1855, pag. 165. — *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, ecc. Roma, 1855, pag. 7.

(3) *Summa de Arithmetica geometria. Proportioni: et proportionalita;* Nouamente impressa in Toscolano, ecc. Car. 145-147.

Digitized by Google

occasione non offrono alcuna caratteristica di originalità, anzi appariscono in tutto e per tutto una fedele imitazione di quanto a questo proposito vedemmo già aver lasciato Mohammed ben Musa.

Quanto alle equazioni di grado superiore al secondo è ben noto che frate Luca si limitò ad accennare alla possibilità della loro soluzione (1).

Il successivo sviluppo storico dell'argomento che noi andiamo trattando acquista un maggior interesse perciò che esso si lega direttamente alle molte vicende che accompagnarono la scoperta del metodo per risolvere le equazioni del terzo grado. Noi non rifaremo

---

(1) *Summa de Aritmetica geometria. Proportioni; et proportionalita;* Nouamente impressa in Toscolano, ecc. Car. 149. Cfr. a tale proposito: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra.* Storia Critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di D. PIETRO COSSALI. Volume II. Parma, CIↃ. IↃCC. XCIX, pag. 96-97. — *Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik.* XXII Jahrgang. Leipzig, 1877, pag. 136. — A prima giunta l'asserzione surriferita sembrerà accordarsi assai poco colla parola « impossibile » che frate LUCA PACIOLI pone accanto alle due forme $fx^4 + gx^2 = nx$; $fx^4 + nx = gx^2$: ma per formarsi un giusto concetto di ciò che egli pensava a tale proposito è mestieri proseguire la lettura fino alla fine del trattato (car. 150) dove si legge: « Ma de n.° cosa e cubo fra loro siando composti: ouer de n.° censo e cu. ouer de n.° cu. e cen. de cē. non se possuto finora tropo bene formare regole generali: per la disproportionalita fra loro. Perche fra loro non sōno interualli equali: vnde fra la cosa el n.° nō media alcuna dignita ne natura: e fra la cosa el cubo media el censo. Siche nō ne la debita hītudine fra loro: peroche vno e piu distate dal suo extremo che laltro. E cosi fra el censo e cubo niuna cosa media. E fra el censo el numero media la cosa. E pero ancora de li aguaglimēti loro nō si po dare r.ª generale. Se non ale volte a tastoni (cōmo e ditto disopra) ī q̄lche caso p̄ticulare, e p̄o qn̄i li toi aguagliamēti te ritroui termini de diuersi interualli fra loro disproporzionati: dirai che larte ancora a tal caso non a datto modo si cōmo ancora no e dato mō al q̄drare del cerchio. Siche ista stant simul chel caso sia possibile: e per anco el modo absoluerlo non sia dato per la improportionalità che e cativa. » Di qui adunque chiaro apparisce che frate LUCA scrivendo « impossibile » intendeva ad una impossibilità relativa alle cognizioni d'allora, anzi solamente alla impossibilità di dare a quei tempi una regola generale, escludendo affatto l'idea di una impossibilità assoluta od anche della impossibilità di soluzioni particolari.

Digitized by Google

questa storia la quale scrisse già con tanto lusso di particolari e con così grande conoscenza della materia il Gherardi, (1) mantenendocene quindi completamente estranei, ci limiteremo a toccare di quanto interessa più direttamente lo svolgimento del nostro tema.

È noto infatti come fra i problemi proposti da Tartaglia a Del Fiore nella prima disfida avvenuta il 22 Febbraio 1535, parecchi ve ne fossero di geometrici (2) che conducevano ad

---

(1) *Nuovi Annali delle scienze naturali e rendiconto delle sessioni della Società Agraria, dell' Istituto di Bologna*, ecc. Serie II, Tomo V. Bologna, 1846. — *Di alcuni materiali per la storia della Facoltà Matematica dell'antica Università di Bologna composti nella opportunità di stendere delle notizie sul Padre Bonaventura Cavalieri.* Discorso letto all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna nelle sessioni del 9 e 23 Maggio 1844 del dottore SILVESTRO GHERARDI, ecc. Bologna, 1846. — *Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der Alten Universität Bologna.* Vorträge gehalten vor der Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna an. 9, n. 23 Mai sowie 12 December 1844 und 7 Mai 1846 vom Commendatore Professor Dr. SILVESTRO GHERARDI. Unter Mitwirkung des Verfassers in's Deutsche übersetzt von MAXIMILIAN CURTZE. Berlin, 1871. — *I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Lodovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia, comprendenti le soluzioni de' quesiti dall'una e dall'altra parte proposti raccolti, autografati e pubblicati da* ENRICO GIORDANI. Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui Cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. SILVESTRO GHERARDI. Milano, 1876.

(2) Desidero di ricordare il contributo notevole che nei cartelli di sfida fra il FERRARI ed il TARTAGLIA si trova per la storia di quel ramo di Geometria che più tardi ebbe dal MASCHERONI il nome di *Geometria del compasso.* Non è ben noto infatti dove e quando e da chi per la prima volta si pensò di considerare il compasso come fermo e con immutabile inclinazione rispettiva dei bracci. Certo che il WOEPCKE ne trovò traccie presso ABUL WEFA, noto astronomo arabo della seconda metà del decimo secolo e che, secondo quanto riporta il LIBRI, (*Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, ecc. Tome Troisième, Halle, 1865, pag. 122) LEONARDO DA VINCI se ne occupò ripetutamente. Il FERRARI nel suo quinto cartello (cfr. la pubblicazione del GIORDANI già citata, pag. 25) così si esprime: Io m'allegro, Messer Nicolò, che in questi nostri quesiti m'abbiate dato materia di

Digitized by Google

equazioni del terzo grado: ma di interesse ben maggiore per lo scopo nostro riesce l'indagare colla guida del Cossali, (1) quale

---

giouare a quei che si dilettano di Geometria, et di Aritmetica, non essendo tuttavia pervenuti anchora al colmo delle predette scienze. E questo, percioche ne' nostri primi diecisette quesiti si contiene quella bella inventione di operare senza mutare l'apertura del compasso, la qual io non so da chi si hauesse principio, ma io so bene, che da circa a cinquant' anni in quà molti bei ingegni si sono affaticati per accrescerla, fra quali, in gran parte è stato la felice memoria di messer Scipione dal Ferro cittadino Bolognese. Io dunque, voglio esser quello, che a tal inventione dia tutta la perfettione, che puo hauere, dimostrando per questa mia, non solamente alcune propositioni, trouate da nostri maggiori, ma etiamdio tutto Euclide. » Il cartello al quale appartiene questo passo venne stampato colla data di Milano e del mese di Ottobre 1547. Adunque sul principio del decimosesto secolo, per quel che ci narra il FERRARI, SCIPIONE DAL FERRO grandemente accrebbe quella maniera di geometrici studii, sui quali poscia e il CARDANO ed il FERRARI e il TARTAGLIA ed il famoso discepolo di lui BENEDETTI l' un dopo l' altro si esercitarono. Quest' ultimo, come è ben noto, vi attese con un opera speciale intitolata: *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum una tantummodo circini data apertura*, ecc. Venetiis, MDLIII, ch' egli pubblicò in età di soli ventitrè anni e che attrasse sopra di lui l' attenzione di tutti gli studiosi italiani. A chi ben conosce il pregio in cui in ogni tempo fu tenuta questa opera ed i lavori che nel medesimo indirizzo pubblicarono in tempi a noi più vicini il MASCHERONI e lo STEINER non potrà non parere stranamente leggero ed avventato il giudizio che sull' argomento in genere e sull' opera del BENEDETTI pronunciò il MONTUCLA (*Histoire des Mathématiques*, ecc. Nouvelle édition. Tome Premier. A Paris, An. VII, pag. 570): « Je ne sais si je dois parler ici d'une bagatelle géométrique, à laquelle Tartalea donne plus d'importance qu' elle ne méritoit. C' est le moyen de construire tous les problêmes d'Euclide avec une seule ouverture de compas, comme si pour tout instrument on n' avoit qu'une règle et un compas invariable. Cardan s'en étoit amusé dans son livre *de subtilitate*, et paroît avoir voulu se borner à un essai. Mais Tartalea parcourt tous ces problêmes avec une ridicule exactitude, et querelle beaucoup son adversaire d' en avoir laissé plusieurs en arrière. Cardan étoit assurément bien supérieur à des bagatelles de cette espèce. Cependant elles n' ont pas laissé d' occuper un géomètre qui ne leur étoit pas moins supérieur, savoir, J. B. Benedictus, qui a donné en 1555 un livre entier sur ce sujet. »

(1) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra. Storia Critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di* D. PIETRO COSSALI. Vol. II. Parma, 1797, pag. 145-154.

Digitized by Google

sia stata la via seguìta dal Tartaglia per giungere alla sua scoperta.

Già il Lagrange, il quale soleva porre tanta scrupolosa cura nella redazione delle introduzioni storiche ai suoi lavori, nelle *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (1), prendendo a trattare delle equazioni della forma $x^3 + hx + l = o$, scrive: » C'est dans cet état que les équations du troisième degré ont été d'abord traitées par Scipio Ferreo, et par Tartalea, à qui on doit leur résolution, mais on ignore le chemin qui les y a conduits ». Esatta pur troppo questa asserzione per quanto si riferisce a Scipione dal Ferro, non lo è interamente riguardo al Tartaglia. Questi infatti pose a fondamento di tutte le regole da lui trovate per la risoluzione delle equazioni cubiche il seguente teorema sulla composizione del cubo, ch'egli attribuisce a sè medesimo (2). » Se sarà una linea divisa in due parti (come si voglia) il cubo fatto da tutta la detta linea sempre sarà eguale a questi otto prodotti, ouer solidi, cioè alli duoi cubi fatti da quelle due parti, insieme con quelli sei solidi, delli quali tre sono contenuti da tre superficie quadrate di l' uno di cubi et dall'altra parte della linea diuisa, et tre sono contenuti da tre superficie quadrate de l' altro cubo et de l' altra della linea diuisa. »

Od in altri termini:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2 b + 3ab^2.$$

Riassumiamo brevemente la dimostrazione geometrica che il Cossali trae da quella del Tartaglia, rettificando alcuni errori materiali corsi nella stampa.

---

(1) *Nouveaux Mémoires de l' Académie Royale des Scienoes et Belles-Lettres.* Année MDCCLXX. A Berlin, MDCCLXXII, pag. 136.

(2) *La seconda parte del general trattato dei numeri et misure* di NICOLÒ TARTAGLIA, ecc. In Venezia, MDLVI, car. 30-31.

Digitized by Google

Sia la retta BC (*fig.* 38) divisa in G nelle due parti BG, GC e si costruisca sovr'essa il quadrato $ABCD$, indi da G si conduca la GF parallela ad AB e presa su questa la $AE = BG$, da E si conduca EH parallela ad AD: sarà $GCHI$ il quadrato di GC ed $AEIF$ il quadrato di BG, il rettangolo $BGIE$ sarà uguale al rettangolo di BG con GC e lo stesso si dica dell'altro rettangolo $IHDF$. Ora sull'intero quadrato $ABCD$ si immagini costruito un cubo (*fig.* 41) e sieno $BCLK$, $CLOE$, $LOPK$ tre delle sue faccie. Sopra i lati BK, CL si prendano le altezze BM, CN uguali fra loro ed a GC e per MN si faccia passare un piano parallelo alla base del cubo, un secondo piano si immagini condotto per CZ parallelamente alla faccia $CEOL$ ed un terzo per IY parallelamente alla faccia anteriore del cubo. Sopra il quadrato $GCNQ$ della GC insiste il cubo di essa: le tre superficie interne, cioè superiore, laterale a sinistra e posteriore moltiplicate rispettivamente per le tre rette NL, BG, IE, la prima e terza delle quali sono eguali a BG, costituiscono tre solidi, uguali ciascuno al quadrato di GC moltiplicato per BG. Sopra il secondo ed il terzo poggiano due solidi uguali ambedue al quadrato di BG moltiplicato per GC: rimane nella faccia superiore del cubo il quadrato $STUP = (BG)^2$, sotto il quale sta $(BG)^3$ ed a questo sta sottoposto un solido uguale a $(BG)^2 . GC$. In conclusione il cubo intero costruito sopra $ABCD$, ovvero il cubo di BC diviso nelle due parti BG e GC è composto dei due cubi di BG e GC, di tre solidi formati dal quadrato di BG moltiplicato per GC e di tre altri reciprocamente formati dal quadrato di GC moltiplicato per BG.

Oltre al teorema sopra enunciato deve pure essersi Tartaglia servito dell'altro:

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

la cui dimostrazione avrebbe potuto seguire in modo analogo a quello testè esposto.

Digitized by Google

Anche l'*Arte magna* di Cardano ci offre esempii molteplici di nozioni geometriche utilizzate nella teoria delle equazioni. Così nel capo XXV, trattando delle *posizioni di aggregato* in quelle del secondo grado, si richiama al teorema 5° del libro II degli *Elementi* e più innanzi, nel discutere il passaggio dal quadrato del binomio $a + b$ a quello del trinomio $a + b + c$ si serve per la dimostrazione di figure geometriche: un saggio di dimostrazione lineare ci porge egli nella discussione delle due equazioni:

$$x^3 + nx^2 = px + q$$

$$x^3 + q = nx^2 + px$$

un'altra dimostrazione pur essa geometrica porge ancora Cardano nel capo VII dell'*Arte Magna*, discutendo la trasformazione di:

$$x^3 + q = hx^2 \qquad \text{in} \qquad y^3 + q = hy\sqrt[3]{q}$$

trasformazione sulla quale ritorna più tardi con nuova dimostrazione geometrica riguardo al rapporto fra x, y espresso per l'equazione:

$$x = h - y^2.$$

E parlando di Cardano e della sua *Arte Magna*, noteremo finalmente come egli avverta doversi alla geometria la risoluzione delle equazioni del 2.° del 3.° e del 4.° grado.

Ciò premesso in generale, veniamo ad analizzare alcune costruzioni geometriche interessantissime che si trovano nelle opere di Tartaglia e di Cardano.

E, per cominciare dal Tartaglia, è degno d'essere riferito il seguente problema, del quale porge egli la soluzione algebrica prima, additandone poi la costruzione geometrica.

Dall'angolo A (*fig.* 42) del quadrato $ABCD$ vuol condursi attraverso il lato BD la retta AE che incontra in E il prolun-

Digitized by Google

gamento del lato CD, in modo che il triangolo DOE riesca uguale al quadrato stesso $ABCD$: si cerca il punto O, le lunghezze dei singoli lati del triangolo DOE e quelli di AE. La risoluzione algebrica è così riassunta dal Cossali (1).

Dicasi l il lato del quadrato, e pongasi $DO = x$, sarà dunque $BO = l - x$. Dalla somiglianza dei triangoli ABO, ODE si avrà:

$$l - x : x = AB : DE = l : DE = \frac{lx}{l - x}$$

$$OE = \sqrt{\left\{x^2 + \left(\frac{lx}{l - x}\right)^2\right\}}$$

$$AO \sqrt{\{l^2 + (l - x)^2\}}$$

$$AE = \sqrt{\{l^2 + (l - x)^2\}} + \sqrt{\left\{x^2 + \left(\frac{lx}{l - x}\right)^2\right\}}.$$

E per la condizione del problema:

$$\frac{1}{2} x \cdot \frac{lx}{l - x} = l^2$$

d'onde:

$$x^2 + 2lx = 2l^2$$

$$x = -l + \sqrt{3l^2} = -l + l\sqrt{3}$$

$$DE = \frac{l(-l + l\sqrt{3})}{2l - l\sqrt{3}} l + l\sqrt{3}$$

$$OE = 2l\sqrt{2}$$

$$AO = l\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$$

$$AE = 2l\sqrt{2} + l\sqrt{(8 - 4\sqrt{3})}.$$

---

(1) *Origine*, ecc. *dell'Algebra. Storia critica*, ecc. di D. PIETRO COSSALI. Vol. II. Parma, 1797, pag. 428.

Digitized by Google

Vediamo ora la costruzione geometrica.

Si costruisca il quadrato $DUMQ$ triplo in area di $ABCD$ e si tagli a partire da U, la UO uguale al lato del quadrato $ABCD$, il punto O cadrà necessariamente al disotto di B. Dall' angolo A del quadrato $ABCD$ per il punto O si conduca la AO e dal punto D si prolunghi la retta CD fino in E in modo che il prolungamento DE sia uguale a $DU + BD$: congiungendo i punti O ed E, la retta OE sarà nella direzione di AO e costituirà con esse una sola retta che sarà la richiesta dal problema. Infatti, essendo $DUMQ = 3\,ABCD$, si avrà:

$$DU = AB\sqrt{3} = l\sqrt{3}$$

$$DO = DU - UO = DU - AB = -l + l\sqrt{3}$$

$$DE = AB + DU = l + l\sqrt{3}$$

Rimane soltanto a mostrare che le rette AO ed OE sono per diritto. Si prolunghi OD fino in L in modo che sia:

$$DL = BO = BD - OD = l - (-l + l\sqrt{3})$$

$$= 2l - l\sqrt{3}$$

e da L condotta la LY parallela alla DE si compia il rettangolo $DL\,YE$. Questo rettangolo è uguale a:

$$DL \,.\, DE = (2l - l\sqrt{3})\ (l + l\sqrt{3}) = l^2\sqrt{3} - l^2\,.$$

Ma anche il rettangolo:

$$OSCD = DUTC - OUTS = DU \,.\, UT - (AB)^2$$

$$= l\sqrt{3} \,.\, l - l^2 = l^2\sqrt{3} - l^2$$

dunque:

$$DLYE = OSCD$$

Digitized by Google

e per conseguenza:

$$DL : DO = CD : DE$$

e poichè: $DL = BO$, $CD = BA$, così:

$$BO : OD = AB : DE$$

e per conseguenza:

$$\Delta\, ABO \backsim \Delta\, ODE$$

$$\widetilde{DOE} = \widetilde{AOB}$$

e per essere $AOU + UOE = 2R$, le rette AO ed OE, in forza della proposizione 15.ª del libro I degli *Elementi*, sono per diritto (1).

Ma sopra ogni altro meritevole di attenzione per lo scopo nostro e nell'epoca nella quale stiamo aggirandoci, è il Capo XII del trattato *De Aliza regula* così intitolato: *De modo demonstrandi geometrice aestimationem cubi* » nel quale si contiene una vera ed effettiva costruzione della equazione:

$$x^3 + q = nx^2$$

per mezzo della parabola e dell'iperbole.

Pongasi l'equazione sotto la forma:

$$q = (n - x)\, x^2$$

e si concepisca q come un parallelopipedo $DQTZ$ (*fig.* 43) avente la base quadrata QT e l'altezza DZ. Nella fig. 44 sia $AB = n$ divisa in modo che $BE = \frac{2}{3} - n$ ed $AE = \frac{1}{3}\, n$. Abbiasi poi EB:

---

(1) TARTAGLIA veramente nella dimostrazione geometrica da lui offerta costruisce il quadrato sopra DE, quadrato ch'egli divide poi in due rettangoli, corrispondentemente alla divisione di DE in due parti, l'una eguale a DU, l'altra uguale ad AB, giungendo poi con un giro un po' più lungo al medesimo scopo.

Digitized by Google

$DQ : u$ e si faccia:

$$EB : u = DZ : AC$$

sarà allora:

$$(EB)^2 : (DQ)^2 = EB : u = DZ : AC$$

per cui:

$$(EB)^2 AC = (DQ)^2 DZ$$

segue di quì che se si riuscirà a dividere AB in un punto O tale che sia:

$$(OB)^2 AO = (EB)^2 AC$$

sarà:

$$(OB)^2 AC = (DQ)^2 DZ = q$$

ed OB sarà il cercato valore di x.

Compiasi il rettangolo $ABCF$ e si conduca da C per E la retta CEG fino all' incontro in G del prolungamento di FB e formato il rettangolo $GFCH$ si conduca per E la LEK parallela a CA, indi si faccia: $AB : EB : FN$, la quale ultima risulterà $\frac{4}{9} n$ e prendendola per parametro ed FG per asse si descriva la parabola FTM col vertice in F. Indi fra gli assintoti HC, CF si descriva da B la iperbole BK avente a rettangolo assintotico $ACFB$, che taglierà la parabola nel punto T. Per questo punto T conducasi la RTS parallela ad HG e la TP parallela ad HC, il punto O in cui TP taglia AB è il punto cercato ed OB è il valore di x radice dell' equazione proposta.

Infatti per costruzione sono fra loro uguali i triangoli CHG, CFG, e parimenti lo sono i due triangoli EKG, EBG, per conseguenza, levando questi da quelli, rimangono fra loro uguali i trapezii $HCEK$, $CEBF$, ed aggiunti i due uguali triangoli CLE, CAE riescono uguali i due rettangoli $CHLK$, $ACFB$, ma $ACFB$, è rettangolo assintotico dell' iperbole, lo sarà dunque pure $CHLK$,

Digitized by Google

quindi il punto K è un punto dell'iperbole. Supposto che T sia parimenti un punto dell'iperbole, il rettangolo $RTCP$ è esso pure uguale ad $ABCF$ e sottraendo il comune $AOPC$ rimangono uguali $RTOA$, $OBFP$ ed essendo supplementi, devono essere intorno alla stessa diagonale, conseguentemente CO cade in S. Di quì segue:

$$CP : PO = CF : FS = CF : FN : FS : FN$$

ma per costruzione:

$$CF \,.\, FN = AB \,.\, FN = (EB)^2$$

e supposto T punto della parabola:

$$FS \,.\, FN = (ST)^2 = (OB)^2$$

dunque: $$CP : PO = (EB)^2 : (OB)^2$$

finalmente: $$CP = AO \quad , \quad PO = AC$$

dunque: $$AO : AC = (EB)^2 : (OB)^2$$

$$AO \,.\, (OB)^2 = AC\,(EB)^2 .$$

Deve pertanto osservarsi che così la costruzione come la dimostrazione, quali sono offerte realmente da Cardano, non vanno esenti da incertezze e da difetti, vagando egli fra i casi:

$$q = \frac{4}{27}\, n^3 \qquad\qquad q < \frac{4}{27}\, n^3 .$$

Inoltre è degna di nota sotto il punto di vista storico la dichiarazione ch'egli fa di aver preso il modo di verificare geometricamente l'equazione:

$$AO \,.\, (OB)^2 = AC\,(EB)^2$$

da quanto ne scrisse Eutocio di Ascalona nel suo commento al libro II di Archimede sulla sfera e sul cilindro: per la qual cosa

Digitized by Google

il merito di Cardano si restringe all'aver ricondotta a tale equazione la ricerca geometrica della radice della equazione:

$$x^3 + q = nx^2 \qquad \text{per} \qquad q < \frac{4}{27} n^3$$

nel qual caso la risoluzione algebrica presenta x sotto aspetto immaginario, fino al caso di $q = \frac{4}{27} n^3$, nel quale il maggior valore di x è $\frac{2}{3} n$.

Analizziamo più a fondo colla scorta del Cossali una tale soluzione onde metterne lo spirito in maggiore evidenza. Essa consiste essenzialmente in ciò che data all'equazione $x^3 + q = nx^2$ la disposizione $q = (n - x) x^2$, si faccia $x^2 = \frac{4}{9} ny$ che è l'equazione d'una parabola avente per parametro $\frac{4}{9} n$ e d'onde subito si ha l'altra:

$$q = \frac{4}{9} ny (n - x)$$

nella quale ponendo $n - x = z$, si ha:

$$\frac{9q}{4n} = yz .$$

equazione d'una iperbole fra gli assintoti, il cui rettangolo costante è $\frac{9q}{4n}$. Nella fig. 44, essendo HC, CF gli assintoti dell'iperbole BTK, il secondo CF è parimenti tangente alla parabola nel vertice F ed è sopra di esso che devono prendersi a partire dal punto di contatto F le ascisse x della parabola FTM e partendo dal vertice C dell'angolo assintotico le ascisse z dell'iperbole BTK: così, essendo FP una delle ascisse x della parabola,

$$CF - FP = n - x = z$$

Digitized by Google

è la corrispondente ascissa dell'iperbole e l'ordinata PT essendo comune ad ambedue le curve, mostra essere x radice della equazione $x^3 + q = nx^2$, perchè nelle due equazioni:

$$x^2 = \frac{4}{9} ny \qquad \frac{9q}{4n} = y(n - x)$$

supposto y lo stesso, si ha:

$$\frac{9x^2}{4n} = \frac{9q}{4n(n - x)}$$

d'onde:

$$(n - x)x^2 = q \qquad \text{cioè} \qquad nx^2 = q + x^3$$

Che l'iperbole descritta da Cardano sia quella rappresentata dall'equazione $zy = \frac{9q}{4n}$ si dimostra facilmente.

Infatti:

$$AC = \frac{(DQ)^2 \cdot DZ}{(EB)^3} = \frac{q}{(EB)^3} = \frac{9q}{4n^2}$$

ricordando che $EB = \frac{2}{3} n$: segue che il rettangolo assintotico $ACFB$ è:

$$\frac{9q}{4n^2} \cdot n = \frac{9q}{4n}.$$

Per la somiglianza dei triangoli CLE, CFG si ha:

$$CL : LE = CF : FG$$

ovvero, essendo $LE = AC$, $CF = AB$:

$$CL : AC = AB : FG$$

da cui: $$CL \cdot FG = AC \cdot AB$$

Digitized by Google

ed essendo $LK = FG$:

$$CL \,.\, LK = AC \,.\, AB = \frac{9q}{4n}$$

da cui risulta: 1.° che l'iperbole, la quale passa per B ed ha per assintoti FC, CH, passa necessariamente per il punto K; 2.° che come $CL \,.\, LK$ così il rettangolo formato da qualsivoglia altra ascissa z nella corrispondente ordinata y è $\frac{9q}{4n}$, od in altri termini che l'iperbole BTK è rappresentata dall'equazione:

$$yz = \frac{9q}{4n}.$$

Cardano non determina nella sua costruzione che un punto d'intersezione delle due curve e per esso una radice dell'equazione:

$$x^3 + q = nx^2$$

e ciò quantunque egli consideri i casi:

$$q < \frac{4}{27} n^3 \quad ; \quad q = \frac{4}{27} n^3$$

in ambedue i quali l'equazione ha tre radici reali, colla sola differenza di essere nel primo tutte e tre disuguali, nel secondo due uguali: ma la costruzione è da lui portata a tal punto che non riesce difficile il completarla.

La costruzione geometrica dell'equazione:

$$x^3 - nx^2 + q = o$$

comprende la costruzione dell'altra:

$$x^3 - px - q = o$$

la quale se non fu dal Cardano eseguita, non può dirsi non sia stata da lui più o meno direttamente contemplata nella soluzione

Digitized by Google

di quel problema contenuto nel medesimo libro *De Aliza regula* nel quale egli si propone di dividere una retta in due parti tali che la differenza dei mutui parallelopipedi, cioè dei prodotti del quadrato dell'una nell'altra, sia uguale ad un dato numero, problema, che, come ben si scorge, conduce alla equazione testè accennata.

Quanto al posto che queste costruzioni vengono ad occupare nella storia delle matematiche, è evidente, che dopo quanto ebbimo occasione di riferire relativamente agli arabi, le idee espresse dal Cossali (1) devono subire una profonda trasformazione. È certo ad ogni modo che nel valutare i meriti relativi al Cardano, non potrà a meno dal tenersi conto della circostanza che egli di quelle costruzioni dovute agli arabi matematici non ebbe in alcun tempo conoscenza veruna.

Scolaro del Tartaglia, Giovanni Battista Benedetti aveva appreso da tanto maestro a far costantemente uso dell'algebra in geometria e della geometria in algebra. Le di lui *Speculazioni matematiche e fisiche* (2) ed in particolare i *Theoremata arithmetica*

---

(1) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra. Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita* di D. PIETRO COSSALI. Vol. II, Parma, 1797, pag. 435.

(2) Jo. BAPTISTAE BENEDICTI Patritij Veneti Philosophi *Diversarum Speculationum Mathematicarum, et Physicarum Liber.* Taurini, MDLXXXV. — Il RICCARDI (*Biblioteca Matematica Italiana.* Vol. I. Modena, MDCCCLXX, col. 111) menziona una edizione del MDLXXX, esprimendo l'avviso che il trovarne citata una del MDLXXXV dipenda da errore: quella però che noi abbiamo sott'occhio è realmente del MDLXXXV, e nel nome dello stampatore presenta una leggera variante in confronto di quella citata dal RICCARDI leggendosi: *Apud Haeredem Nicolai Beuilaquae,* in luogo di *Apud haeredes Nicolai Beuilaquae.* — L'elenco dei trattati contenuti in questo volume si legge nel *verso* della prima carta, così specificato:

Tractatus qui in hoc volumine continentur.
Theoremata Arithmetica.
De rationibus operationum perspectiuae.
De Mechanicis.
Disputationes de quibusdam placitis Arist.
In quintum Euclidis librum.
Physica, et Mathematica responsa per Epistolas.

Digitized by Google

contengono materiali assai interessanti per lo scopo delle nostre ricerche. In realtà infatti, nel corso di tutta l'opera ed in particolare in questa prima parte il Benedetti fa uso continuamente di considerazioni geometriche per dimostrare o verificare le regole dell'aritmetica e dell'algebra. Senza addentrarci in un esame soverchiamente particolareggiato, il quale ci condurrebbe troppo per le lunghe, ci limiteremo ad addurre qualche saggio del metodo seguìto dal nostro geometra, metodo che attrasse già l'attenzione dello Chasles (1) e del Libri (2). Ecco pertanto l'enunciato del teorema CXX: (3) *Supponunt etiam antiqui tres socios nummos habere, quorum summa primi et secundi cognita sit, item summa primi et tertij cognita et summa secundi et tertij item cognita, atque ex huiusmodi tribus aggregatis veniunt in cognitionem particularem uniuscuiusque illorum.* Dopo aver accennato che Gemma Frisio risolse il problema, ricorrendo alla *regula falsi*, intavola la questione a tre incognite, che può esprimersi mediante le equazioni:

$$x + y = a \quad ; \quad y + z = b \quad ; \quad z + x = c.$$

Egli risolve la questione algebricamente, indi per verificare l'esattezza delle trovate espressioni, si serve della seguente considerazione geometrica: Si costruisca un triangolo che abbia per lati i tre numeri a, b, c e gli si inscriva un cerchio tangente ai suoi tre lati: i segmenti che i punti di contatto formano su questi lati saranno i valori delle tre incognite x, y, z, da cui si ritrae che i valori di queste incognite sono:

$$x = \frac{a - b + c}{2} \quad ; \quad y = \frac{b - c + a}{2} \quad ; \quad z = \frac{c - a + b}{2}$$

---

(1) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie,* ecc. par M. CHASLES. Bruxelles, 1837, pag. 490-491.

(2) *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* ecc. par GUILLAUME LIBRI. Tome Troisième. Halle, 1865, pag. 261-264.

(3) Jo. BAPTISTAE BENEDICTI, ecc. *Diversarum Speculationum Mathematicarum et Physicarum Liber.* Taurini, MDLXXXV, pag. 81-82.

Digitized by Google

come si otteneva mediante il calcolo. Nel teorema successivo la questione è estesa al caso il più generale.

In appendice ai *Theoremata arithmetica* espone Benedetti una *Appendix de speculatione regulae falsi* (1) geometricamente svolta che presenta essa pure un non lieve interesse.

Ma la questione sulla quale di preferenza fisseremo la nostra attenzione è contenuta in una lettera a Franchino Trivulzio, perciocchè in essa trovasi costruita la radice positiva dell'equazione $x^3 + a\,x = b^2$.

La questione intitolata *De producto conditionato* è così formulata: *Proponis deinde mihi duas rectas lineas, uni quarum, vis ut aliam quandam directe coniungam, ita quod productum huius aggregati in lineam adiunctam aequale sit quadrato alterius* (2). Ecco la costruzione, quale la insegna Benedetti, e che noi riproduciamo testualmente riferendoci alla fig. 45. » Ut exempli gratia si fuerint duae lineae. e. d. & e. f. oporteretq̀; nos ad lineam. e. f. aliam lineam puta. f. c. vel. e. b. iūgere, ita longam, ut productum totius compositi. e. c. vel. f. b. in f. c. vel. e. b. esset aequale quadrato ipsius. e. d. Hoc enim nullius esset difficultatis, eo quod quotiescūque. e. d. coniuncta erit cum. e. f. ad rectos, diuisaq̀; per medium à puncto. a. à quo ducta. a. d. deinde secundum semidiametrum. a. d. designato circulo. b. d. c. & protracta. e. f. à qua volueris parte vsque ad circumferentiam in pūcto. c. seu in puncto. b. habebimus intentum, eò quod si producta fuerit. e. f. etiam ab alia parte, vsque ad circumferentiam, habebimus. b. e. aequalem ipsi f. c. ex communi conceptu, & productum. e. c. in. e. b. aequalem quadrato ipsius. e. d. ex. 34 tertij, cum ex. 3. eiusdem. e. d. medietas sit chordae arcus dupli b. d. »

---

(1) Jo. Baptistae Benedicti, ecc. *Diversarum Speculationum Mathematicarum et Physicarum Liber*. Taurini, MDLXXXV, pag. 103-118.

(2) Jo. Baptistae Benedicti, ecc. *Diversarum Speculationum Mathematicarum et Physicarum Liber*. Taurini, MDLXXXV, pag. 368.

Digitized by Google

L'intimo nesso fra l'algebra e la geometria non si rivela soltanto nelle poche opere che noi abbiamo avuto occasione di esaminare nella rapida nostra rassegna: esso costituisce, per così dire, la nota prevalente degli studi geometrici nel corso del secolo decimosesto ed ebbe per naturale conseguenza di far sì che riuscissero improntati di certe caratteristiche che nettamente li contraddistinguono. E ciò tanto più per essere l'algebra di quel tempo non altro che una aritmetica superiore, esclusivamente numerica, la quale non differiva dalla ordinaria se non per l'uso della regola dei segni e del meccanismo delle equazioni.

Di questo nesso ci sembra porgere un bellissimo saggio il Bombelli nel libro secondo (1) della sua algebra, colle seguenti parole di introduzione, che quì a mo' di conclusione vogliamo riprodurre: » A benchè questa scientia sia Aritmetica (come la chiamano Diofanto Autore Greco e li Indiani) però non resta, che il tutto non si puossi prouare per figure Geometriche (come fa Euclide nel secondo, sesto, decimo). Però volendo che il Lettore resti in tutto sodisfatto: mi sono risoluto porre tutte le dimostrazioni dello agguagliare, cioè Capitolo per Capitolo tanto in linea senza numero, quanto in linea composto di numero, e questa parte non è men bella, che dilettevole. »

Sulla relativa originalità delle cose che noi siamo venuti esponendo assai malagevole è il giudizio. Imperocchè la difficoltà delle comunicazioni fino all'epoca alla quale siamo pervenuti era tale che i più valenti ed eruditi geometri bene spesso ignoravano completamente buona parte di ciò che nell'ordine stesso dei loro studi era stato fatto dai loro predecessori. Di tal fatto ci porge un esempio luminoso Keplero, il quale, non ostante le ricche risorse delle quali si disponeva ai suoi tempi nell'arte di esprimere graficamente le formule e di presentarne agli occhi il significato,

---

(1) *L'algebra parte maggiore dell'aritmetica* divisa in tre libri di RAFAEL BOMBELLI. In Bologna. MDLXXII, pag. 241.

Digitized by Google

non riuscendo a tradurre graficamente la proprietà che rappresenta l'equazione del secondo grado, la quale somministra il rapporto del lato del pentagono regolare al raggio del cerchio circoscritto, così si espresse: (1) » Quomodo affectionem repraesentabo? Nullo alio id doceor facere, quam usurpando proportionem, quam quaero: principium petitur. Miser calculator, destitutus omnibus geometriae praesidiis, haerens inter spineta numerorum, frustra cossam suam respectat. Hoc unum est discrimen inter cossicas et inter geometricas determinationes. »

Guglielmo Libri, nell'opera insigne, alla quale ha legato il suo nome, lasciò scritto (2) che nel periodo fra Fibonacci e Galileo gli Italiani procedettero da soli nella via del progresso scientifico. Così debole in questo lasso di tempo apparisce infatti il concorso recato dagli stranieri all'avanzamento delle scienze che la storia di esse in Italia abbraccia ad un tempo le fasi più salienti dello sviluppo ricevuto per opera degli studiosi di tutto il mondo civile. Come altre volte la storia politica del mondo si riassunse in quella di Roma, così più tardi, per oltre due secoli, l'Italia fu sola, od almeno si mantenne alla testa d'ogni avanzamento scientifico.

Quanto il Libri scrisse riguardo alla storia delle matematiche in generale, è pure applicabile allo sviluppo storico del ristretto argomento che abbiamo impreso ad esporre.

Non è tuttavia a credersi che sia un periodo di decadenza quello che s'inaugura per l'Italia col nome di Galileo, come forse il fatto testè accennato indurrebbe a ritenere: discepoli d'ogni parte dell'Europa convenivano in Italia ad ascoltarvi quei grandi Maestri, che la munificenza dei varii governi andava accaparrando

---

(1) JOANNIS KEPLERI *Harmonices Mundi* libri V. Lincii Austriae, M.DC.XIX, pag. 37.

(2) *Histoire des sciences mathématiques en Italie,* ecc. par GUILLAUME LIBRI. Tome Quatrième. Deuxième édition. Halle, 1865, pag. 1.

Digitized by Google

con gran cura per le Università, le quali nei secoli decimoquinto e decimosesto avevano raggiunto l'apice dello splendore. Onde la perdita d'un privilegio, che conciliò in ogni tempo così grandi simpatie al nostro paese, anzichè tornarne a disdoro, mette in maggior luce il modo luminoso nel quale seppe adempiere alla sua missione scientifica, e la liberalità colla quale si insegnava dalla cattedra a chiunque, le prerogative anzi accordate ben sovente nei nostri centri di studi agli stranieri, e particolarmente ai tedeschi, ebbero per naturale conseguenza quella diffusione di coltura che prima o poi doveva necessariamente far contribuire al progresso scientifico tutto il mondo civile.

Digitized by Google

APPENDICE

Coll' esposizione delle *Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni* mi arresto a Vieta, che inaugura nel lavoro magistrale di Chasles la seconda epoca nella storia della Geometria e che nello sviluppo storico dell'argomento che ho impreso a trattare segna un'epoca forse ancor più distinta.

Era dapprima mia intenzione spingere il presente lavoro fino ai nostri giorni: mi pareva infatti che, atteso il favore veramente straordinario in che sono venuti in questi ultimi tempi i metodi costruttivi, non fosse senza qualche interesse il raccogliere sotto la forma modesta di inventario storico-critico quanto finora erasi elaborato a questo proposito, anche per evitare, come troppo sovente accade oggidì perfino a coloro che vanno per la maggiore, di ripetere più o meno scientemente quanto venne già fatto precedentemente e talvolta anche meglio che non si faccia oggidì. Senonchè preoccupazioni diverse ed altri più urgenti lavori vietandomi per ora di dedicare allo sviluppo ulteriore dell'argomento il moltissimo tempo che richiederebbe, mi veggo costretto con mio sommo rammarico a troncare lo scritto, od almeno a lasciarlo sospeso colla ferma speranza di poterlo tuttavia compiere in un'epoca non molto lontana.

Infrattanto, onde raggiungere quel più ampio scopo, che m'ero da principio prefissato, avevo avuto cura di cominciare già a raccogliere quel materiale che con frase consacrata dall'uso i tedeschi chiamano con » *Literatur der Frage* » e che era neces-

Digitized by Google

sario a proseguire il lavoro fino ai giorni nostri. Questa parte di materiale, che finora ero riuscito a raccogliere, non rincrescerà di trovare qui sotto forma di appendice: ed a tale aggiunta mi sono indotto nella lusinga che delle indicazioni da me fornite possa giovarsi qualche altro, il quale trovi l'argomento abbastanza interessante da meritare di spendervi le proprie fatiche, od almeno possa servire a quei benevoli fra i miei Colleghi di studio, che vi getteranno gli occhi, per segnalarmi le moltissime lacune e facilitarmi così il compimento del lavoro, quando potrò di nuovo ad esso rivolgermi.

Avverto poi espressamente che nei seguenti materiali ho escluso di deliberata intenzione quanto si riferisce alla costruzione delle equazioni differenziali da un lato ed al problema della duplicazione del cubo dall'altro: per la bibliografia relativa a quest'ultima questione mi limito a rinviare all'opera del Reimer: *Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas.* Gottingae, MDCCXCVIII, a quella del Biering: *Historia problematis cubi duplicandi.* Hauniae, 1844, alla *Notice historique sur la duplication du cube* nel *Bulletin de Bibliographie, d' Histoire et de Biographie mathématiques* annesso ai *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Tome Quinzième. Paris, 1856 ed a quanto ne scrisse il Blass nell'opuscolo *De Platone mathematico.* Bonn, 1861, pag. 23 e seg. Naturalmente poi delle opere relative a questi argomenti ho compreso fra i materiali costituenti la presente appendice quelle che potevano offrire un diretto interesse per lo scopo preciso del mio lavoro. Ho invece creduto opportuno di comprendervi quanto finora mi riuscì di trovare relativamente alla risoluzione trigonometrica ed alla risoluzione meccanica delle equazioni.

Avverto infine che nella disposizione dei seguenti materiali ho serbato l'ordine cronologico della pubblicazione, meno quei casi nei quali questo fosse in notoria ed evidente opposizione coll'ordine cronologico della produzione, che in lavori d'indole storica non deve essere trascurato. I brevi schiarimenti aggiunti

Digitized by Google

si propongono di porgere una idea sommaria del contenuto dei singoli lavori, particolarmente nel caso in cui il titolo dello scritto non lo dichiari abbastanza esplicitamente: tutte le volte che mi fu possibile pertanto, ai miei apprezzamenti ho sostituito o quelli dell'autore istesso o quelli di altri scrittori autorevoli che in qualche occasione avevano esternato eventualmente il loro parere intorno al valore od al contenuto degli scritti citati.

I. *Arithmetica integra* authore MICHAELE STIFELIO. Cum praefatione PHILIPPI MELANCHTONIS. Norimbergae. M.D.XLIIII.

Degnissimi d'attenzione per lo scopo nostro sono gli espedienti di grafica rappresentazione dei quali l'Autore si serve lungo l'opera e notevole pure è il passo seguente che si legge a car. 230: « *Itaque ab aequationum inventione mihi denuo incipiendum erit. In qua re animadvertendum est, ut Algebra sit calculatio per lineas et superficies, atque corpora progredientium sub proportionalitate geometrica continua* ». Per avere un saggio del modo di risoluzione geometrica adottato da STIFEL, veggasi l'esempio a car. 242-243. È ancora notevole come per questa via egli sia giunto a trovare che « *Sunt autem aequationes quaedam, quibus natura rerum hujus modi, dedit habere duplicem radicem, videlicet majorem et minorem* » la qual cosa egli sviluppa e dimostra.

II. *Effectionum geometricarum canonica recensio.* Senza nome d'autore nè indicazione tipografica: si sa tuttavia che fu stampata a Tours nel 1593: trovasi poi ristampata a pag. 229-239 del volume intitolato: FRANCISCI VIETAE *Opera Mathematica in unum volumen congesta ac recognita* opera atque studio FRANCISCI A SCHOOTEN. Lugduni Batavorum, CIↃ IↃCXLVI.

Costruzione delle equazioni del primo e secondo grado.

III. FRANCISCI VIETAE Fontenaeensis, *De aequationum recognitione et emendatione* troctatus duo, quibus nihil in hoc genere simile aut secundum, huic aevo hactenus visum. Parisiis.

Digitized by Google

CIↃ IↃCXV. Ristampato a pag. 82-161 del volume intitolato: FRANCISCI VIETAE *Opera Mathematica in unum volumen congesta ac recognita* opera atque studio FRANCISCI A SCHOOTEN. Lugduni Batavorum, CIↃ IↃCXLVI.

Veggasi anche il *Theorema systaticum aequalitatum quarundam cubicarum adfectarum, in quibus Potestati homogenea est sub latere* di ALESSANDRO ANDERSON che si trova alla fine del detto trattato sotto forma di appendice.

IV. FRANCISCI VIETAE *Opera Mathematica in unum volumen congesta ac recognita,* opera atque studio FRANCISCI A SCHOOTEN. Lugduni Batavorum. CIↃ IↃCXLVI.

Abbiamo già ricordato due trattati (II, III) dello stesso Autore, compresi in questo volume: per amore di brevità, registriamo qui il volume istesso, essendo del resto notissimo quanti ed importantissimi materiali esso contenga per lo sviluppo storico del nostro argomento, ed in particolare per quanto si riferisce alla costruzione delle equazioni di terzo grado nei rapporti colla trisezione dell' angolo.

V. MARINI GHETALDI patritii ragusini mathematici praestantissimi *De resolutione, et compositione mathematica* libri quinque. Opus posthumum. Romae, M.DC.XXX.

Si contengono in quest'opera molte e svariate costruzioni di problemi che conducono ad equazioni del primo e del secondo grado.

VI. ALEXANDRI ANDERSONI. *Exercitationum mathematicarum decas prima*, ecc. Parisiis, 1619.

Costruzione del problema di condurre una normale alla parabola per un punto preso fuori di essa. Dimostrazione per via di considerazioni geometriche delle formule di DIOFANTO sull' analisi indeterminata.

VII. A. GIRARD. *Invention nouvelle en l' Algebre, tant pour la solution des équations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu' elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science.* A Amsterdam MDCXXIX.

Fra le altre cose chiarisce il significato delle radici negative in geometria, esponendo che rappresentano linee, la cui direzione è opposta a quella delle radici positive.

Digitized by Google

VIII. *Geometria à* RENATO DES CARTES anno 1637 Gallice edita; postea autem una cum notis FLORIMONDI DE BEAUNE, ecc. opera atque studio FRANCISCI A SCHOOTEN. Amstelodami, MDCLXXXIII.

Registro questa edizione non essendo riuscito a procurarmi quella originale. Crediamo assolutamente superfluo aggiungere illustrazioni sul contenuto di quest'opera che tutta e in sommo grado interessa lo sviluppo storico del nostro argomento. Diremo soltanto che al principio del 1.° libro vi si trova la costruzione delle equazioni quadratiche e nel terzo quella delle cubiche e delle biquadratiche, nonchè un metodo generale per costruire tutte le equazioni, che non superano la 6.ª dimensione, con una linea del secondo genere ed un cerchio: vi avverte poi l'Autore essere impossibile costruire delle equazioni più composte colle medesime linee e che a proporzione che i gradi delle incognite dell'equazione proposta aumentano, dando ad ogni grado due dimensioni, si richiedono curve di genere più composto col cerchio od altra linea del primo.

IX. *Supplementum cursus mathematici, continens geometricas aequationum cubicarum purarum, atque affectarum Effectiones. Le Supplement du Cours Mathematique, contenant les effections géométriques des équations cubiques, pures et effectées. L'Isagoge de l'Algebre. La méthode de mettre en perspective toutes sortes d'objects par le moyen du Compas de proportion. La Théorie des Planetes, distinguée selon les hypotheses de la terre immobile et mobile. L'introduction en la Chronologie avec une Table des choses les plus notables par ordre alphabetique: Et un Catalogue des meilleurs Autheurs des Mathématiques.* Par PIERRE HERIGONE. A Paris, M.DC.XLII.

X. *Nova Geometriae clavis Algebra. Cujus beneficio aperitur immensus Matheseos thesaurus, et resolvuntur problemata hactenus non soluta in serie multarum quantitatum continue proportionalium. Simulque traditur methodus universalis quilibet Marte proprio invenire poterit innumera alia ejusmodi.* Authore JACOBO DE BILLY. Parisiis. M.DC.XLIII.

XI. FLORIMONDI DE BEAUNE, *De aequationum constructione et limitibus.* Edidit ERASMUS BARTHOLINUS.

Digitized by Google

Togliamo questa indicazione dal *Biographisch - Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, ecc. von J. C. POGGENDORFF: a giudicare dal titolo dell' opera non esitammo a registrarla fra questi materiali, ma dichiariamo in pari tempo che non abbiamo finora potuto procurarcela.

XII. FLORIMONDI DE BEAUNE *in Geometriam Renati des Cartes notae breves.* Stampato a pag. 107-142 del volume intitolato: RENATI DES CARTES *Geometria*, ecc. Francofurti ad Moenum, M DC XCV.

XIII. *De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros incuria temporum amissos Aristaei senioris geometrae* autore VINCENTIO VIVIANI. Florentiae, 1701.

XIV. FRANCISCI A SCHOOTEN *additamentum, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis, et generalis regula de extrahendis quibuscumque radicibus binomiis.* Stampato a pag. 369-400 del volume intitolato: RENATI DES CARTES *Geometria*, ecc. Francofurti ad Moenum, M DC XCV.

XV. FRANCISCI A SCHOOTEN *Exercitationum Mathematicarum Liber V continens sectiones triginta miscellanea.* Lugduni Batavorum, CIↃ IↃCLVII.

Veggansi in particolare le sezioni XXII, XXIII, XXIV.

XVI. JOHANNIS DE WITT *Elementa curvarum linearum.* Edita opera FRANCISCI A SCHOOTEN. Francofurti ad Moenum. CIↃ IↃCXCV.

Questa medesima opera venne stampata per la prima volta a Leida nel 1658 e di essa scrisse il DU GUA: « *In elementis linearum curvarum geometriae Cartesii annexis, aequationes suas locales ut libet compositas, ad aequationes primitivas sectionum conicarum reducere docuit. Hoc modo viam ad constructiones facile sternere conatus est.* »

XVII. FRANCISCI A SCHOOTEN *Appendix de cubicarum aequationum resolutione.* Stampata a pag. 345-368 del volume intitolato: RENATI DES CARTES *Geometria*, ecc. Francofurti ad Moenum. M DC XCV.

Digitized by Google

XVIII. FRANCISCI A SCHOOTEN *in Geometriam Renati des Cartes Commentarii.* Stampati a pag. 143-344 del volume intitolato: RENATI DES CARTES *Geometria*, ecc. Francofurti ad Moenum. M DC XCV.

XIX. FRANCISCI A SCHOOTEN *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebrico.* Francofurti, CIↃ IↃCXCV.

Quest' opera è stampata in un volume intitolato: RENATI DES CARTES *Principia Matheseos Universalis seu introductio ad Geometriae methodum conscripta ab* ER. BARTHOLINO. Francofurti ad Moenum, MDCXCV. pag. 341 - 420. Veggansi poi anche nel medesimo volume le *Notae et animadversiones tumultuariae in universum opus*, delle quali non poche interessano l'argomento nostro.

XX. *Geometria applicationum deficentium figura data specie.* Auctore PETRO PAULO CARAVAGGIO. Mediolani, M. DC. LIX.

XXI. *Diophantus geometra sive opus contextum ex arithmetica et geometria simul; in quo quaestiones omnes Diophanti, quae geometrice solvi possunt, enodantur tum algebricis, tum geometricis rationibus. Adjectus est Diophantus geometra promotus, in quo subtiles propositiones non absimili methodo pertractantur et via nova ad ejusmodi praxes invenienda aperitur.* Authore P. JACOBO DE BILLY. Parisiis, M. DC. LX.

A quest' opera ci siamo già richiamati nella prima parte del presente lavoro, però in uno sviluppo storico essa deve occupare il posto che cronologicamente le compete.

XXII. *Varia opera mathematica* D. PETRI DE FERMAT, senatoris Tolosani: *Accesserunt selectae quaedam ejusdem Epistolae, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallice, Latine vel Italice, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptae*, Tolosae, M. DC. LXXIX.

Veggasi in particolare il capitolo: *Appendix ad isagogem topicum continens solutionem problematum solidorum per locos* e l' altro *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas, et unicuique problematum generi proprie convenientes*, pag. 110 e seg. dove fra le altre cose l' autore

Digitized by Google

dimostra l' errore commesso da DESCARTES intorno alla relazione che doveva passare fra il grado della equazione proposta e quello delle curve richieste per costruirla, provando bastare che il prodotto degli esponenti delle equazioni delle curve uguagli quello dell' equazione da costruire.

XXIII. RENATI FRANCISCI SLUSII *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas, vel ellipses et per quamlibet exhibitae, ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas. Accessit pars altera de analysi et miscellanea.* Leodii Eburonum, CIↃ IↃCLXVIII.

Una prima edizione è del 1659 e manca della *pars altera*. Ecco cosa ne dice il MONTUCLA (*Histoire des Mathématiques*. Nouvelle Édition. Tome second A. Paris. An VII, pag. 159): « La méthode de M. de Sluse consiste à prendre une équation entre l' inconnue de celle qu' il s' agit de construire, et une nouvelle indéterminée, qui soit un lieu du second dégré: par exemple, une parabole. Ensuite il introduit par des substitutions cette indéterminée dans l' équation à construire, ce qui de determinée qu' elle étoit la rend indéterminée, c' est-à-dire exprimant un autre lieu. Il continue ces substitutions en divisant, additionant ou soustrayant les équations qui en proviennent, jusqu' à ce qu' il soit arrivé à un lieu au cercle; ce qui est facile. Cela fait, ce dernier lieu combiné de la manière convenable avec chacun des autres, qui sont à la parabole, à l' ellipse, à l' hyperbole, lui donne autant de constructions différentes du problême. »

XXIV. M. DE ROBERVAL. *De Geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione.* Nei » *Mémoires de l' Académie Royale des Sciences* depuis 1666 jusqu' à 1699. Tome VI. Paris, MDCCXXX, pag. 135-246.

XXV. M. DE ROBERVAL. *De recognitione aequationum.* Nei » *Mémoires de l' Académie Royale des Sciences* depuis 1666, jusqu' à 1699. Tome VI. Paris, MDCCXXX, pag. 94-135.

XXVI. *Nouveaux elemens des sections coniques, les lieux géométriques, la construction ou effection des equations* par M. De LA HIRE. A Paris, M. DCCI.

Premessa una critica del metodo di DESCARTES, porge una assai lucida esposizione di quello da lui proposto che applica poscia alle equazioni quadratiche,

Digitized by Google

cubiche, biquadratiche e finalmente alla « Construction des equations sans aucune reduction, et de quelle nature qu' elles soient. » Infine veggasi ancora la costruzione del seguente problema: « Un point estant donné dedans ou dehors une section conique et sur un mesme plan; il faut mener une ligne perpendiculaire à la section, c' est à dire une ligne qui fasse un angle droit avec la touchante par le point de rencontre de la ligne menée et de la section, en ne se servant que du cercle et de la section conique donnée. » Questo stesso problema era già stato risolto da ANDERSON (VI), SLUZE (XXIII) e HUYGHENS (XXVII).

XXVII. CRISTIANI HUGENII A ZULICHEM, ecc. *Opera Varia.* Volumen Secundum. Lugduni Batavorum. MDCCXXIV.

Veggansi in particolare i *Geometrica Varia.*

XXVIII. *The geometrical key, or Construction of all Equations Linear, Quadratic, Cubic and Biquadratic, by a Circle and one only Parabola* by Mr. THO. BAKER. London, 1684.

L' Autore ebbe particolarmente in mira di costruire le equazioni senza che sia necessario di eliminare il secondo termine come è richiesto dalla applicazione dei metodi di DESCARTES e di LA HIRE. La proprietà fondamentale sulla quale egli s'appoggia è la seguente: « if a line be inscrib'd in a Parabola perpendicular to any Diameter, a Rectangle made of the inscript, will be equal to a rectangle made of the intercepted Diameter and Parameter of the Axis. » Una recensione di questo lavoro si legge nei *Philosophical Transactions* del 1683, pag. 549-550.

XXIX. *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Auctore ISAACO NEWTONO Equite aurato. Editio ultima cui accedit *Analysis per Quantitatum series, fluxiones ac differentias cum enumeratione linearum tertii ordinis.* Amstaelodami. M . D . CC . XXII.

Citiamo fra i nostri materiali anche quest'opera, giacchè in essa l'Autore dimostra frequentemente come si trasformino dimostrazioni e soluzioni analitiche in costruzioni geometriche.

XXX. *On the Numbers and Limits of the Roots of Cubic and Biquadratic Equations.* By Mr. E. HALLEY. Nei » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, from their commencement in* 1665, *to the year* 1800; *Abridged, with notes and*

Digitized by Google

biographical illustrations by CHARLES HUTTON, GEORGE SHAW, RICHARD PEARSON. Vol. III. from 1683 to 1694. London, 1809 » pag. 395-407.

In questa edizione la memoria è tradotta dal latino in inglese: trovasi però riprodotta nella sua integrità. Ci riferiamo all'edizione *abridged* non avendoci potuto procurare l'originale.

XXXI. *On the construction of solid problems, or of Equations of the third and fourth degree, by means of only one given parabola and a circle.* By Mr. EDMUND HALLEY. Nei » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, from their commencement in* 1665, *to the year* 1800; *Abridged, with notes and biographical illustrations* by CHARLES HUTTON, GEORGE SHAW, RICHARD PEARSON. Vol. III. from 1683 to 1694. London. 1809 » pag. 376-381.

Illustrazione dei metodi di VAN SCHOOTEN (XIV, XV, XVII, XVIII, XIX) e di BAKER (XXVIII).

XXII. *Traité de la construction des equations pour la solution des Problemes indeterminez* pour M. OZANAM. A Paris, M. DC. LXXXVII.

Sembra che nel titolo sia un errore di stampa, giacchè l'uso dei luoghi geometrici nella risoluzione dei problemi indeterminati è insegnato in altro trattato del medesimo Autore, annesso a questo ed intitolato: *Traité des lignes du premier ordre expliquées par une méthode nouvelle et facile* par M. OZANAM. A Paris, M. DC. LXXXVII. In questo pertanto si tratta dei problemi determinati ed è direttamente legato con un terzo trattato intitolato: *Traité des lieux géometriques expliquez pur une méthode courte et facile* par M. OZANAM. A Paris, M. DC. LXXXVII. Tutti e tre questi trattati furono pubblicati contemporaneamente e sono compresi nel medesimo volume.

XXXIII. *Vera Constructio geometrica problematum solidorum et hypersolidorum, per rectas lineas et circulos.* Auctore J. B. Negli » *Acta Eruditorum Anno* M DC LXXXIX publicata. » Lipsiae. M DC LXXXIX, pag. 454-459.

Digitized by Google

GIACOMO I BERNOULLI autore della presente nota ne espone il soggetto nei termini seguenti: « in genere circa omnia solida multaque etiam hypersolida Problemata aggredior, et quod circini normaeque ope una aliqua constructione accurate consequi hactenus non licuit, hoc per seriem, ut sic dicam, constructionis certa lege in infinitum continuo magis magisque appropinquetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fiat, totaque adeo costructionis series exactum ejus valorem exprimere debeat. »

XXXIV. *Méthodes nouvelles et abrégées pour l' extraction et l' approximation des racines et pour resoudre par le cercle et la ligne droite plusieurs problémes solides et supersolides etc.* par M. DE LAGNY. Seconde édition. A Paris, 1692.

XXXV. *De figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis.* Authore JOANNES CRAIGE. Londini. MDCXCIII.

Di questo trattato scrive l'HERMANN (*Comm. Acad. Scient. Imp. Petrop.* T. IV, Ad A. CIↃ IↃCCXXIX, pag. 17): « Non enim ex aequatione construenda, positionem et magnitudinem diametri ejusque parametri eruere suscepit, sed per comparationem singularum terminorum aequationis construendae, cum totidem terminis homologis aequationis generalis illius sectionis conicae, quae ad rem facit, omnia ea elicit, quae ad loci quaesiti constructionem requiruntur. Dedit ideo pro singulis sectionibus conicis aequationes generales, ad quas deinceps omnem aequationem localem exigere et constructionem inde derivare posset. »

XXXVI. *Analysis aequationum universalis, seu ad aequationes algebricas resolvendas methodus generalis, et expedita, ex nova infinitarum serierum methodo, deducta ac demonstrata.* Editio secunda cui accessit *Appendix de infinito infinitarum serierum progressu ad Equationum algebraicarum radices eliciendas.* Cui etiam annexus est *de spatio reali, seu infinito conamen Mathematico-Metaphysicum.* Authore JOSEPH RAPHSON. Londini, 1702.

XXXVII. HYACINTHI CRISTOPHORI. *De Constructione aequationum libellus.* Neapoli, M. DCC.

Esposizione assai particolareggiata dei metodi di DESCARTES e di FERMAT con osservazioni originali. Veggasi anche l'*Additamentum ad explicatas constructiones* che si trova alla fine dell'opuscolo.

Digitized by Google

XXXVIII. Joh. Cristophori Sturmii P. P. *Mathesis Enucleata, cujus praecipua contenta sub finem Praefationis, uno quasi obtutu spectanda exibentur.* Norimbergae. MDCCXI.

Veggasi in particolare la sezione intitolata « *In analisin speciosam sive geometriam novam introductio ad Cartesii praecipue methodum, sed ex recentioribus inventis multum facilitatam, accomodata* studio et opera Joh. Cristophori Sturmii, la quale occupa le pagine 334-473, nonchè la successiva « *Appendix* ». Se noi non ci illudiamo, uno studio di questa importantissima sezione apprenderebbe qualche cosa di nuovo anche agli studiosi dei nostri giorni.

XXXIX. *Problema geometricum de generali via inveniendi omnes Regulas Centrales Bakeri.* Negli » *Acta Eruditorum anno* M DCCIII *pubblicata* ». Lipsiae, A. MDCCIII, pag. 166-170.

Anonimo. Espone un modo di trattare le equazioni, secondo il quale si apparecchiano alla applicazione della regola centrale di Baker e ciò indipendentemente dalla tavola usata da quest'ultimo. La esposizione contiene la dimostrazione delle regole in questione (XXVIII).

XL. *Traité Analitique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problêmes tant déterminez qu'indéterminez,* Ouvrage Posthume de M. le Marquis de l'Hospital. A Paris, M. DCC. VII.

Come lo indica il titolo, tutta l'opera è interessantissima per lo sviluppo storico del nostro argomento, veggasi però in particolare il libro IX che tratta *De la construction des Égalités.* Intorno a quest'opera veggasi l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences.* Année MDCCVII, pag. 71-77.

XLI. *Application de l'Algebre à la Géométrie, ou methode de démontrer par l'algebre les theorêmes de Geometrie, et d'en resoudre et construire tous les problêmes. L'on y a joint une introduction qui contient les regles du calcul algebrique.* Par M. Guisnée. A Paris, MDCCV.

Di quest'opera veggansi in particolare le sezioni VIII, IX, X, XI e XII. Ecco quanto ne dice l'Autore nella prefazione: « Comme les équations, qui servent à construire les problêmes, en renfermant toutes les conditions, et toutes les qualitez, ou a accoutumé d'en démontrer la construction par l'analyse, en retirant les même équations des proprietez des courbes qu'on y employe. Mais

Digitized by Google

cette méthode n'ayant aucune difficulté, j'ai demontré à la manière des Anciens la construction de la plûpart des problêmes déterminez que j'ai résolus, quoiqu'elle ait été tirée de l'Analyse, afin de faire voir la différence qu'il y a entre l'une et l'autre manière.

XLII. *The Universal Resolution of Cubic and Biquadratic Equations, as well Analitycal as Geometrical and Mechanical*, By Mr. J. COLSON. Anno 1707. Nei » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London from their commencement in* 1665, *to the year* 1800; *Abridged with notes and biographical illustrations* by CHARLES HUTTON, GEORGE SHAW, RICHARD PEARSON. Vol. V from 1703 to 1712. London, 1809 » pag. 334-342.

Gli editori della edizione *Abridged* che tradussero questo lavoro dal latino, vi posero la seguente nota: « The present paper, on the solution of cubic and biquadratic equations, is founded nearly on the idea of solution by DESCARTES, by assuming the biquadratic as equal to the product of two quadratics with indeterminate coefficients. The construction of the equations also, by means of the circle and parabola, is an imitation of the like constructions of DESCARTES in his geometry (VIII) and of Mr. BAKER in his Geometrical Key (XXVIII). » Qui nulla si aggiunge intorno alla parte meccanica, la quale viene esposta dall'Autore nei termini seguenti: « But lest the organical description of the parabola should seem too difficult, we may have recourse to a certain mechanical artifice, to be performed by means of a plummet, or thread with a weight hanging at the end of it; by help of which the last equation may be constructed very easily and exactly, and thence the roots of any cubic or biquadratic equations may be found; and that without drawing anyother than right lines and circle. Now this construction.... may be called a mechanical one. »

XLIII. *The Analytical Solution of any Equations of the Third, Fifth, Seventh, Ninth, and the other higher uneven Powers, by Rules similar to those called Cardan's.* By Mr. ABR. DEMOIVRE. Anno 1707. Nei » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London from their commencement in* 1665, *to the year* 1800; *Abridged with notes and biographical illustrations* by CHARLES HUTTON, GEORGE SHAW, RICHARD PEARSON. Vol. V from 1703 to 1712. London, 1809 » pag. 342-344.

Soluzione goniometrica delle equazioni di grado impari.

Digitized by Google

XLIV. *Universal Arithmetic or, a treatise of arithmetical composition and resolution.* Written in Latin by Sir JSAAC NEWTON. Translated by the late Mr. RALPHSON; and revised and corrected by Mr. CUNN. To which is added a treatise upon the *Measures of ratios* by JAMES MAGUIRE. The whole illustrated and explained in a series of notes by the Rev. THEAKER WILDER. London, MDCCLXIX.

Devo citare questa edizione, non essendo riuscito a procurarmi quella originale latina. Per lo studio nostro è particolarmente da considerarsi l'appendice intitolata: *The linear construction of equations.*

XLV. *Éclaircissemens sur la construction des égalitez* par M. ROLLE. Nella *Histoire de l' Académie Royale des Sciences.* Année MDCCVIII. A Paris, MDCCIX, pag. 339-365.

Discute le regole di DESCARTES (VIII), ne mette in evidenza le eccezioni e ne spiega le difficoltà di applicazione.

XLVI. *Éclaircissemens sur la construction des égalitez.* Second Mémoire. Par M. ROLLE. Nell' *Histoire de l' Académie Royale des Sciences.* Année MDCCIX. A Paris, MDCCXI, pag. 320-350.

Seguito della trattazione dello stesso argomento svolto nella memoria antecedente (XLV).

XLVII. *De l' évanouissement des quantités inconnues dans la Géométrie analytique.* Par M. ROLLE. Nell' *Histoire de l'Académie Royale des Sciences.* Année MDCCIX. A Paris. MDCCXI, pag. 419-450.

Seguita lo stesso argomento trattato nelle precedenti memorie (XLV, XLVI) colla differenza che nella presente l'Autore si sforza di risalire alle cause le quali determinano gli avvertiti difetti della regola di DESCARTES.

XLVIII. *Remarques sur la construction des Lieux géométriques et des Equations.* Par M. DE LA HIRE. Nella *Histoire de l' Académie Royale des Sciences.* Année MDCCX. A Paris, MDCCXII, pag. 7-45.

Digitized by Google

Si occupa in particolare della cosidetta *Regola di Descartes*, facendo comprendere come non sia stato nelle intenzioni di DESCARTES di dare una regola, che anzi questa tenne per sè, ma di porgere alcuni esempii. In tale occasione impartisce l'Autore alcuni interessanti precetti sulla costruzione delle equazioni.

XLIX. *Regles et Remarques sur la construction des Egalitez* par M. ROLLE. Nella » *Histoire de l'Académie Royale des Sciences.* Année MDCCXI. A Paris, MDCCXIV, pag. 86-100.

L. DAMIANI SCOGNAMIGLIO. *De planarum aequationum resolutione.* Neapoli, M DCC XII.

Soluzione geometrica delle equazioni di secondo grado.

LI. L. B. CHRISTIANI WOLFII. *Elementa Matheseos Universae in quinque tomos distributa.* Tomus primus, qui *commentationem de methodo mathematica, arithmeticam, geometriam, trigonometriam planam, et analysim tam finitorum quam infinitorum complectitur.* Veronae, MDCCLXXXVIII. pag. 396-426.

Veggasi in particolare il Cap. VIII della Sez. II della Parte I, intitolato *De Constructione aequationum superiorum.* La esposizione assai particolareggiata che l'Autore fa di varii metodi e gli opportuni raffronti che fra loro istituisce torneranno di gran giovamento in un relativo lavoro storico.

LII. *Remarques sur un paradoxe des effections géométriques* par M. ROLLE. Nella *Histoire de l'Académie Royale des Sciences.* Année M DCC XIII. A Paris, M DCC XVI, pag. 243-261.

LIII. *Sur une observation de M. Rolle par rapport aux constructions géométriques; proposée à l'Académie comme un Paradoxe* par M. SAURIN. Nella *Histoire de l'Académie Royale des Sciences.* Année M DCC XIII. A Paris, M DCC XVI, pag. 261-264.

LIV. *Mathematisches Lexicon, darinnen die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunst-Wörter erkläret, und zur Historie der Mathematischen Wissenschaften dienliche Nachrichten ertheilet, auch die Schriften, wo iede Materie ausgeführet zu*

Digitized by Google

finden, angeführet werden: auff Begehren herausgegeben von CHRISTIAN WOLFFEN. Leipzig, 1716.

Veggasi in particolare l'articolo: *Constructio aequationum, effectio geometrica, die Ausfürung der Gleichungen,* col. 421-423.

LV. *Geometria Organica: sive descriptio linearum curvarum universalis.* Auctore COLINO MAC LAURIN. Londini, MDCCXX.

LVI. *Usus normae in constructione aequationum planarum, et solidarum exercitationis analiticae gratia demonstratus* a D. AGATHINO REGGIO. Romae, M. DCC. XXVII.

Questa breve nota contiene in certo modo un primo germe dello strumento proposto da LILL (CXXXII-CXXXIV). Questo medesimo scritto è attribuito dal RICCARDI (*Biblioteca Matematica Italiana.* Modena, MDCCCLXX, col. 167) a ORAZIO BORGONDIO.

LVII. *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes* par le R. P. CLAUDE RABUEL. A Lyon, MDCCXXX.

LVIII. G. J.'s GRAVESANDE. *Matheseos Universalis Elementa. Quibus accedunt, specimen commentarii in Arithmeticam Universalem Newtoni: ut et de determinanda forma seriei infinitae adsumptae regula nova.* Lugduni Batavorum, M. DCC. XXVII.

Contiene nei capitoli XIV, XV parecchie costruzioni di equazioni del secondo grado o riducibili al secondo grado.

LIX. JAC. HERMANNI. *Observationes in schediasma quod Dn. Rolle cum hac inscriptione:* Eclaircissements sur la construction des Egalitez, *in Commentarjis Academiae Reg. Scient.* 1708 *edidit.* Nei » *Miscellanea Berolinensia, ad incrementum scientiarum ex scriptis Societatis Regiae scientiarum exhibitis edita.* Continuatio II. » Berolini. M DCC XXVII, pag. 131-146.

Memoria di grande importanza per lo sviluppo storico dell'argomento, poichè in essa facendosi appunti al lavoro di ROLLE (XLV) si istituiscono opportuni raffronti sui metodi antecedentemente usati al medesimo scopo, richiamando anche il quarto libro delle *Collezioni* di PAPPO.

Digitized by Google

LX. *Traité complet de Mécanique appliquée aux arts contenant l'exposition méthodique des théories et des expériences les plus utiles pour diriger le choix, l'invention, la construction et l'emploi de toutes les éspèces de machines.* Par M. J.-A. BORGNIS. *Des Machines imitatives et des Machines théâtrales.* Paris, 1820. pag. 226-229.

Descrizione d'un apparecchio ideato da CLAIRAUT, il quale serve a tracciare sopra un cartone una curva, mediante la quale si trova graficamente il valore delle radici d'una qualsivoglia equazione. Assai interessante è pure l'esposizione del principio che serve di base all'apparecchio.

LXI. *De Locis solidis ad mentem Cartesii concinne construendis* A. J. HERMANNO. Nei » *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* », Tomus IV. Ad annum CIↃ IↃCCXXIX. Petropoli CIↃ IↃCCXXXV, pag. 15-25.

Deplorando l'Autore la dimenticanza in che era caduto il metodo Cartesiano, si propone nella presente Memoria di illustrarlo, adattandolo alle cognizioni dei contemporanei ed aggiunge (pag. 18): « Haec methodus enim nullis substitutiobus peregrinus, nullis reductionibus aequationis propositae ad primitivas, aut aliis ejusmodo metamorphosibus eget, sed magnitudo et positio diametri et parametri sectionis immediate ex aequatione construenda, nullo fere negotio eruuntur, quibus inventis locus facile construi potest ». MONTUCLA (*Histoire des Mathématiques.* Nouvelle édition. Tome Second. A Paris, An VII, pag. 162) accenna ad una Memoria dello stesso Autore sopra analogo argomento, inserita « dans les anciens Mémoires de Petersbourgh, an 1737 » ma non sono riuscito a rinvenirla.

LXII. *De constructione aequationum ope motus tractorii, aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus.* Auctore LEONH. EULERO. Nei » *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* ». Tomus VIII. Ad annum MDCCXXXVI. Petropoli. CIↃ IↃCCXLI.

Quantunque questa memoria riguardi in particolare la costruzione delle equazioni differenziali, pure l'abbiamo voluta registrare fra questi nostri materiali, poichè in essa si contengono talune cose che potranno essere utilizzate anche in un lavoro storico che riguardi la costruzione delle equazioni in generale.

Digitized by Google

LXIII. *Algebrae Geometria promotae elementa conscripta ad usum Faustinae Pignatelli*, ecc. Auctore NICOLAO DE MARTINO. T. I-III Napoli, MDCCXXXVII.

Veggasi in particolare il Tomo III.

LXIV. *Institutiones analyticae earumque usus in geometria cum appendice de constructione problematum solidorum* auctore PAULINO A S. JOSEPHO Lucensi. Editio altera. Romae, MDCCXLV.

Oltre all'appendice messa in evidenza nel titolo istesso, l'opera in questione contiene anche un capitolo intitolato: « *De Geometrica Constructione Aequationum* » nel quale tratta delle equazioni semplici e quadratiche. Il vero nome di questo scrittore è PAOLINO CHELUCCI.

LXV. *Démonstrations de la regle de Descartes pour connoître le nombre des racines positives et negatives dans les équations qui n'ont point de racines imaginaires* par M. L'Abbé DE GUA. Nella *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*. Année M.DCC.XLI. A Paris, M.DCC.XLIV. pag. 72-96.

LXVI. *Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires, réelles positives, ou réelles negatives, qui peuvent se trouver dans les équations de tous les degrés* par M. l'Abbé DE GUA. Nella » *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*. Année M.DCC.XLI. A Paris, M.DCC.XLIV, pag. 435-494.

L'introduzione alla memoria contiene pregevoli notizie storiche sulla teoria delle equazioni e sulla loro costruzione incidentalmente. Lo studio poi, che costituisce lo scopo principale dello scritto, è accompagnato da rappresentazioni geometriche, nelle quali l'Autore si serve di curve di genere parabolico per iscoprire e dimostrare parecchi teoremi relativi alle radici delle equazioni.

LXVII. *Mathematischer Atlas, in welchem auf* 60 *Tabellen alle Theile der Mathematic vorgestellt und durch Beschreibung und Figuren entworfen werden* von T. MAYER. Augsburg, 1745.

Nella tav. VI del Supplemento trovasi illustrata la cosidetta regola centrale di BAKER (XXVIII).

Digitized by Google

LXVIII. *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* di D.na Maria Gaetana Agnesi. Tomo I. In Milano, MDCCXLVIII.

Veggasi in particolare il Capo III intorno alla costruzione dei problemi indeterminati che non eccedono il secondo grado, ed il Capo IV che si riferisce alla costruzione dei problemi che superano il secondo grado.

LXIX. *Introduction à l' analyse des lignes courbes algebraïques* par Gabriel Cramer. Genève, 1750.

Veggasi in particolare il cap. IV nel quale si contiene una discussione dei metodi di Rolle (XLV, XLVI) e di Sluze (XXIII).

LXX. Baermann. *De solutione cubicarum aliarumque aequationum ope sinum.* Vitebergiae, 1751.

Dichiaro di non conoscere questo lavoro che trovai semplicemente registrato nel *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch* di Poggendorff.

LXXI. Lettera di Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù alla Signora Gaetana Maria Agnesi *intorno alla costruzione di alcune formule senza la separazione delle indeterminate.* Nelle » *Symbolae litterariae opuscula varia philologica scientifica antiquaria signe lapides numismata gemmas et monumenta medi aevi nunc primum edita complectentes.* » Decadis primae volumen decimum. Florentiae CIↃ . IↃ . CC . LIII, pagine 62-72.

È relativa ad una memoria di Clairaut inserita nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi per il 1742. Tratta realmente della costruzione di alcune formule differenziali, ma, a parer nostro, non potrà essere trascurata in un lavoro storico sulla costruzione delle equazioni.

LXXII. *De methodo generali construendi omnes aequationes algebricas* etc. Samuelis Abhortis. Gryphiswaldiae, M . DCC . LV.

Dichiaro di non conoscere questo lavoro che trovai semplicemente citato da altro autore.

LXXIII. *Cursus mathematicus sive elementa arithmeticae, geometriae et calculi geometrici.* J. A. Segneri. Halae, 1756.

Digitized by Google

Veggasi in particolare il §. 705 ed anche pag. 475. Vi è fra le altre cose esposto il principio teorico che serve di base agli apparecchi meccanici destinati alla risoluzione delle equazioni.

LXXIV. *Methodus simplex et universalis, omnes omnium aequationum radices detegendi.* Auctore JOH. ANDR. DE SEGNER. Nei » *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* » Tom. VII pro Annis MDCCLVIII et MDCCLIX. Petropoli, MDCCLXI, pag. 211-226.

Per fornire una idea del contenuto di questa memoria riproduciamo parte del sunto che se ne legge a pag. 16 del citato volume: « Auctor hic mechanicam methodum perquam ingeniosam exponit, ubi descriptione certarum linearum curvarum limites omnium radicum realium manifesto exhibentur, constructionem autem harum linearum geometriam admodum facilem docet, qua, quovis casu oblato fere sine labore uti liceat. Quae lineae quo accuratius super charta delineantur, eo propius vero singularum radicum valores manifestant, quibus cognitis, eo promtius aliarum methodorum beneficio approximatio instituitur. »

LXXV. *Modo facile e chiaro per costruire tutte l' equazioni indeterminate del secondo grado de' luoghi alle sezioni coniche* a' giovani studiosi esposto, ecc. da MELCHIORRE GRIFFI, Verona, MDCCLX.

LXXVI. AUGUSTINI VIVORIO *De Cubicis ac biquadraticis aequationibus tractatus. Accedit nova regula Cartesiana, qua numerus affermativarum et negativarum radicum in aequationibus dignoscitur, demonstratio.* Veronae, CIↃIↃCCLXIX.

LXXVII. *Directions for making a Machine for finding the Roots of Equations universally, with the manner of using it.* By the Rev. Mr. ROWNING. Nei » *Philosophical Transactions* » per l'anno 1770, pag. 240-256.

È in complesso la proposta d' un apparecchio per ottenere meccanicamente le radici delle equazioni col metodo di SEGNER (LXXIII, LXXIV). Questa proposta deve essere stata maggiormente esplicata ed illustrata in una memoria pubblicata separatamente dall'Autore nel 1771, ma noi, ad onta di molte ricerche, non abbiamo potuto procurarcela.

Digitized by Google

LXXVIII. *Dictionnaire Encyclopédique des Mathématiques,* par MM. D'ALEMBERT, l'Abbé BOSSUT, DE LA LANDE, le Marquis DE CONDORCET, etc. Paris, MDCCLXXIX.

Veggansi in particolare gli articoli seguenti: *Application de la Géométrie à l'Algèbre.* — *Construction,* dove tratta della costruzione delle equazioni a partire dal 1.° grado fino a quelle di grado qualunque. — *Courbe,* dove, fra le altre cose, si discute della opportunità di ricorrere nella costruzione delle equazioni alle sole curve geometriche, oppure di approfittare anche delle meccaniche. — *Équation,* dove si contiene uno studio geometrico sulla moltiplicità delle radici e si trova trattato: *Construction et usage d'une machine pour trouver les racines de quelque équation que ce puisse être.*

LXXIX. PAULLI FRISI, *operum tomus primus Algebram et Geometriam analyticam continens.* Mediolani, M.DCC.LXXXII.

Veggansi parecchie costruzioni nel capitolo quarto.

LXXX. *Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet in alphabetischer Ordnung* von GEORG SIMON KLÜGEL. Erste Abtheilung. Die reine Mathematik. Erster Theil von A bis D. Leipzig, 1803.

Anzitutto noi troviamo in quest'opera le prove di quell'alterno favore del quale furono oggetto le costruzioni geometriche e che ci siamo studiati di porre in evidenza nel principio di questo nostro lavoro. A pag. 132 noi leggiamo infatti relativamente all'epoca di DESCARTES e dei suoi immediati successori: « Da die Geometrie von ihnen als der wesentlichste Theil der Mathematik angesehen ward, so suchten sie auch arithmetische Aufgaben auf geometrische Art, als welche ihnen die vollkommenste war, aufzulösen. Gegenwärtig, da die algebraische Auflösungskunst weiter gebracht ist, wird die Construction weniger geachtet ». E tosto soggiunge: « Sie ist aber als eine Methode schätzbar, welche die Verbindung zweier unbestimmten Gleichungen, durch die Elimination einer der veränderlichen Grössen, und die Entsthehung der gegebenen bestimmten Gleichung, auf einmahl anschaulich darstellt. Sie dient auch zur Erläuterung der Eigenschaften der Gleichungen ». E più innanzi, riferendosi alla fine del secolo decimosettimo, così si esprime (pag. 551): « Ehedem pflegte man analytische Beweise und Auflösungen in geometrische Constructionen zu verwandeln, wie in Newtons Principien der Naturwissenschaft durchgehends geschehen ist. Man fügte den

Digitized by Google

analytischen Auflösungen immer die geometrische Construction bey. Die geometrische Methode sah man als die vollkommenere an. Es ist wahr, das diese oft ungemein viel Scharfsinn erfordert, und vortrefflich zur Übung des mathematischen Fassungsvermögens dient.... Gegenwärtig hat man die geometrische Methode fast ganz verlassen ».

Sono particolarmente interessanti per lo scopo nostro le voci seguenti:

Construction quadratischer Gleichungen, pag. 133.

Construction der cubischen Gleichungen, worin das zweyte Glied fehlt, pag. 134.

Construction biquadratischer Gleichungen und vollständiger cubischer, pag. 138.

Arithmetisch-geometrische Construction der Gleichungen, pag. 142. — In questa occasione il KLÜGEL porge anche una dimostrazione sommaria del come alla costruzione delle equazioni possano servire apparecchi meccanici.

Auflösung quadratischer und cubischer Gleichungen durch die Gontometrie (trigonometrische Formeln), pag. 148.

Die Construction analytischer Gleichungen, pag. 549.

LXXXI. *Cours complet de mathématiques pures* par L. B. FRANCOEUR. Tome Premier. Paris, 1809.

Veggasi in particolare il capitolo intitolato: « *Constructions géométriques.* »

LXXXII. *Allgemeine Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen durch de Goniometrie* von J. B. MOLLWEIDE. Nella » *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd-und Himmels-Kunde*, edita dal Barone DI ZACH. XXII Band. Gotha, 1810.

LXXXIII. *De la resolution des équations numériques du* 3.^{me} *degré par la parabole ordinaire* par M. GERGONNE. Negli *Annales de Mathématiques pures et appliquées.* Recueil périodique redigé par J. D. GERGONNE. Tome Neuvième. A Nismes, 1818 et 1819.

Si propone l'Autore di investigare in particolar modo se proposta una equazione cubica essa presenti due radici immaginarie, oppure se tutte e tre sono reali e soggiunge (pag. 204): « Dans ce dernier cas, les formules générales refusant le service, il peut être commode d'avoir quelque procédé graphique qui fasse connaître les signes des racines et qui en donne à peu près les valeurs. »

Digitized by Google

LXXXIV. *Mémoire sur la résolution géométrique des équations du troisième degré et sur les propriétés principales de ces équations démontrées par la géométrie élémentaire* par G. PAUCKER. Nei » *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de S.t Pétersbourg.* » Tome X. S.t Petersbourg, 1826, pag. 158-260.

Memoria assai importante per lo sviluppo storico dell'argomento. L'autore istesso ne porge un sunto sotto forma di introduzione.

LXXXV. *Divinazione sulla Geometria analitica degli antichi, ovvero sul metodo usato dalle greche scuole nella risoluzione dei problemi*, opera di GIUSEPPE SCORZA. Napoli, 1823.

Critica del metodo seguito da NEWTON (XLIV) nel ridurre i problemi di terzo e di quarto grado costruendo le equazioni cubiche e le biquadratiche col derivarle dal problema di applicare una retta data di grandezza fra i lati di un dato angolo e che passi per un punto dato.

LXXXVI. *Analyse des équations déterminées* par M. FOURIER. Première Partie. Paris, 1831.

Quest'opera magistrale è talmente nota ai cultori delle matematiche che ogni illustrazione sarebbe superflua. Ci limitiamo pertanto a segnalare la introduzione storica e in essa l'uso additato delle curve paraboliche che rappresentano le proprietà delle equazioni (pag. 17). Indi, per ciò che si riferisce allo studio geometrico delle equazioni, la risoluzione del problema che ha per iscopo di distinguere le radici immaginarie, mediante la considerazione del contatto degli archi di parabola: inoltre, nella risoluzione delle equazioni letterali, la costruzione mediante la quale si trovano successivamente i primi termini dei fattori corrispondenti alle radici della proposta; e nell'applicare a quelle medesime equazioni l'analisi delle disuguaglianze, la costruzione atta a determinare i valori delle incognite che danno al massimo errore il minimo valore possibile. Ancora varie costruzioni relative al metodo per determinare due limiti d'ogni radice reale e per distinguere le radici immaginarie. Finalmente diverse altre costruzioni relative al metodo per calcolare i valori delle radici i cui limiti sono noti ed alle indagini che si riferiscono alla convergenza delle approssimazioni ed alla distinzione delle radici.

LXXXVII. JOANNIS BAPTISTAE MAGISTRINI. *De aequationibus algebraicis tum determinatis tum indeterminatis geometrice construendis.* Nei » *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Insti-*

Digitized by Google

tuti Bononiensis. » Tomus Primus. Bononiae, MDCCCXXXIV, pag. 194-219.

Veggasi in particolare il §. I.°: *De aequationibus determinatis gradu quarto altioribus per solas curvas conicas resolvendis,* nel quale viene anche proposto allo scopo un semplicissimo strumento.

LXXXVIII. *Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche in gelehrten Schulen und Bildungs-Anstalten* von J. T. AHRENS. Nürnberg, 1831.

Contiene parecchie costruzioni assai interessanti di espression algebriche.

LXXXIX. *Note sur la manière la plus convenable de déterminer la signification géométrique des équations du second degré à trois variables* par N. G. DE SCHULTEN. Nei » *Mémoires presentés à l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.* » Tom. II. St. Petersbourg, 1835, pag. 313-320.

XC. TULLA'S *Annäherungsconstructionen.* Ein für die Raumtechnik höchst wichtiger Unterrichtszweig. Bearbeitet von J. F. LADOMUS.

XCI. *Ausführliches Lehrbuch der höheren Mathematik* von A. BURG. Wien, 1832-33.

Veggasi in particolare quanto espone l'Autore intorno alle costruzioni delle equazioni del terzo e del quarto grado.

XCII. *Sammlung von Aufgaben aus der Elementar-Mathematik* von G. W. TENNER. Leipzig, 1833.

Costruzioni di espressioni algebriche.

XCIII. *Dictionnaire des Sciences Mathématiques pures et appliquées par une société d'anciens éléves de l'École Polytechnique,* sous la direction de A.-S. DE MONTFERRIER. Paris, 1835.

Veggansi in particolare gli articoli: *Construction des équations, Application de l'Algèbre à la Géométrie.*

Digitized by Google

XCIV. FÖRSTEMANN. *Ueber die Auflösung der quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen mittelst goniometrischer Functionen.* Danzig, 1836.

Trovai citato questo scritto in altro relativo al medesimo argomento, ma dichiaro di non conoscerlo.

XCV. *Goniometrische Behandlung der Gleichungen vom vermischt cubischen Grade* von JOSEPH FISCH. Nel » *Jahresbericht über das königliche Laurentianum zu Arnsberg in dem Schuljahre* 1835-36. Arnsberg, 1836.

Gran parte della memoria è dedicata ad una esposizione della teoria delle equazioni cubiche; in fine (pag. 48) ne è annunciata una seconda di argomento analogo, ma che però non conosco.

XCVI. REHAAG. *Auflösung numerischer Gleichungen durch goniometrische Formeln.* Conitz, 1839.

Ho trovato registrato questo libro nel catalogo di un *Antiquarisches Büchertager*, ma non ne so di più, non essendo neppure citato dal POGGENDORFF.

XCVII. *Balance algébrique pour la résolution des équations numériques des sept premiers degrés* par M. LÉON LALANNE. Nei » *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* » Séance du 14 décembre 1840.

Il CAUCHY riferendo su questo apparecchio si esprimeva: « Il suffirait de remplacer les paraboles des divers ordres, suivant lesquelles sont découpées les rainures de l'appareil, par d'autres courbes algébriques ou trascendantes, pour le rendre propre à fournir les racines d'une équation dont le premier membre serait non plus une fonction entière de l'inconnue, mais la somme de termes proportionnels à diverses fonctions données. »

XCVIII. *Neue Auflösung der Gleichung des zweiten Grades mittelst der goniometrischen Formeln und Tafeln.* von J. A. GRUNERT, Nel suo » *Archiv der Mathematik und Physik* » Erster Theil, Greifswald, 1841, pag. 12-15.

Per risolvere l'equazione :

$$f(x_1, x_2) \equiv x^2 - mx + n = o$$

Digitized by Google

si pone:

$$x_1 = tang\ \phi$$
$$x_2 = tang\ \phi_1$$

e si dimostrano per i due angoli ϕ e ϕ_1 queste due relazioni:

$$cotg.\ (\phi + \phi_1) = \frac{1 - n}{m}$$

$$cos\ (\phi - \phi_1) = \frac{1 + n}{m}\ sen\ (\phi + \phi_1).$$

XCIX. HEYDENREICH. *Anwendung der Trigonometrie auf die Auflösung der Gleichungen bis zum vierten Grade.* Tilsitt, 1842.

C. *Anwendung goniometrischer Functionen auf die Auflösung cubischer Gleichungen* von Prof. J. K. H. LUDOWIEG.

La memoria precedente e questa, senza indicazione nè di data nè di luogo di stampa ho trovato citate in altro lavoro di argomento analogo. Le ho registrate qui perchè evidententemente, come dimostra il titolo, possono far parte di questi materiali, ma non vidi mai nè l'una nè l'altra.

CI. *Mémoire sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur* par M. LÉON LALANNE. Negli » *Annales des Ponts et Chaussées.* 2.e Serie, T. XI. Paris, 1846, pag. 1-69.

Applicazione della geometria anamorfica alla risoluzione delle equazioni del terzo grado.

CII. *Geometrischer Beweis des Satzes, dass jeder algebraischen Gleichung mit einer Unbekannten durch einen complexen Werthen dieser Unbekannten Genüge leistet* von Dr. T. WITTSTEIN. Nell' *Archiv der Mathematik und Physik* edito da GRUNERT. Sechster Theil. Greifswald, 1845, pag. 225-235.

Contiene una dimostrazione analoga a quella della celebre dissertazione di GAUSS, ma più elementare: l'autore vi fa uso de' principii di ciò che oggidì si chiama col nome di « Analysis Situs ».

Digitized by Google

CIII. *Goniometrische Auflösung dreier Gleichungen von der Form* $ax + by + cz = i$; $a_1x + b_1y + c_1z = i_1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. von J. A. GRUNERT. Nel suo » *Archiv der Mathematik und Physik* ». Sechster Theil. Greifswald, 1845, pag. 370-374.

CIV. *Ein paar einfache Anwendungen der geometrischen Darstellung imaginärer Zahlen, insbesondere auf cubische Gleichungen* von Dr. T. WITTSTEIN. Nell' » *Archiv der Mathematik und Physik* » edito da GRUNERT. Siebenter Theil. Greifswald, 1846, pag. 402-410.

Metodo di rappresentazione delle grandezze complesse nel piano: l'Autore non si occupa se non delle radici delle equazioni di terzo grado. Questo metodo allora nuovo, non differisce in fondo da quello di GAUSS-ARGAND.

CV. *Beiträge zur Vergleichung der Methode der Algebra im sechszehnten Jahrhunderte mit der in unseren Tagen, oder: die ersten vier Kapitel aus dem ersten Theile der Algebra des Doktors* Pedro Nuñez *aus dem Spanischen übersetzt und dem wesentlichen Jnhalte nach, nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft dargestellt* von Mr. J. K. TOBISCH. Breslau, 1846.

CVI. *Begründung eines eigenthümlichen Rechnungs-Mechanismus zur Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungen mit numerischen Coefficienten* von FRANZ MOTH. Nei » *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften in Wien* » I. 1848, pag. 21-26.

CVII. *Ueber die geometrische Konstruktion der imaginären Wurzeln einer Gleichung* von HERMANN SCHEFFLER. Nell' » *Archiv der Mathematik und Physik* » edito da GRUNERT. Fünfzehnter Theil. Greifswald, 1850, pag. 375-389.

Lo scopo di questa nota è abbastanza chiaramente indicato dal titolo istesso ed essa apparisce interessantissima anche per le regole fondamentali della costruzione proposta, regole fondamentali che contengono in loro stesse tutto un programma di calcolo geometrico. In questa nota si riconoscono facilmente gli elementi di talune costruzioni proposte come nuove alcuni anni più tardi da altri autori.

Digitized by Google

CVIII. *Die Theorie und Auflösung der höhern algebraischen und der trascendenten Gleichungen, theoretisch und praktisch bearbeitet* von Dr. C. H. SCHNUSE. Braunschweig, 1850.

Veggasi in particolare il Capitolo sesto, intitolato: *Benutzung geometrischer Hülfsmittel zur Auflösung der höhern algebraischen Gleichungen.*

CIX. *Ueber die geometrische Darstellung eines Systems höherer Zahlengleichungen* von SIMON SPITZER. Nei » *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe des kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.* » Sechster Band. Jahrgang 1851. Heft 1-5. Wien, 1851, pag. 152-156.

L'Autore scrive essere questo lavoro una estensione di altro da lui pubblicato sotto il titolo: *Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten.* Wien, 1851.

CX. *Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke* von Dr. HEINRICH GLASSER. Erlangen. » Nel *Jahresbericht von der königlichen Studienanstalt zu Erlangen in Mittelfranken bekannt gemacht bei der öffentlichen Preisvertheilung den* 27 *August* 1851.

Costruzione delle equazioni quadratiche. L'Autore dichiara d'aver tolto parte dei problemi da lui esposti, dai trattati di ROSE, KOPPE ed OTTEMANN.

CXI. *Traité de Géométrie Supérieure* par M. CHASLES. Paris, 1852.

A pag. 224-228 trovasi svolta la risoluzione d'un sistema qualunque di equazioni di primo e di secondo grado ricorrendo alle proprietà delle punteggiate projettive simili.

CXII. *De l'expression goniomètrique des racines de l'équation du* 3^{ième} *degré* par M. E. J. BJÖRLING. Nell' » *Archiv der Mathematik und Physik* » edito da GRUNERT. Neunzehnter Theil. Greifswald, 1852, pag. 228-233.

CXIII. *De l'espression goniomètrique des racines de l'équation du* 4^{ième} *degré* par M. E. J. BJÖRLING. Nell' » *Archiv der Mathematik und Physik* » edito da GRUNERT. Neunzehnter Theil. Greifswald, 1852, pag. 297-305.

Digitized by Google

CXIV. *Construction des équations du troisième et du quatrième degré* par M. CHASLES. Nei » *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* » Séance du Lundi 29 Octobre 1855. Tome Quarante et Unième. Juillet-Décembre 1855. Paris, 1855.

Memoria importantissima tanto per lo svolgimento diretto dell'argomento quanto per i raffronti storici in essa contenuti.

CXV. *Lehrbuch der unbestimmten Analytik. Die Auflösung der Diophantischen Gleichungen ersten und zweiten Grades für höhere Lehranstalten* von Dr. WILHELM BERKHAN. I. Theil. Halle, 1855.

A pag. 155 trovasi indicata la costruzione delle equazioni indeterminate della forma $ax \mp by = \mp c$.

CXVI. *Über die goniometrische Behandlung der quadratischen und cubischen Gleichungen. Die Auflösung der quadratischen und cubischen Gleichungen durch Anwendung der goniometrischen Functionen* von Dr. FISCHER. Nel » *Jahresbericht über das Gymnasium zu Elberfeld.* » Elberfeld, 1856.

Questo scritto è diviso in quattro parti: la prima tratta del calcolo delle espressioni algebriche mediante l'applicazione delle funzioni trigonometriche in generale: la seconda e la terza rispettivamente della soluzione goniometrica delle equazioni quadratiche e cubiche: l'ultima contiene alcuni esempi di applicazione.

CXVII. *Die Auflösungen der Gleichungen des fünften und sechsten Grades durch Construction nach Descartes* von J.-A. GRUNERT. Nel suo » *Archiv der Mathematik und Physik.* » Sieben und zwanzigster Theil. Greifswald, 1856, pag. 245-274.

L'Autore comincia dal generalizzare l'antica definizione delle concoidi.

La concoide parabolica è data dall'equazione:

$$y^3 - by^2 + p(a - c - x)y + p(bc - ad + dx) = o$$

Le equazioni del 5.° e del 6.° grado possono essere risolte coll'intersezione d'un cerchio e d'una siffatta concoide parabolica.

CXVIII. *Résolution des équations numériques du troisième degré, au moyen de la règle à calcul* par M. E. BOUR. Nei » *Comptes*

Digitized by Google

Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. T. XLIV, pag. 22-25. » Paris, 1857.

Quantunque nei casi non frequentissimi, nei quali si deve risolvere una equazione del terzo grado succeda di rado che si possa accontentarsi del piccolo numero di decimali forniti dal regolo, pure il procedimento suggerito nella citata nota si raccomanda per ottenere senza calcolo una prima approssimazione, cioè quella che d'ordinario richiede un maggior numero di tentativi: potendosi poi procedere ulteriormente, quando ne sia il caso, col su ssidio degli ordinari procedimenti algebrici.

CXIX. *Ebene analytische Geometrie für höhere Lehranstalten* von Dr. C. HECHEL. Riga, 1858.

Costruzione dell' equazione quadratica impura mediante una unica figura.

CXX. *Die Anwendung der Algebra auf Geometrie. Eine Anleitung zum Auflösen geometrischer Aufgaben vermittelst der algebraischen Analysis* von Dr. WILHELM BERKHAN. Halle, 1858.

Contiene diverse costruzioni di equazioni quadratiche.

CXXI. *Entwickelungs-Geschichte der Gleichungen* von Dr. HOH. Nel » *Jahres-Bericht über das königl. Bayer. Lyceum, Gymnasium und über lateinische Schule in Bamberg.* » Bamberg, 1859.

CXXII. *Uber die geometrische Repräsäntation der Gleichungen zwischen zwei veränderlichen, reellen oder komplexen Grössen* von C. A. BJERKNES. Auf Veranlassung des academischen Collegiums herausgegeben von Dr. O. I. BROCH. Universitätsprogramm für das zweite Halbjahr 1859. Christiania, 1859.

Si dimostra che la ordinaria rappresentazione delle curve, date mediante equazioni reali, può essere generalizzata modificando la definizione di una curva determinata mediante una equazione fra due grandezze reali variabili, in modo che essa riesca applicabile anche al caso in cui sieno complesse le costanti dell' equazione e le sue due variabili.

CXXIII. *Die Auflösung der algebraischen und traszendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten in reellen und*

Digitized by Google

komplexen Zahlen nach neuen und zur praktischen Anwendung geeigneten Methoden von Dr. HERMANN SCHEFFLER. Braunschweig, 1859.

Il presente lavoro è sotto parecchi punti di vista importantissimo, non solo per l'argomento dello studio geometrico delle equazioni, ma altresì per la teoria delle equazioni in generale. Noi segnaleremo particolarmente per lo scopo nostro l'applicazione della regola di falsa posizione al calcolo delle radici di una equazione (§. 8); la rappresentazione geometrica d'una equazione e delle sue derivate (§. 9); uno studio geometrico per la risoluzione approssimata di due equazioni (§. 14); l'applicazione della regola di falsa posizione alla risoluzione di due equazioni (§. 16); e la costruzione geometrica delle radici complesse.

CXXIV. *Die Anwendung der Geometrie auf Arithmetik und Algebra, enthaltend die wichtigsten Lehrsätze der Arithmetik und Algebra durch geometrische Constructionen dargestellt* von Dr. WILHELM BERKHAN. Halle. 1861.

Questo libro interessa tutto intero la costruzione delle equazioni e ci meravigliamo invero di non averne mai trovata menzione in alcuno dei numerosi scritti che nell'ultimo decennio furono pubblicati sul calcolo grafico. Direttamente interessa lo scopo nostro la sezione II divisa nei quattro capitoli seguenti:

9. Costruzione delle equazioni algebriche di primo grado.
10. » » quadratiche.
11. » » cubiche.
12. » » biquadratiche.

A pag. 77-78 è esposta la così detta regola centrale di BAKER (XXVIII), la quale dal BERKHAN è attribuita a DESCARTES: BAKER non l'avrebbe che perfezionata e dopo di lui l'HALLEY (XXXI).

CXXV. *Beitrag zur Auflösung kubischer Gleichungen mittelst kiklischer und hyperbolischer Functionen* von Dr. WILH. MATZKA. Nell' »*Archiv der Mathematik und Physik*» edito da GRUNERT. Siebenunddreissigster Theil, pag. 399-419. Greifswald, 1861.

CXXVI. *Sur la résolution des équations du troisième degré au moyen des tables trigonomètriques* par A. DEMONGEOT. Nei »*Nouvelles Annales de Mathématiques.*» Tome Vingtième. Paris, 1861, pag. 143-147.

Digitized by Google

CXXVII. *Résolution trigonomètrique d'une équation du troisième degré* (Estratto dalle » *Astronomische Nachrichten.* ») Nei » *Nouvelles Annales de Mathématiques.* » Tome Vingtième. Paris, 1861, pag. 421.

CXXVIII. *Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrischen Functionen des Kreises und der Hyperbel* von J. F. W. GRONAU. Danzig, 1861.

CXXIX. *Die cubische Gleichung von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M. Chasles abhängt* von Dr. OTTO HESSE. Nel » *Journal für die reine und angewandte Mathematik* » edito da CRELLE. LXII Band. Berlin, 1863, pag. 188-192.

Il problema in questione è il seguente: « On donne dans le même plan deux systèmes de sept points chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques. »

CXXX. *Traité de Géométrie Descriptive* par JULES DE LA GOURNERIE. Troisième partie. Paris, 1864, pag. 199-202.

Esposizione sommaria del metodo di LALANNE (CI).

CXXXI. *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene* von Dr. OTTO HESSE. Leipzig, 1865.

La *Siebente Vorlesung* contiene una soluzione delle equazioni biquadratiche complete, fondata sopra proprietà geometriche.

CXXXII. *Ein Beitrag zur geometrischen und algebrischen Auflösung der cubischen Gleichungen* von SIEBEL. Düsseldorf, 1866.

Non conosco questo lavoro che trovai registrato in un Catalogo.

CXXXIII. *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie* von HEIS und ESCHVEILER. Zweite Auflage. Köln, 1875.

Applicazione delle funzioni trigonometriche alla risoluzione delle equazioni di secondo e di terzo grado. La prima edizione di quest'opera è del 1867.

Digitized by Google

CXXXIV. *Résolution trigonomètrique d'une équation du troisième degré* par M. J. De Virieu. Nei » *Nouvelles Annales de Mathématiques* » Deuxième Série. Tome Sixième. Paris, 1867, pag. 444-446.

CXXXV. *Exposition Universelle de* 1867 *à Paris. Rapports du jury international publiés sous la direction de* M. Michel Chevalier. Tome Deuxième. Paris, 1868.

Alla pag. 537 si riferisce sull'apparecchio Lill esposto sotto il titolo *Machine à resoudre les équations*, facendo inoltre degli apprezzamenti sul grado di approssimazione da raggiungersi. L'articolo è del Sig. Ed. Grateau.

CXXXVI. *Résolution graphique des equations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but*, par M. E. Lill. Nei » *Nouvelles Annales de Mathématiques.* » Deuxième Série, Tome Sixième. Paris, 1867, pag. 359-362.

Illustrazione teorica e descrittiva dello strumento esposto nella sezione militare austriaca della Esposizione Universale di Parigi del 1867.

CXXXVII. *Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue.* Note de M. Ed. Lill. Nei » *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* » T. LXV. Juillet-Décembre 1867. Paris, 1867, pag. 854-857.

Esposizione del metodo con esempi e con accenni alle analogie fra le proprietà dei contorni rettangolari risultanti dalla applicazione del metodo ad alcuni teoremi della teoria generale delle equazioni.

CXXXVIII. *De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante. Caractère auquel on reconnait qu'une telle résolution est possible. Graduation de la règle.* Par le Comte Paul de Saint-Robert. Nelle » *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino.* » S. II. T. XXIV. Torino, MDCCCLXXI, pag. 53-62.

Digitized by Google

Il titolo spiega abbastanza specificatamente l'oggetto di questa memoria. Aggiungeremo che la riduzione viene applicata ad una equazione $F(x, y, z) = o$, quando la si possa trasformare in $Z = X + Y$, dove $X = \phi(x)$, $Y = \psi(y)$; $Z = \chi(z)$: la condizione necessaria per tale riduzione è:

$$\frac{d^2 \log R}{dx\,dy} = o \qquad \text{essendo } R = \frac{\dfrac{dF}{dx}}{\dfrac{dF}{dy}}$$

CXXXIX. *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* par J. M. C. DUHAMEL. Deuxième Partie. Paris, 1866, pag. 260. — Troisième Partie. Paris, 1868, *passim*.

Veggasi principalmente il Capitolo XVI ed i paragrafi che trattano della costruzione delle radici reali delle equazioni in generale e della costruzione delle radici reali delle equazioni di terzo e quarto grado in particolare.

CXL. *Studien im Gebiete numerischer Gleichungen mit Zugrundlegung der analytisch-geometrischen Anschauung im Raume nebst einem Anhange über erweiterte fundamental-Constructionsmittel der Geometrie* von LORENZ ZMURKO. Nelle » *Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe.* » Dreissigster Band. Wien, 1870, pag. 217-300.

Particolarmente interessante per lo scopo nostro è l'appendice, nella quale per ripetere le parole dell'Autore: « Findet man die Anweisung zur constructiven Ausmittelung der primären Gleichungswurzeln. Eine zweite constructive Methode zur Bestimmung der primären Gleichungswurzeln auf Grundlage der Bildung der sogennanten Integralcurven. Ferner sind in diesem Paragraphe Constructionsmittel angegeben, mittelst welchen man in directer Weise Lösung aller geometrischen Probleme bewerkstelligen kann, welche von der Auflösung einer, höchstens dem 4. Grade angehörigen Gleichung abhängen, und eben hiedurch ersichtlich gemacht, dass gleichwie die Mathematik nur Gleichungen bis höchstens zum 4. Grade in geschlossenen Ausdrücken zu lösen vermag, auch die geometrische Construction bis dahin fähig sei, Auflösungen zu vermitteln. Schliesslich geschieht der Erzeugung der Cycloiden eine Erwähnung und wird gezeigt, wie man sich derselben zur Rectification gegebener Kreisbögen, zur Polysection eines gebebenen Winkels und überhaupt zur Auflösung einiger trascendenten Gleichungen bedienen kann. »

Digitized by Google

CXLI. *Die graphische Auflösung höherer Gleichungen* von EDUARD LILL. Nei » *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften.* » LVIII Band. Jahrgang 1868. I Abtheilung, pag. 195; II Abtheilung, pag. 250. Wien, 1868.

Questo lavoro trovasi annunciato siccome presentato all'Accademia, ma dalle nostre ricerche risulterebbe che non venne pubblicato. Siccome tuttavia avrebbe potuto avvenire anche il contrario, così, ciò non ostante, abbiamo creduto opportuno di qui registrarlo.

CXLII. *Résolution graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires d'après* M. LILL. Nei » *Nouvelles Annales de Mathématiques.* » Deuxième Série. Tome Septième. Paris, 1868, pag. 363-367.

Esposizione di un metodo analogo a quello proposto in antecedenza (CXXXVI) ed applicato alla determinazione delle radici immaginarie.

CXLIII. *Ueber die mechanische Construction einiger Curven welche sich zur Auflösung des Problems von der Duplication des Würfels verwenden lassen* von Dr. LUDWIG MATTHIESSEN. Nell' » *Archiv der Mathematik und Physik* edito da GRUNERT. Achtundvierzigster Theil. Greifswald, 1868, pag. 229-235.

CXLIV. *Ueber die Construction der Durchschnittpunkte von Kreisen und Kegelschnittslinien.* Von Prof. R. NIEMTSCHIK. Nei » *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften.* » LIX. Band. II Abtheilung. Jahrgang, 1869. Wien, 1869, pag. 39-47.

CXLV. *Ueber die Construction der Durchschnittpunkte zweier Kegelschnittslinien.* Von Prof. R. NIEMTSCHIK. Nei » *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der k. Akademie der Wissenschaften.* » LIX Band. II Abtheilung. Jahrgang, 1869. Wien, 1869, pag. 481-494.

Digitized by Google

CXLVI. *Ueber das Zusammentreffen der graphischen mit der goniometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen* von ZIEGLER. Nella » *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* » edita da HOFFMANN. Erster Jahrgang. Leipzig, 1870, pag. 212-215.

CXLVII. *Sur la résolution trigonomètrique de l'équation du troisième degré* par M. A. DE SAINT GERMAIN. Nei » *Nouvelles Annales de Mathématiques* » Deuxième Série. T. X. Paris. 1871, pag. 63-66.

Si dimostra che la risoluzione trigonometrica delle equazioni di terzo grado nel caso in cui tutte le radici sono reali è applicabile anche al caso in cui due delle radici sieno immaginarie.

CXLVIII. *Om Ligninger, der löses ved Kvadratrod, med Anveldsee paa Problemers Lösning ved Passer og Lineal* af J. PETERSEN. Kjobenhavn, 1871.

Di questo scritto la sola seconda parte interessa il nostro argomento, riguardando questioni generali sulla possibilità di eseguire determinate costruzioni, in certe condizioni, mediante la riga ed il compasso, ed ancora la costruzione dei luoghi geometrici con una serie di esempii assai opportuni.

CXLIX. *Goniometrische Auflösung der numerischen Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grades* von KRAUSE. Marburg, 1872.

CL. *On the solution of equations by mechanical means* by A. B. KEMPE. Nel » *Messenger of Mathematics.* » New Series. Vol. II. London and Cambridge, 1872, pag. 51-52.

Trasformata l'espressione:

$$a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n = 0$$

in

$$c_0 + c_1 \cos\theta + \ldots + c_n \cos n\theta = 0$$

la si rappresenta graficamente mediante un roteggio.

CLI. *L'intégrateur* de M. MARCEL DEPREZ. Nel giornale » *Les Mondes.* » Deuxième Série, 10 Année. T. XXVII. Paris, 1872. pag. 12.

Digitized by Google

Applicazione del planimetro dei momenti di AMSLER alla risoluzione meccanica delle equazioni.

CLII. *Considerazioni sulla Matematica pura* del prof. GIUSTO BELLAVITIS. Nelle » *Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* » Vol. XVII. Venezia, 1872, pag. 110-111.

Ricerca delle radici delle equazioni mediante la costruzione grafica di una curva. Veggasi a tale proposito l'opera sotto il numero LX.

CLIII. *Zur trigonometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen* von SCHERLING. Nella » *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* » edita da HOFFMANN. Leipzig, 1874, pag. 52-53.

L'equazione $x^2 \pm ax + b = o$ per $b < \frac{1}{4} a^2$ viene identificata all'equazione:

$$(2r\ sen^2\ a)^2 - 2r\ (2r\ sen^2\ a) + r^2\ sen^2\ 2a = o$$

essendo r arbitrario, e l'equazione $x^2 \pm a\ x - b = o$ per $b < \frac{1}{4} a^2$, con:

$$(r\ tang\ a)^2 + 2r\ cotang\ 2a\ (r\ tang\ a) - r^2 = o$$

Per $b > \frac{1}{4} a^2$ si paragona la data equazione coll'equazione:

$$x^2 - 2r\ cos\ \phi\ .\ x + r^2 = o$$

CLIV. *Résolution de l'équation du troisième degré à l'aide d'un système articulé.* Note de M. SAINT-LOUP. Nei » *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* » Tome Soixante-Dixneuvième. Juillet-Décembre 1874. Paris, 1874, pag. 1323-1324.

Dato un quadrilatero articolato, se si prolungano due dei suoi lati opposti, il loro punto d'incontro determina due segmenti x ed y e si ha fra queste lunghezze una relazione, che, ordinata secondo le potenze di x, è:

$$ax^3 + \delta\ (a - y)\ x^2 - \{ay^2 - (\gamma^2 - \beta^2 - a^2 - \delta^2)\ y + (a + \delta)\ \beta^2\}\ x + \delta y^3 + \delta a y^2 - a\delta\beta^2 = o$$

relazione che può identificarsi con una equazione qualunque del terzo grado e siccome il numero dei parametri variabili oltrepassa il tre, così possono stabi-

Digitized by Google

lirsi fra loro alcune relazioni atte a semplificare l'equazione. — Questo principio è posto a base della costruzione d'un semplicissimo strumento, il quale, convenientemente disposto, potrebbe anche fornire le radici d'una equazione completa.

CLV. *Graphical solution of cubic equations* by A. W. PHILIPPS. Nel periodico » *The Analist* » edito da HENDRICKS. T. I. JOWA, 1874, pag. 113-116.

Riduce preventivamente l'equazione alla forma $x^3 \pm x + a = o$ ed indi la risolve mediante una tavola appositamente costruita.

CLVI. *Ueber den Amsler' schen Polar-Planimeter und über graphisch-mechanisches Integriren im Allgemeinen* von CHR. NEHLS. Ergänzter Separat-Abdruck aus der » Civilingenieur » Band XX. Heft. 2. Leipzig, 1874.

Contempla la incidentale costruzione di parecchie equazioni.

CLVII. *Construction der reellen Wurzeln einer Gleichung vierten oder dritten Grades mittelst einer festen Parabel* von R. HOPPE. Nell' » *Archiv der Mathematik und Physik* ». Sechsundfünfzigster Theil. Leipzig, 1874, pag. 110-112.

Le ordinate dei punti d'intersezione della parabola $y^2 = 2x$ col cerchio:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma$$

sono le radici reali dell'equazione biquadratica:

$$z^4 + az^2 + bz + c = o$$

se per d affatto arbitraria sia:

$$y = dz \quad , \quad 4(1 - a) = d^2 a \quad , \quad -8\beta = d^3 b \quad , \quad 4(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) = d^4 c .$$

Per rappresentare le radici reali dell'equazione cubica:

$$z^3 + az + b = o$$

basta porre $c = o$, vale a dire far passare il cerchio per il vertice della parabola.

Applicando all'equazione:

$$z^3 - \frac{3}{4} z = \frac{1}{4} \cos 3\phi$$

le cui radici sono:

$$\cos \phi \quad , \quad \cos\left(\phi + \frac{2}{3}\pi\right) \quad , \quad \cos\left(\phi - \frac{2}{3}\pi\right)$$

Digitized by Google

e per le quali:

$$\alpha = 1 + \frac{3}{16}\delta^2 \quad , \quad \beta = \frac{\delta^3}{32}\cos 3\phi$$

si ha un modo di eseguire la trisezione dell'angolo mediante una parabola fissa.

CLVIII. *Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne* par M. J.-J. SYLVESTER nella » *Revue Scientifique de la France et de l'Étranger.* » N. 21. — 21 Novembre 1874. Quatrième année. 2.e Série. Paris, 1874, pag. 490-498.

L'Autore vi accenna ad un suo strumento fondato sulla proprietà del sistema PEAUCELLIER e destinato alla risoluzione delle equazioni cubiche.

CLIX. *Elementi di Calcolo grafico* del prof. LUIGI CREMONA. Torino, 1874, pag. 45-50.

Risoluzione delle equazioni numeriche secondo il metodo di LILL (CXXXV-CXXXVII)

CLX. *Sur les systèmes de tiges articulées* par M. V. LIGUINE. Nei » *Nouvelles Annales de Mathematiques* ». Deuxième Série. Tome Quatorzième. Paris, 1875, pag. 529-560.

Quantunque la presente memoria non si occupi *ex-professo* della risoluzione meccanica delle equazioni mercè i sistemi articolati, pure ne contiene gli elementi.

CLXI. *Des systèmes articulés simples et multiples et de leurs applications* par M. SAINT-LOUP. Nei » *Mémoires de la Société d'émulation du Doubs* » 1875.

Risoluzione meccanica delle equazioni.

CLXII. *Principii di Aritmografia* di G. SOLIN. Nel periodico boemo: » *Casopis pro Pěstování mathematiki a fisiky.* T. IV. Praga, 1875.

Questo lavoro non ho letto, perchè steso in boemo, lingua che non conosco, so tuttavia per comunicazione d'un amico, che vi si tratta fra le altre cose della soluzione grafica delle equazioni biquadratiche.

CLXIII. *Untersuchungen über algebraische Gleichungen* von Dr. ALFRED SIEBEL. Nell' » *Archiv der Mathematik und Physik.* »

Digitized by Google

Sechsundfünfzigster Teil. Leipzig, 1874, pag. 422-436. — Siebenundfünfzigster Teil. Leipzig, 1875, pag. 73-88.

Di questo lavoro, al quale l'Autore dicesi avviato dal lavoro del GRUNERT sulla risoluzione delle equazioni del 5.° e 6.° grado mediante costruzione secondo il metodo di DESCARTES (CXVII) veggasi in particolare l'articolo I.

CLXIV. *Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré* par M. G. FOURET. Nel » *Bulletin de la Société Mathématique de France* ». Tome Troisième. Année 1874-75. Paris, 1875, pag. 93-95.

Esposizione d'un metodo grafico di falsa posizione, mediante il quale si arriva ad una costruzione che in confronto di quella proposta da CHASLES (CXI) presenta il vantaggio di fornire ad un tempo i valori di tutte le incognite, anzichè determinarli isolatamente.

CLXV. *Méthode graphique pour resoudre un système quelconque de* n *équations du premier degré à* n *inconnues* par M. G. FOURET. Nelle pubblicazioni della » *Association française pour l'avancement des Sciences. Congrès de Nantes.* » Paris, 1875.

Il metodo qui svolto riconduce immediatamente la risoluzione d'un sistema di n equazioni del primo grado ad n incognite alla risoluzione di due sistemi di $n - 1$ equazioni ad $n - 1$ incognite e si deduce da questi due ultimi sistemi risolti una costruzione grafica semplicissima dei due primi. I due sistemi ausiliari di $n - 1$ equazioni si trattano allo stesso modo del sistema proposto e per tal maniera l'esposto metodo risolve completamente la questione.

CLXVI. *Construction géométrique des moments fléchissants sur les appuis d'une poutre à plusieurs travées solidaires.* Note de M. G. FOURET. Nei » *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* ». Tome Quatre-vingtième. Janvier-Juin, 1875. Paris, 1875, pag. 550-553.

Risoluzione grafica del sistema di equazioni dalle quali si deducono ordinariamente i momenti inflettenti sugli appoggi d'una travata rettilinea.

CLXVII. *Détermination graphique des moments de flexion d'une poutre à plusieurs travées solidaires* par M. G. FOURET. Negli » *Annales des Ponts et Chaussées* ». Tom. XI. Paris, 1875.

Digitized by Google

Esposizione particolareggiata e diffusa dell' argomento trattato al n. CLXIV.

Veggasi ancora intorno alla risoluzione di questo medesimo problema una comunicazione fatta dallo stesso Autore alla *Société des Ingénieurs Civils* nella seduta 21 Aprile 1876 (*Comptes Rendus de la Société*, pag. 113-118) ed inoltre: Ponts métalliques à poutres droites. *Méthode simple et rapide pour la détermination graphique des moments de flexion. Application à un Pont de 220m en quatre travées sur l' Yonne*, par M. G. FOURET. Paris, Septembre 1875: e finalmente il periodico: *L' Ingegneria Civile e le Arti Industriali.* Anno II.

CLXVII. *Sur la résolution des équations numériques* par M. ÉDOUARD COLLIGNON. Nelle pubblicazioni della » *Association française pour l' avancement des Sciences. Congrès de Nantes* ». 1875.

Questo metodo consiste nel « mettre l' équation proposée sous une forme qui contribue à augmenter les accidents de la fonction entre les limites òu sont comprises les racines, de manière à rendre plus évidentes les intersections qui definissent les valeurs cherchées. »

In fine di questa nota interessantissima si contiene una ingegnosa estensione al quarto grado del metodo dato da LALANNE (CI) per il terzo. Fondandosi sul fatto che l' equazione del quarto grado, privata del suo secondo termine, può essere preparata in modo che il coefficiente della seconda potenza dell' incognita sia uguale a $\pm$ 1, quando non è nullo, l' Autore riduce alla costruzione di tre abachi rettilinei, stabiliti una volta per sempre, la risoluzione delle equazioni del quarto grado.

CLXIX. *Graphical solution of quadratic equations* by R. F. DAVIS. Nel » *Messenger of Mathematics* ». New Series. Vol. V. London and Cambridge, 1875, pag. 17-18.

Metodo di approssimata soluzione d' una equazione quadratica, mediante una striscia di carta che porta una divisione numerica.

CLXX. *Die graphische Statik* von C. CULMANN. Zweite neu bearbeitete Auflage. Erster Band. Zürich, 1875, pag. 82-85.

Esposizione succinta dei principii della geometria anamorfica applicata alla risoluzione delle equazioni.

CLXXI. *Géométrie arithmographique. Exposé d' une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés* par LÉON LALANNE. Nei » *Comptes Rendus hebdoma-*

Digitized by Google

daires des Séances de l'Académie des Sciences. Tome Quatrevingt et unième, pag. 1186-1188; pag. 1243-1246. Juillet-Décembre 1875. Tome Quatrevingtdeuxième, pag. 1487-1490. Janvier-Juin, 1876.

Se in una equazione numerica si suppongono veriabili due dei coefficienti dell' incognita, può tracciarsi un disegno risultante esclusivamente di linee rette le cui quote permettono di determinare ad occhio i valori approssimati delle radici dell' equazione proposta. Questa soluzione dà luogo ad alcuni raffronti assai interessanti con ciò che si sa di certe funzioni delle quali si occupa l'algebra superiore. Così, uguagliando a zero il discriminante d'una equazione in z nella quale ai coefficienti numerici dei termini in z' ed in z^0 si sostituisce x e y, si ha l'equazione d' una curva che gode delle seguenti proprietà: la sua classe è sempre uguale al suo grado: essa è tangente all' asse delle x all' origine: la tangente dell' inclinazione coll' asse delle x d' una retta qualunque condotta tangenzialmente a questa curva per un punto (x', y') esprime il valore numerico di una delle radici della proposta, nella quale i coefficienti presi per variabili sarebbero rispettivamente sostituiti dai valori determinati x' ed y'. A questa proprietà e ad altre congeneri la curva in questione deve il suo appellativo di *solutiva,* da non confondersi con quello di *risolvente* che EULERO (*De formis radicum*, ecc. *Comm. Arcad. Petrop. vet.* VI. pag. 213, 1739) attribuì ad una equazione d' indole diversa. Non è d' altronde necessario avere l' espressione del discriminante per costruire la *solutiva*, poichè la proposta equazione basta per tracciare quante rette si vogliono, tangenti a questa curva, per collocare a posto i punti di tangenza. per calcolarne i raggi di curvatura, ecc.

CLXXII. *Over stangenstelsels meer in het bijzonder over het zesstangen-stelsel of de ruit van Peaucellier*, door J. D. C. M. DE ROOS L. K. Inst. I. Dal » *Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs* » 1875-1876. Te' s Gravenhage, 1876. *Eenige mededeelingen en opmerkingen over stangenstelsels* door J. D. C. M. DE ROOS. Dal » *Tijdschrift van het Koniniklijk Instituut van Ingenieurs* » 1876-1877. Te's Gravenhage, 1877.

Dopo aver considerato il sistema di PEAUCELLIER come strumento di calcolo per ottenere valori reciproci, per l' estrazione di binomii quadratici, per l' elevazione al quadrato e per l' estrazione della radice cubica, viene a parlare dei servigi che potrebbe rendere nella risoluzione delle equazioni di un grado qualunque. Il metodo consiste essenzialmente nel trasformare opportunamente l' equazione, avuto riguardo alla proprietà per la quale in ogni equazione completa ed ordinata il coefficiente del secondo termine è uguale alla somma delle radici prese

Digitized by Google

con segno contrario; il coefficiente del terzo termine è uguale alla somma dei loro prodotti a due a due e il coefficiente del quarto termine è uguale alla somma dei loro prodotti a tre a tre, presi con segno opposto, ecc. che finalmente il terzo termine è uguale al prodotto delle radici, o a questo prodotto preso con segno contrario, a seconda che il grado dell'equazione è pari o dispari.

Nota inoltre l'Autore che la medesima combinazione, la quale serve alla risoluzione delle equazioni, porge la soluzione del famoso problema della trisezione dell'angolo.

Esprime finalmente l'avviso che in genere tali soluzioni possono essere ottenute mediante sistemi notevolmente semplificati, che anzi la risoluzione delle equazioni superiori possa ottenersi con essi assai più facilmente che non col metodo di LILL (CXXXV-CXXXVII).

CLXXIII. *Note sur l' emploi des systèmes articulés à liaison complète, en géométrie, en mécanique et dans les sciences appliquées*, par M. PEAUCELLIER. Nel » *Memorial de l' Officier du Génie* ». N. 25, 2.° Série, Tome X. Paris, 1876, pag. 369-389.

Dimostra come i sistemi articolati potrebbero servire a costituire degli apparecchi proprii alla risoluzione meccanica delle equazioni algebriche di grado qualunque, mettendo del resto in evidenza che il meccanismo, al quale converrebbe ricorrere a quest' uopo richiederebbe un numero di pezzi soverchiamente grande per essere di pratica utilità, appena si elevasse un po' il grado dell'equazione.

CLXXIV. *Die Geometrie als Hülfsmittel zur Auflösung höherer algebraischen Gleichungen* von PFEIFFER. Siegen, 1876.

CLXXV. *Mathematisch-physikalische Miscellen* von F. H. STOLL. Bensheim, 1876.

Tratta, fra gli altri argomenti, della estensione delle regole di falsa posizione nei rapporti coi metodi di approssimazione di NEWTON. A pag. 7-13 tratta in particolare della risoluzione trigonometrica delle equazioni cubiche.

CLXXVI. *Notice sur les travaux et titres scientifiques* de M. LÉON LALANNE. Paris, 1876, pag. 25-26.

Esposizione storica dei lavori dell'Autore sulla applicazione della geometria anamorfica alla risoluzione delle equazioni numeriche di grado qualunque.

Digitized by Google

CLXXVII. *Nota di calcolo grafico sulla risoluzione delle equazioni di primo grado* per E. Isè. Nel » *Giornale di Matematiche* » di Battaglini. Anno XIV. Napoli, 1876, pag. 180-189.

Risoluzione delle equazioni di primo grado a più incognite con metodo costruttivo sopra principii di geometria projettiva.

CLXXVIII. *Note sur une méthode de graduation représentation de courbes par des lignes droites* par Alb. Kapteyn. Dalla » *Revue Universelle des mines* » 1876. Liége 1876.

Principii di geometria anamorfica.

CLXXIX. *Mechanical solution of a cubic by a quadrilateral linkage* by A. G. Greenhill. Nel » *Messenger of Mathematics* » New Series. Vol. V. London and Cambridge, 1876, pag. 162-163.

Esposizione del metodo proposto da Saint-Loup (CLIV, CLIX).

CLXXX. *Mechanismen zur Auflösung höherer Gleichungen* von H. Wehage. Nella » *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure* ». Band XXI. Berlin, 1877. Col. 105-114.

I metodi proposti dall'Autore hanno per iscopo di costruire la funzione:

$$y = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n$$

e servono immediatamente a trovare per ogni valore dell'argomento quello della relativa funzione, conducendo a tracciare la curva $y = f(x)$ e somministrando una idea complessiva dell'andamento della funzione y, come pure i suoi valori massimi e minimi, nonchè le radici reali dell'equazione $y = o$. Uno degli apparecchi meccanici descritti è destinato ad una funzione del quarto grado della forma generale:

$$y = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 .$$

CXXXI. *Lezioni di Statica grafica* per Antonio Favaro. Padova 1877, pag. 349-363.

Esposizione succinta dei metodi di Lalanne (CI), di Lill (CXXXV-CXXXVII) e di Bellavitis (LX, CLII).

Digitized by Google

CLXXXII. *Über graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik* von CHR. NEHLS. Hannover, 1877.

CLXXXIII. *Algèbre Tachymètrique* par M. LAGOUT. Paris, 1877.

È il metodo della cosidetta tachimetria del quale l'Autore si servì per la geometria e che in seguito applicò anche all'algebra per quanto si riferisce alle equazioni di primo e secondo grado. Egli ha rappresentato le quantità astratte che figurano nelle relazioni algebriche con una bilancia, nei cui piatti si dispongono dei pesi per equilibrare i corpi da pesare. Quando la bilancia è in equilibrio si ha la rappresentazione d'una equazione, nella quale i pesi costituiscono le quantità note, mentre il corpo da pesare rappresenta l'incognita di cui si cerca il valore. Il procedimento di risoluzione consiste nel cercar modo di isolare questo corpo straniero che deve rimanere solo sul piatto, ed il suo peso è allora determinato dalla somma dei pesi che occupano l'altro piatto. Si riesce così a *giustificare* in modo semplice è vero, ma piuttosto strano le regole dei cangiamenti di segno nell'algebra. Del rimanente il metodo non può in alcun modo proporsi come adatto alla indagine scientifica.

CLXXXIV. *Die graphische Lösung technischer Aufgaben für Architekten, Ingenieure, Studirende technischer Lehranstalten und gebildete Bauhandwerker* von A. FOEPPL. Leipzig, 1877, p. 15.

Risoluzione grafica delle equazioni superiori.

CLXXXV. *Het differential parallelogramm* door J. D. C. M. DE ROOS L. K. Inst. I. Dal » *Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs* » 1877-1878. Te's Gravenhage, 1878.

Costruzione meccanica delle equazioni.

CLXXXVI. *Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques ou mathématiques à trois variables, avec des applications à l'art de l'ingénieur et à la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*, par M. LÉON LALANNE. Resumé historique extrait des notices relatives aux travaux des Ponts et Chaussées, pubbliées par le Ministère des Travaux publics à l'occasion da l'Exposition Universelle de 1878. Paris, M DCCC LXXVIII.

Digitized by Google

Esposizione riassuntiva del metodo svolto in altra memoria (CLXVI) coll'aggiunta di figure illustrative.

CLXXXVII. LÉON LALANNE. *Sur la méthode géométrique pour la solution des équations numériques de tous les degrés.* Nei » *Comptes-Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* » Tome Quatrevingt-septième. Paris, 1878, pag. 157-159.

Dimostra che la rassomiglianza fra il suo metodo (CLXXI) e quello esposto da KRONECKER nei *Monatsberichte* della Accademia di Berlino è più apparente che reale, perciò che l'esempio scelto da quest'ultimo non troverebbe il suo analogo in una equazione completa superiore al quarto grado, mentre il modo di risoluzione proposto da LALANNE, senza ricorrere a concetti d'analisi superiore, è applicabile ad una equazione di grado qualunque.

PROF. A. FAVARO.

Digitized by Google

AVVERTENZA

Il presente scritto era già compiuto, ed era anzi terminata la revisione delle prove di stampa, quando venne alla luce la voluminosa opera intitolata: *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* von LUDWIG MATTHIESSEN, ord. Professor an der Universität zu Rostock. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1878. Questo volume di oltre mille pagine potrebbe a buon diritto intitolarsi una enciclopedia delle equazioni letterali e sviluppa l'argomento impreso a trattare in modo quasi assolutameate completo. Se tale ingente lavoro fosse stato dato alle stampe qualche mese prima, assai probabilmente mi sarei astenuto dal dare alla luce questo mio studio: ciononpertanto mi permetto di ritenerlo non assolutamente inutile, perciocchè in esso sembrami trovino un certo sviluppo alcune fasi dello svolgimento storico, trascurate dall'egregio professore di Rostock, non per altro se non perchè essendomi io ristretto a considerare uno solo ed assai speciale fra i modi di trattazione delle equazioni, mi fu possibile dare alle mie ricerche una maggiore estensione. Anche dal lato delle fonti e della bibliografia in genere, avrei potuto giovarmi di parecchie indicazioni fornite dal prof. MATTHIESSEN, particolarmente per ciò che concerne la risoluzione trigonometrica delle equazioni, d'altro canto parmi riesca meno incompleta la bibliografia da me offerta relativamente alla risoluzione grafica ed a quella meccanica. Se le indicazioni offerte dal prof. MATTHIESSEN sono esatte, io sarei pertanto caduto in una omissione ed in una inesattezza. Mancandomi il tempo materiale per eseguire le necessarie verifiche, mi accontento di qui registrare con riserva l'una e l'altra.

L'omissione riguarderebbe il *Kiu-tschang*, opera assai verosimilmente compilata nella China intorno all'anno 2000 avanti Cristo da LISCHAU, ministro dell'imperatore HWANG-TI e nella quale (secondo quanto asserisce il prof. MATTHIESSEN a pag. 921 del citato suo lavoro) si conterrebbe una trattazione puramente geometrica dell'algebra quadratica.

Digitized by Google

L'inesattezza consisterebbe nell'aver io asserito, di conformità a quanto si ritiene dai più autorevoli arabisti, che la prima traduzione araba di DIOFANTO fu fatta da ABUL WEFA nella seconda metà del decimo secolo, mentre invece il prof. MATTHIESSEN afferma, senza però citare particolareggiatamente la fonte alla quale attinge, che, secondo IBN ABI OSEIBIA, il matematico KOSTA BEN LUCA (900) scrisse un « Buch betreffend Uebersetzung des Diophant über *al-djebr w' almokabala* ». (Op. cit. pag. 289, 923, 969).

Digitized by Google

OSSERVAZIONI E COMMENTARII

SOPRA

VARII PUNTI DI CHIRURGIA

In questi ultimi anni sono state fatte molte objezioni alla statistica applicata alle scienze medico-chirurgiche: io sono fermamente convinto che con essa in un tempo più o meno lontano potremo giungere alla soluzione di molte questioni rimaste ancora dubbiose. È con questo intendimento che io do principio alla pubblicazione d' una statistica della mia pratica medico-chirurgica: essa è ancora poco estesa, ma spero, contiuuando lo stesso lavoro, di arricchirla a poco a poco. In questa prima parte parlerò di tutti i casi retativi ai tumori erettili, o come poco propriamente dicono alcuni, angectasia o telenangectasia: dico pensatamente tutti i casi poichè la statistica non può essere utile se non è completa. — Dopo questa prima parte verranno i Commentarii sopra alcuue lesioni della sifilide costituzionale, sulle ernie strozzate, sulle malattie dell' utero, dell' uretra e della vescica, sopra alcuni casi di deremopatie, e sulle fratture. — Quando s' intraprende un lavoro di questa natura non si deve ricercare la lode, non paventare la critica. Bisogna essere sin-

Digitized by Google

ceri: se si raccoglie l' approvazione, tanto meglio; se poi ne conseguita biasimo o l' indifferenza si può sempre dire: *credidi propter quod loquutus sum vobis.*

PARTE I.ª

Tumori erettili

Ad ogni chirurgo è noto quanto sia difficile la guarigione dei tumori erettili, di quei neoplasmi formati dallo sviluppo anormale di capillari, di piccole arterie, di piccole vene comunicanti fra loro sia direttamente sia indirettamente col mezzo di areole formatesi nel tessuto celluloso. Questi tumori sono da alcuni autori moderni denominati angiomi, telangiectasie, angiectasie: però è da preferirsi la denominazione di Angiomi proposta da Wirchow, poichè non si tratta solamente di vasi preesistenti, ma di vera neoformazione di vasi. Il Prof. Porta dimostrò meglio d'ogni altro l' intima struttura dei tumori erettili: egli fece conoscere in modo evidentissimo che l' angioma tanto arterioso quanto venoso consta di reti e di gomitoli vascolari circondati da tessuto connettivo: il sangue circola in questi vasi senza soluzione di continuità dei vasi stessi contrariamente a ciò che fu creduto da molti autori. Alcuni di questi tumori si sviluppano durante la vita intra uterina, altri compariscono dopo la nascita per lo più senza una causa ben nota. I tumori erettili sono posti al disotto della pelle, nel tessuto connettivo e possono estendersi ai muscoli, al tessuto fibroso. Nel museo Dupuytren osservai un bambino il quale avea grossi tumori erettili non solo alla testa ma eziandio al fegato ed al polmone. Essi sono ora sessili ora peduncolati. Nel 1868 vidi col Dott. Giuseppe Porta un giovine il quale presentava tre tumori erettili peduncolati in guisa da somigliare ad un fungo con parecchie teste. Alcuni restano sta-

Digitized by Google

zionarii per lunghissimo tempo, altri crescono con molta rapidità. Cominciano ordinariamente con una macchia piccola di color rosso vermiglio, o rosso cupo, circoscritta, ed allora manca qualsiasi elevatezza della pelle. Questa forma si osserva nei primi mesi dopo la nascita, oppure ha luogo in sul cominciare della pubertà.

Per lo più è al disotto delle macchie cutanee che si sviluppa il tumore: dapprima di volume assai piccolo, limitato, mobile: la pelle distesa si assottiglia e prende un color paonazzo o brunastro. Il tumore può restare sottocutaneo senza che la pelle presenti nessun cambiamento: altri cominciano dalle parti profonde e giungono alla pelle da essi sollevata. Questi ultimi sono molli, cedevoli alla pressione, spesso riducibili e danno una fluttuazione assai oscura. I tumori erettili venosi non presentano moto di espansione nè fremito, nè battiti. Negli arteriosi si sente un rumor di soffio particolare sempre però meno intenso di quello che si ha nell' aneurisma arterioso, e nell' aneurisma artero-venoso.

Nei bambini questi tumori spesso s' infiammano senza che si possa conoscerne la causa. In una bambina di quattro mesi affetta da tumori erettili alla natica destra l' infiammazione susseguì alla cauterizzazione fatta col nitrato d' argento usato per cessare una leggiera effusione di sanguo. Il tumore aveva avuto origine da una piccola macchia rossastra la quale a poco a poco crebbe e si trasformò in un tumoretto grosso come una mandorla. In seguito ad una contusione uscì un poco di sangue: il padre farmacista applicò sull' escoriazione il nitrato d' argento. Il neoplasma s' infiammò, poi venne la suppurazione e la bambina in brevissimo tempo interamente guarì. Il chirurgo deve quindi sapere che questi tumori qualche volta s' infiammano, poi si esulcerano e danno luogo ad emorragie più o meno abbondanti e frequenti: in altri casi si formano delle vegetazioni fungose che possono simulare un epitelioma esulcerato.

Nei bambini come nei fanciulletti la diagnosi degli angiomi è quasi sempre facile. Però si possono confondere con altri neoplasmi, o con malattie di natura diversa. Citerò il

Digitized by Google

caso di Guersant ed un' altro osservato insieme al Dott. Comelli egregio medico-chirurgo del Finale. Un bambino avea all' angolo interno doll' orbita destra un piccolo tumore con i caratteri di un tumore erettile sottocutaneo. La cura fu fatta con parecchi setoni filiformi posti in mezzo al tumore: pooo dopo il bambino fu preso da fenomeni cerebrali gravisimi che ben presto lo condussero in fin di vita. L' autopsia fece conoscere che quel tumore era un encefalocele il quale, attraversata la sutura frontosfenoidale, era venuto a fare un rialzo all' angolo interno dell' orbita.

Causa di errore nella diagnosi è una complicazione morbosa sulla quale non si è sufficientemente richiamata l' attenzione dei pratici. Non è raro che il tumore erettile venoso si associi allo sviluppo di tessuto grassoso: si ha allora un tumore che presenta i sintomi di due neoplasmi, del lipoma e del tumore erettile. Ciò ho osservato in un giovine di 15 anni curato dal Dott. Comelli. Si trattava di un tumore sviluppatosi alla parte laterale destra del naso: il tumore era sottocutaneo, del volume di una piccola noce, cresciuto lentamente, senza alcuna alterazione della pelle. Alla palpazione si avea la sensazione di un tessuto molle non fluttuante: il tumore non era riducibile, nè pulsante. Diagnosticammo un lipoma, od una cisti scierosa sottocutanea a pareti grosse, ed assai distesa dal liquido contenuto. Senonchè, fatta l' incisione della pelle con un bistorì a lamina stretta vedemmo uscire con molta copia e violenza il sangue, e potemmo osservare uu tassuto grassoso misto a tessuto erettile. — Cessata l' emorragia col percloruro di ferro e colla compressione, ottenemmo la guarigione del tumore colla pasta di Canquoin.

I tumori erettili venosi possouo dar luogo ad altri errori di diagnosi: ed ecco un caso molto singolare. Nel 1866 vidi un sacerdote che aveva un tumore alla regione sottoclavicolare destra: il tumore presentava una consistenza ineguale, molle in alcuni punti, resistente in altri. La pelle di color violaceo, tesa ed assottigliata. Esaminata la cavità dell' ascella, ivi esisteva un

Digitized by Google

altro tumore eguale al primo. Era stato veduto da altri medici i quali aveano ammesso un encefaloide giunto al periodo di rammollimento. Anzi un chirurgo molto audace che non conosceva alcun rimedio superiore al coltello, era d' avviso di farne l' estirpazione benchè ne riconoscesse i gravissimi pericoli: voleva tagliare il muscolo grande pettorale trasversalmente, scoprire il tumore e levarlo. Io sostenni che qualunque operazione era contro-indicata, trattandosi di tumore erettile il quale per la flebite della rete venosa era aumentato di volume: la pelle era di color nerastro per la dilatazione delle vene periferiche. — Era quindi un tumore erettile infiammato che assomigliava ad un encefaloide. L' infermo non si assoggettò ad alcuna operazione: i grumi sanguigni vennero assorbiti ed il tumore diminuì notevolmente.

Molti chirurghi, ripetendo quanto avea insegnato il Dupuytren non ammettono che questi tumori nei bambini possano guarire spontaneamente. Ciò è un errore. Io ho osservato due casi di angiomi: uno alla fronte in un ragazzo di cinque anni: l' altro alla gamba sinistra di un giovinetto di 12 anni. Amendue s' infiammarono e guarirono colla sole forze della natura. Il pratico non deve esser troppo sollecito a curar gli angiomi nei fanciulli purchè non mostrino una tendenza a crescere rapidamente. Il pratico deve in questi casi sempre sperare in una guarigione spontanea.

Passo ora a dire della terapeutica degli angiomi. — I mezzi curativi si possono ridurre a tre grandi metodi.

Il primo può chiamarsi atrofico e comprende l' uso degli astringenti, la compressione, il freddo, l' allacciatura del tronco arterioso che fornisce le arterie del tumore, l' allacciatura isolata dei rami arteriosi che alimentano il tumore, e le incisioni periferiche fatte attorno al tumore stesso.

Il secondo metodo può dirsi perturbatore o modificatore e comprende moltissimi processi: la galvano puntura, le injezioni coagulanti, la tintura di jodio, la vaccinazione, il setone, l' ago puntura, la cauterizzazione filiforme.

Digitized by Google

Il terzo metodo consiste nella distruzione completa del tumore e comprende l' allacciatura semplice o multipla, la cauterizzazione, l' estirpazione.

Tutti questi processi sono descritti nei trattati di chirurgia. Io quindi non parlerò che di quelli che mi sono riusciti meglio nella cura dei tumori erettili specialmente nei bambini.

I processi chirurgici più brillanti danno spesso luogo a pericoli ed a rovesci disastrosi, è perciò che io ho sempre cercato di volgarizzar quei metodi che cagionano raramente degli accidenti. Fedele a questi principi io mi sono servito nella cura delle macchie e dei tumori erettili della vaccinazione fatta con processi speciali, del caustico di Vienna, applicate con certe modificazioni poco note, di cui dirò più innanzi.

Nella memoria pubblicata nel 1861 dal Prof. Porta parlando della terapeutica dei tumori erettili si dichiara favorevole all'estirpazione fatta col bisturi, e tiene in poco o nessun conto altri metodi più semplici che applicati opportunamente possono condurre a guarigioni complete e durevoli. — Secondo il Porta l' estirpazione deve considerarsi come il metodo generale. Senonchè il Porta riconosce non poche contro-indicazioni, e tra queste, quando il tumore occupa una regione intera, quando è posto profondamente nella cavità dell' orbita, nella cavità orale: quando per levarlo il chirurgo debba sacrificar un' organo come la palpebra, il labbro, la guancia, e in fine quando occupando la pelle, racchiuda un gran numero di vasi nel qual caso sarebbe a temersi la flebite.

Coll' estirpazione, scrive il Porta, si rimovono rapidamente e radicalmente gli angiomi. — Ma, sebbene strenuo propugnatore di questo metodo, nullameno ammette non poche contro-indicazioni. Fatta l' eliminazione dei casi non operabili col bistorì, la massima parte dei tumori operati dal Porta si riduce a tumori superficiali, di piccolo volume che certo si possono estirpare senza gran pericolo: ma io dico che questi tumori potevano essere guariti con processi più innocui, i quali hanno il vantaggio di non

Digitized by Google

lasciar cicatrici come avviene sempre dopo l' estirpazione. In fatti gli angiomi sono mal limitati: ogni lesione del tessuto cavernoso è causa di enormi emorragie che nei bambini, prontamente si rendono pericolose per la vita. Poi uno svantaggio dell' operazione cruenta di questi tumori è quello che consiste nella perdita di pelle per cui nasce in seguito una grande cicatrice. Aggiungiamo che la suppurazione nei tumori cavernosi porta seco gravi pericoli, poichè necessariamente conduce a trombosi venose, e lo sminuzzamento dei trombi termina coi noti sintomi ed esiti pioemici. — Sono poi particolarmente a temersi le metastasi purulente negli angiomi dei tegumenti del cranio: sgraziatamente la meningite purulenta, dopo l' estirpazione di essi, è stata spesso osservata.

Parlando dell' inoculazione del vaccino il Porta dice che venne tentata in Francia, in Inghilterra ma con esito infelice. Infatti, continua il Porta, l'azione del virus vaccino è troppo superficiale è quindi facilissima la riproduzione del tumore.

Gli autori classici di chirurgia, il Velpeu, il Nelaton, il Vidal, il Ranzi, il Regnoli, l' Ericsen, il Billroth nelle loro opere appena ne danno un cenno brevissimo. Mi sembra che l'opinione del Porta, e dei chirurghi or ricordati non sia vera: quando l' inoculazione sia ben fatta, ed or vedremo come debba praticarsi, quando si applichi in casi di tumori poco voluminosi, essa da luogo a guarigioni radicali. Ed oggi che la chirurgia tende sempre più a divenire conservatrice, io credo che non solo le macchie erettili ma anche molti tumori possono essere guariti coll' inoculazione fatta sul tumore stesso: essa suscita il processo infiammatorio a cui tien dietro l' obliterazione di un gran numero di vasi, e così si ha la guarigione. Le pustole si sviluppano come quando l' inoculazione è stata fatta in altre parti, e cadute le croste, non si vede più nel posto del tumore che le cicatrici ordinarie della vaccinazione.

Si ottiene così la guarigione con una piccola operazione, che si sarebbe sempre dovuta praticare e che raggiunge il duplice fine

Digitized by Google

di preservare dal vajolo ed esercitare un' azione curativa sul tumore erettile.

Io ho guariti non pochi tumori erettili con questo metodo e credo di doverne dare una relazione particolareggiata: nello stesso tempo descriverò alcune modificazioni fatte al processo operatorio; con ciò spero di rendere un vero servizio ai pratici modesti i quali lontani dai colleghi non sempre possono ricorrere a mezzi energici come la galvano-caustica, l' allacciatura multipla, l' estirpazione che, come abbiamo notato, spesso è causa di emorragia e di accidenti gravissimi.

Se non che bisogna che questa operazione sia fatta con certe avvertenze: pessima maniera è quella di servirsi della lancetta o dell' ago comune per la vaccinazione: molti insuccessi sono da attribuirsi non alla vaccinazione ma al cattivo modo di praticarla.

Ecco il processo che riesce meglio. Si prendono degli aghi sottilissimi: si carica la punta di buon vaccino preso sul braccio d'un bambino e poi si piantano nel tumore e si lasciano in posto: operando in questo modo non si ha uscita di sangue e quindi del virus. Dopo qualche minuto si ritirano. Nelaton avea consigliato di attraversare il tumore con parecchi settoncini filiformi lasciati in posto per una settimana; si serviva di questi per introdurre il virus in tutta la lunghezza del loro tragitto. Con ciò noi possiamo agire anche sui tumori erettili sottocutanei i quali non sarebbero punto modificati dall' inoculazione ordinaria. Io ho modificato il metodo di Nelaton per evitare una cicatrice nei punti d' ingresso dei settoni, cicatrice che lasciava una deformità troppo visibile in parti scoperte.

Ecco ora i casi di tumori erettili guariti colla vaccinazione.

Tumore erettile alla palpebra inferiore, cutaneo e sottocutaneo in un bambino di cinque mesi. Il tumore cominciò con una piccola macchia larga come un seme di lente, che si estese con molta rapidità in modo da dar luogo ad un tumore del volume di una grossa ciliegia. In questo caso l' allacciatura, la cauterizzazione avrebbero prodotto una cicatrice deforme, e quindi

Digitized by Google

era a temersi per la retrazione della stessa l' entropion con gran nocumento dell' organo visivo. Proposi quindi l' inoculazione del virus vaccino, non essendo il bambino stato vaccinato. — Non mi servii nè della lancetta nè dell' ago comune: perocchè, come ho osservato, con questi strumenti si ha una ferita troppo larga, ed il sangue uscendo porta fuori il vaccino. Adoperai degli aghi sottilissimi, lunghi: caricati di vaccino li piantai nel tumore ad una certa distanza, e per qualche minuto li lasciai in posto. Nei primi giorni non avvenne alcuna modificazione nel tumore: ma appresso si vide un' eruzione vaccinica che copriva tutto il tumore. L' azione modificatrice si fece sentire ad una certa distanza: e qui notiamo che quando si usa il caustico solo una piccola zona periferica è modificata. Cadute le croste il tumore era già sensibilmente diminuito, e dopo due mesi non si vedevano che le cicatrici superstiti alle croste.

Nel 1874 ebbi l' onore di essere chiamato dall' egregio Dott. Mazzoni di Carpi a visitare un bambino robusto di otto mesi affetto da tumore erettile sottocutaneo alla parte inferiore ed anteriore della gamba destra, immediatamente al disopra dell' articolazione tibio-tarsea. Il tumore avea l' estensione di tre centimetri in lunghezza e di due centimetri in larghezza: avea sede nella pelle e nel tessuto connettivo sottocutaneo. Era di natura venosa di color rosso cupo, molle, senza pulsazioni. Compresso fortemente si poteva alcun poco ridurre, e ciò permetteva di riconoscere al centro una specie di nucleo più duro. Atteso il volume assai considerevole del tumore noi credemmo che la vaccinazione avrebbe avuta poca efficacia: sapendo che i medici inglesi che raccomandarono pei primi questo mezzo, tra le contro-indicazioni ponessero il volume troppo grande del tumore. — Cominciammo la cura colle injezioni di percloruro di ferro ripetute parecchie volte: ma sempre senza alcun successo.

I genitori essendosi opposti ad una operazione cruenta, nonchè alla distruzione del tumore col caustico, ci decidemmo a tentare la vaccinazione. L' operazione fu praticata colle solite av-

Digitized by Google

vertenze: e il successo fu oltre ogni dire pronto e brillante. Sei giorni dopo si contavano parecchi bottoni che non tardarono a formare un' eruzione confluente: il tumore si gonfiò notevolmente; il bambino ebbe per qualche giorno un po' di febbre, poi tutto rientrò nell' ordine, ed alla caduta delle croste ebbimo la soddisfazione di vedere che il tumore era diminuito. Dopo un mese il bambino non presentava nella regione affetta che un color leggermente rossiccio. Pochi giorni sono ebbi occasione di rivedere il fanciullo e la guarigione è sempre completa.

Queste due osservazioni chiaramente dimostrano che la vaccinazione non è solo utile contro le macchie erettili, o contro tumori erettili piccolissimi, ma riesce efficacissima negli angiomi di un certo volume.

È d' uopo notare che in seguito alla vaccinazione fatta con aghi sottili non ho mai osservato emorragie come assicurano di aver veduto non pochi scrittori teorici di cose chirurgiche.

Io credo quindi che il chirurgo in presenza di un tumore erettile in un fanciulletto non vaccinato debba sempre cominciare la cura colla vaccinazione: avvertendo che se il tumore è voluminoso sono necessarii 10, 14, 20 punti di vaccino.

Nelle macchie erettili si può fare un circolo di punture vacciniche sulla pelle sana: si ha uno strozzamento intorno alla macchia erettile, che riesce a farla scomparire.

Quando i tumori erettili hanno sede alle palpebre, alla fronte, alle guancie, al mento, dopo la guarigione, ottenuta col vaccino resta una cicatrice più o meno visibile secondo l' estensione del tumore.

Fino dal 1860 mi sono occupato di questo accidente. In due casi di tumori erettili al volto ho modificato e perfezionato il processo di Nelaton già descritto, e credo che in questa maniera si possa impedire qualsiasi deformità.

Un bambino di 10 mesi avea un grosso tumore erettile sottocutaneo alla regione parietale, al davanti del condotto uditivo esterno: la pelle che lo copriva era sana. — D' accordo col' egre-

Digitized by Google

gio Dott. Giuseppe Porta giudicammo essere in questo caso indicata la vaccinazione.

Alla base del tumore ponemmo alcuni settoni filiformi, e li lasciammo in posto 8 giorni: con ciò si ottengono dei tragitti fistolosi nei quali debbono passare dei fili carichi di linfa vaccinica. Bisognava evitare che il vaccino venisse a contatto colla pelle, ma solo col tessuto erettile, perchè non si formassero pustole e quindi cicatrici ad ogni orifizio.

Difesi le aperture cutanee con piccole cannule eguali a quelle che servono nella siringa di Pravas per le injezioni sottocutanee.

Sul filo feci passare una piccola cannula e fatte due macchie nere, caricai di vaccino la parte intermedia. Allora fissai il filo nell' interno del tumore. Lo stesso feci per gli altri fili.

Confesso che non sapevo che cosa sarebbe successo nell' interno del tumore: dopo 4 giorni, tempo ordinario dell' incubazione del vaccino, osservammo nel tumore i noti segni del processo infiammatorio, il quale produsse una massa dura, in vece del tumore molle riducibile che esisteva prima dell' operaziene. Questo ingorgo andò via via scemando ed il tumore scomparve senza lasciare nessuna cicatrice.

Dai casi ora accennati ognuno sarà persuaso che colla vaccinazione ben fatta si guariscono gli Angiomi aventi un certo volume senza alcuna perdita di sostanza: e quando questi si siano sviluppati nelle varie regioni del volto tale vantaggio ha moltissima importanza per non guastare l' estetica delle parti.

Ciò possiamo ottenere colla vaccinazione fatta col processo ora descritto, e difendendo la pelle dal contatto del pus vaccino.

Nei bambini e nei fanciulli già vaccinati i tumori erettili spesso si sviluppano alle labbra e più frequentemente al labbro inferiore. Nella cura di questi tumori il chirurgo deve dapprima por mente, alla sede, alla forma, ed all' estensione. Se si tratti di macchie vascolari, o di angiomi superficiali aventi l' estensione di un franco possiamo applicare la cauterizzazione colla pasta di Vienna o coll' acido nitrico.

Digitized by Google

Se il tumore non è molto esteso si può fare l' estirpazione col bisturì facendo due incisioni a V, poi riunendo i lembi della ferita colla sutura attorcigliata. È un processo che nei tumori erettili peco voluminosi riesce assai bene.

In due casi di tumori erettili del labbro inferiore poco estesi aventi sede alla parte interna del labbro io ho ottenuta la guarigione colla pasta di Vienna applicata con un processo assai semplice e che non trovo descritto in nessun libro di chirurgia (1).

Nel 1870 il Dott. Luppi mi faceva vedere un ragazzetto di quattro anni il quale avea un tumore erettile al labbro inferiore. Il tumore occupava la mucosa ed il tessuto cellulare sottomucoso dalla linea mediana fino alla comessura destra.

Adoperai la pinzetta di Desmarres per l' estirpazione dei piccoli tumori alle palpebre. Preso il tumore erettile in mezzo alla pinzetta, e stretto in modo da comprimere i tessuti vicini al tumore, copersi il neoplasma con uno strato sottile di pasta di Vienna: questa produsse un' escara, la quale, caduta, lasciò una piaga che in pochissimi giorni finì colla cicatrizzazione.

Il secondo caso l' osservai in un bambino di 3 anni curato dal Dott. Bonvicini.

Con questa modificazione si evita un' operazione cruenta, e si può applicare il caustico, poichè colla pinzetta si dà facilmente al labbro la posizione orizzontale.

Vi sono tumori erettili i quali per la loro sede debbono essere curati solo in modo palliativo: eccone un esempio che non è privo d' interesse. È una donna di 24 anni, di lodevole costituzione, regolarmente mestruata, la quale da molto tempo aveva un tumore erettile alla regione occipitale precisamente ove la sutura lambdoidea si continua colla sutura sagittale. Il tumore avea l' estensione di 8 a 10 centimetri, poco saliente, irregolare

---

(1) Descrissi tale processo in un articolo sulle malattie chirurgiche delle labbra pubblicato nell' *Enciclopedia medica* di Milano.

Digitized by Google

nel suo contorno. Questo tumore presenta delle alternative di tensione e di rilassamento notevolissime quando la donna faceva uno sforzo od evacuava il ventre. La pelle che lo ricopriva sembrava un po' assottigliata, e presentava un color rosso violaceo. Il tumore era molle, depressibile sotto leggerissima pressione. Cessata la pressione il tumore gradatamente si riempiva: Colla palpazione si sentivano dei battiti isocroni col polso, ma estremamente deboli: non esisteva vera pulsazione. Quando l'ammalata inclinava il capo all' innanzi, il tumore diveniva più teso, ed aumentava di volume. I movimenti respiratorii non sembravano esercitare alcuna palese influenza sul volume e la tensione del tumore, e solo nell' ispirazione forzata, chiusi il naso e la bocca si notava un lieve aumento di volume e di tensione. La parte ossea su cui riposava il tumore sembrava assolutamente normale. Dalle Interrogazioni fatte all' inferma si seppe che fin da giovinetta avea un piccolo tumore al capo cogli stessi caratteri.

Nel nostro caso si trattava di un tumore erettile venoso sottocutaneo avente comunicazione colla parte interna del cranio, comunicazione vascolare specialmente col seno longitudinale della dura madre. Si poteva in fatti essere certi che la riduzione si faceva per i vasi del cuojo cappelluto, per cui era duopo ammettere che il contenuto del tumore rientrava nell' interno del cranio, e si vuotava nei vasi della diploe. Quando la riduzione era completa la donna accusava una lieve cefalea, senza vertigini nè bagliori di vista. Il tumore era allora come prima indolente.
Un' altra particolarità singolare di questo tumore era la presenza di leggerissimi battiti isocroni col polso che potevano a prima vista far sospettare un' aneurisma cirsoideo: ma bastava por mente all' estrema debolezza di queste pulsazioni per escludere questa diagnosi. Si potevano spiegar queste ondulazioni pulsatili ammettendo che fossero trasmesse dal cervello.

A questo proposito voglio ricordare un caso osservato dal Prof. Roux in un uomo, il quale avea un tumore della stessa natura nella fossa sfeno-palatina. Questo tumore era stato giudicato una

Digitized by Google

cisti ossea. Fortunatamente il Roux conobbe ben presto la vera natura del tumore, e sconsigliò qualsiasi operazione.

Ora che cosa si deveva fare nel nostro caso? Io credo che la chirurgia in tali circostanza sia impotente. Poichè tutti i mezzi vantati per la cura di tali tumori, sutura, allacciatura, setone, cauterizzazione, injezioni, cagionando necessariamente l' infiammazione, questa si estenderebbe al seno, e quindi avverrebbe la morte. Come processo palliativo consigliai un apparecchio da applicarsi sul tumore onde impedire qualunque siasi contusione.

In questi ultimi anni il percloruro di ferro usato per injezione nella cura dei tumori erettili ha cagionato degli accidenti assai gravi, ed in alcuni casi la morte. Dopo questi fatti, coll' insucesso di cui ho parlato più innanzi io credo che il pratico debba usare tale processo con molte precauzioni nei tumori erettili delle estremità.

Io ritengo mezzo più innocuo, quando la vaccinazione sia contro-indicata, e quando la cauterizzazione non possa essere applicata, l' uso dell' acqua del Pagliari o del cloralio.

Ed ecco brevemente la storia di un tumore erettile, in cui l' acqua Pagliari riuscì assai felicemente.

Bambina di 10 anni affetta al sopraciglio sinistro da un tumore erettile circoscritto, molle, avente il volume di una noce piccolissima. Tale tumore esisteva dalla nascita del volume allora di un grano di frumento. Il suo colore pavonazzo dava alla bambina un' aspetto assai strano. Era stata consigliata da un chirurgo la compressione: ma con essa non si ottenne nulla. Io proposi insieme col medico curante l' egregio Dottor Bianchi l' injezione dell' acqua Pagliari, acqua, come ognun sa satura di benzoino e di allume. Nel mese di settembre 1875 assistito dall' egregio collega feci l' operazione nel modo seguente. La fanciulla seduta sopra le ginocchia di un assistente, resa immobile la testa praticai coll' ago da cataratta una puntura nel centro del tumore, poi facendo rotare il manico dello strumento fra le dita, e movendolo in varie direzioni lacerai il tessuto erettile

Digitized by Google

allo scopo di moltiplicare i punti di contatto fra il sangue e l' acqua emostatica destinata a coagularlo. Compiuto il primo tempo dell' operazione injettai nel tumore colla siringa d' Anelio sufficiente quantità d' acqua Pagliari, ingrossando il tumore in modo da duplicarne il volume. Un po' di cerotto fu applicato sulla ferita; ed ecco quali ne furono le conseguenze. Ingorgo edematoso della regione frontale, della palpebra che durò due giorni, indurimento notevole del tumore per 15 giorni. Risoluzione lenta progressiva del tumore stesso al termine della ottava settimana.

Sono già passati due anni dall' operazione e la bambina non presenta verun segno dell' angectasia.

Mi sembra che l' azione coagulante sul sangue dell' acqua Pagliari, e la innocuità di questo mezzo sull' economia costituiscono un processo operativo di molto valore contro i tumori erettili poco voluminosi.

Vi sono dei tumori erettili sui quali la vaccinazione non può usarsi o perchè gli ammalati furono vaccinati oppure perchè troppo voluminosi: non si può tampoco pensare ai caustici, alle injezioni coagulanti, alle allacciature, od all' estirpazione: in questi casi possiamo avere nella cauterizzazione attuale un processo utilissimo. — Ed ecco a conferma di ciò l' osservazione di un tumore erettile curato in questa maniera. — Il Prof. Tomaso Casali nel 1867 curava un bambino di anni quattro affetto da tumore erettile alla mano destra. Il tumore avea sede alla regione tenare e si estendeva alla metà corrispondente della mano, prolungandosi lungo il dito pollice nella sua parte anteriore. Tumore molto voluminoso, pulsante, riducibile solo in parte sotto una forte pressione. Datava dalla prima infanzia, e la madre avendo sempre respinta qualunque siasi operazione, la pelle si infiammò poi passò all' esite ulcerativo, con una emorragia enorme che venne cessata dal Prof. Casali colla compressione e col percloruro di ferro. Ma, passati alcuni giorni, di notte si ripetè l' emorragia assai copiosa, per cui nel bambino cominciarono a manifestarsi i segni della cloroanemia. Fu allora che credemmo

Digitized by Google

necessariodi metter fine alla continua emorragia con un metodo di cura radicale. L' estirpazione col coltello sarebbe stata impossibile per l' emorragia e piü per la grande estensione del neoplasma. Non si poteva nemmeno ricorrere all' allacciatura del tumore, attesa la grande emorragia che si presentava appena levata la compressione. Siccome la pelle che ricopriva il tumore era esulcerata così credemmo di dover dare la preferenza al cauterio attuale col distruggere il tessuto cavernoso e produrre a poco a poco un' infiammazione adesiva. Tale operazione venne ripetuta a intervalli di qualche giorno quattro volte, così potemmo ottenere la guarigione perfetta del fanciullo senza che la parte rimanesse offesa nei movimenti.

Prof. Cav. G. Casarini.

Digitized by Google

MEMORIE

DELLA

SEZIONE DI LETTERE

Digitized by Google

Digitized by Google

RELAZIONE

DEL

SEGRETARIO GENERALE DELLA R. ACCADEMIA

PROF. CAV. CONTE LEONARDO SALIMBENI

SUGLI

ATTI ACCADEMICI DELL' ANNO 1876-1877

Letta dal V. Segret. Gen. Avv. Pietro Bortolotti
nell' Adunanza Generale del 5 Dicembre 1877.

I.

Il 24 Giugno ultimo aveva compimento il triennio della gestione nostra negli affari dell' Accademia e nella odierna adunanza siete chiamati, a tenore dello Statuto accademico, alla rinnovazione delle cariche.

Prima di procedere a questa nomina avrete, spero, la degnazione di permettermi un breve riepilogo degli atti accademici dell' ultimo periodo. Nel riandare i lavori presentati, vivissima fu la compiacenza che ho provata e che, mi lusingo, meco dividerete, al vedere la cresciuta operosità dei Soci e l' importanza delle loro ricerche e delle loro invenzioni, che manterranno il nostro Istituto nel grado e nella fama che seppe acquistare.

Soltanto mi è di non poca dispiacenza che l' essere da voi lontano mi tolga di esporvi in persona e di viva voce questo resoconto annuale, mentre imperiosi doveri di famiglia mi hanno

Digitized by Google

chiamato ad altro cielo. Tuttavia nel dirigervi un saluto fraterno, mi affretto a porgere all'intero Consesso accademico i sensi della indelebile mia riconoscenza per la cortese ed amichevole deferenza che voi, egregi colleghi, mi usaste nel disimpegno dell'ufficio che voleste affidarmi.

Se fu mai vero che dalla concorde attività e dalle forze riunite e dirette con intelligenza dipende la floridezza delle istituzioni, ben può dirsi fortunata questa nostra Accademia le cui sorti arridono felicemente all'intento de' suoi statuti e alle nobili mire dei Soci egregi che la compongono.

E in fatti se ci facciamo a considerare le letture fatte nelle Sezioni durante l'anno accademico trascorso, abbiamo cagione di rallegrarcene e di riprometterci nuovi frutti del vostro ingegno per le future esercitazioni e per quelle che oggi si inaugurano.

Percorriamone insieme rapidamente i sunti, che sono pubblicati nel vol. XVII, ora uscito per le stampe (1).

Al Socio prof. Gibelli dobbiamo un'accurata esposizione delle indagini da lui istituite sopra una grave ed oscura malattia che va distruggendo i castagneti e i noci in talune provincie italiane e particolarmente nel Biellese. Questi studj difficilissimi e laboriosi di patologia vegetale sono tuttora continuati con variate sperienze comparative ed è a sperare che in mezzo ai diversi opinamenti dei botanici e degli agronomi, vengano a spargere molta luce sulle vere cagioni di simile morìa in quelle piante.

In questa prima dissertazione intanto si escludono perentoriamente il parassitismo animale e vegetale e l'influsso atmosferico e si constata, per le analisi del chiarissimo prof. Antonielli, una quantità eccessiva ed anormale dell'ossido di ferro e una proporzionale diminuzione delle basi alcaline nelle ceneri delle radici ammalate (2).

---

(1) Pag. XXVI, e segg.

(2) Adunanza della Sezione di Scienze, 20 Gennajo 1877.

Digitized by Google

Il medesimo egregio collega ci ha informati, con altro dotto lavoro, del modo di propagazione di parecchie crittogame dei cereali e della riconosciuta efficacia del solfato di rame per combatterle e distruggerle, dimostrando come nella pratica sia da preferire il solfato di rame alla calce comunemente usata quale rimedio preventivo.

Estendendo queste ricerche di patologia vegetale ad una nota malattia dei gelsi detta il *male del falchetto*, l'Autore ci ha dimostrato a chiare prove essere questa prodotta dal micelio dell'*Agaricus melleus* (1).

Nel campo della Storia Naturale anche il dotto prof. Carruccio ci diede notizia di una sua interessante illustrazione delle specie più rare di uccelli che trovansi nel Museo della nostra Università, rendendone ostensibili alcuni esemplari.

Come saggio dell'utilissimo suo studio, rivolto principalmente a rilevare le anomalie della distribuzione geografica di questi animali, descrisse in questa prima lettura il *Syrraptes paradoxus* preso nei monti di Pavullo, e discorse delle immigrazioni di questo uccello in Europa e in Italia dal 1863 in poi, partendo dalla sua regione nativa, che è la steppa asiatica a levante del Caspio (2).

Il Socio prof. Riccardi, valendosi opportunamente di importanti documenti inediti, comunicatigli dal comm. Silvestro Gherardi, si è occupato delle biografie e degli scritti dell'immortale Volta, completandone il catalogo ed esponendo specialmente le vicende della celebre memoria *sulla identità del fluido elettrico col galvanico* (3).

I tubi di gomma elastica o gutta perca contenenti un'elica di filo di ferro, impiegati nell'industria e nelle arti, divennero

---

(1) Adunanza della Sezione di Scienze, 22 Febbrajo 1877.
(2) Adunanza della Sezione di Scienze, 14 Aprile 1877.
(3) Adunanza della Sezione di Scienze, 22 Febbrajo 1877.

Digitized by Google

nelle mani del Socio prof. Riccò un nuovo curioso istrumento musicale.

Questi tubi, se bagnati e attorcigliati, danno suoni più forti e distinti e le note successive, che si hanno con soffi od aspirazioni più energiche, corrispondono alle armoniche della fondamentale del tubo. Le leggi del moto dell'aria in questi tubi e delle corrispondenti vibrazioni dell'elica, dimostrano non potersi ottenere altri suoni che quelli aventi un ritmo eguale a quello della colonna d'aria vibrante (1).

Alle ricerche meteorologiche, con tanto amore promosse da qualche tempo in Italia, nuovo contributo offerse l'indefesso prof. Ragona, quando, a proposito di una recente sua pubblicazione sull'andamento annuo della temperatura, istituì confronti opportuni cogli studi del Plantamour e del Glaisher e ne trasse la conferma dei periodi annuali e dei rapporti fra la latitudine e la durata della temperatura ascendente dal minimo al massimo, non che quella della temperatura maggiore della media annuale (2).

Altri fenomeni astronomici e meteorologici, osservati nel Febbraio e Marzo dell'anno corrente, gli porsero argomento di una nuova interessante comunicazione e vi trattò segnatamente delle nevicate di quel periodo, precedute come di consueto avviene da forte siccità e da sensibile aumento nella temperatura; dell'ecclisse di luna del 27 Febbraio e del fatto importantissimo, segnalato dall'autore, della rispondenza fra le luci aurorali e i cambiamenti istantanei nella direzione del vento dal greco al libeccio (3).

Una notevole comunicazione ci venne dal Socio prof. Riccò, di cui ci duole constatare la partenza da Modena per l'insegnamento della fisica tecnologica nella Scuola degli Ingegneri in

---

(1) Adunanza della Sezione di Scienze, 20 Marzo 1877.
(2) Adunanza generale, 16 Dicembre 1876.
(3) Adunanza della Sezione di Scienze, 3 Aprile 1877.

Digitized by Google

Napoli. A constatare la relazione fra l'intensità luminosa e il minimo angolo visuale per la percezione della luce l' Autore fece molte esperienze e ne dedusse una perfetta compensazione fra l'area dell'immagine retinica e l'intensità della luce, cosicchè la quantità di luce minima percettibile è costante, quando l'angolo visuale dell'immagine sia minore di un grado (1).

Un fenomeno soggettivo di visione consistente nelle apparenze del filo di una lama di temperino e di un capello, veduti alla distanza per la visione distinta contro al cielo, o contro un foglio di carta bianca illuminato dal sole, il primo mostrandosi finamente dentato, il secondo sembrando una punteggiata, diede luogo ad un nuovo studio del medesimo Socio. Egli vide ciò dipendere dalla discontinuità dello strato sensibile della retina, traendone una conferma dell'opinione degli oculisti non essere il semplice cono l' unità fisiologica della vista, ma bensì un complesso di organi (2).

Una terza comunicazione udimmo dal Riccò sopra una nuova elettro-calamita di sua invenzione, formata di una lamina di ferro ravvolta intorno a un grosso filo di ferro colle diverse spire isolate da una carta oliata (3).

Ad esaurire le letture che alla fisica si attengono amo ricordare le prove compiute dal Socio prof. Malavasi sulla facoltà elettromotrice dell'alluminio e le investigazioni del Socio prof. Marianini sulla conduttività momentanea del sentiero della scintilla.

Il Malavasi stabiliva essere l'alluminio non ossidato positivo rispetto allo zinco, quando non sia alterato da azioni chimiche e ove questa alterazione si avveri, diviene tosto negativo rispetto allo stesso metallo.

---

(1) Adunanza della Sezione di Scienze, 3 Aprile 1877.
(2) Adunanza delle Sezioni di Scienze e di Lettere, 24 Giugno 1877.
(3) Adunanza suddetta.

Digitized by Google

L'alterazione in elettrotismo dell'alluminio per la semplice immersione prolungata, avviene per lo più nel senso che la lastra bagnata è positiva di fronte alla lastra asciutta. Nella scala termoelettrica di Becquerel l'alluminio è vicinissimo al piombo.

Un fenomeno singolare si presentò all'autore in queste esperienze, cioè, che l'arco formato di lastre d'alluminio alternate con liquidi, diventa miglior conduttore dopo che fu chiuso il circuito e questo fatto sembra derivare da una crescente adesione del liquido al metallo, che non è sensibilmente contrastata dalla sua polarizzazione (1).

Il prof. Marianini cimentava in varie guise con sottili accorgimenti la conduttività propria della scintilla elettrica e riconobbe che il sentiero stesso di questa scintilla è miglior conduttore nell'aria e nell'olio, che nell'acqua; che la scintilla nell'acqua conduce meglio l'elettrico dell'acqua stessa, e che la scintilla superficiale sull'acqua è assai più conduttrice della scintilla subacquea.

Dimostrò come si possa colla scintilla della boccia determinare l'accensione della luce elettrica e col semplice soffio estinguerla e infine stabilì la durata brevissima della conduttività del sentiero della scintilla nell'aria, durata che sta in rapporto colla forza della scintilla e può anche in certi casi diventare molto maggiore della durata della scintilla stessa (2).

Nelle adunanze della Sezione di Lettere esordiva il chiarissimo nostro Presidente col soddisfare il voto espresso davanti all'intera Accademia dal nostro esimio collega il prof. Alessandro Puglia, voto che diveniva per il corpo accademico un debito sacro. Egli ci trattenne con una sua perspicua commemorazione del compianto comm. Carlo Malmusi, già Presidente operosissimo dell'Accademia. Ci descrisse la valentia del nostro concittadino

---

(1) Adunanza delle Sezioni di Scienze e di Lettere, 24 Giugno 1877.
(2) Adunanza della Sezione di Scienze, 7 Giugno 1877.

Digitized by Google

nelle amene lettere, nelle cose d'arte e nella erudizione archeologica e ci ricordò i servigi zelantissimi da lui prestati al paese con rara abnegazione e costanza e le invidiabili qualità di quell'anima nobile e cara (1).

Lo stesso Presidente ci lesse in altra Seduta una sua memoria sulle condizioni della stampa nelle repubbliche Cisalpina ed Italiana e nel primo Regno d'Italia. Dalle fasi di licenza del periodo repubblicano passò all' esame delle leggi del 1803 e del 1810 e mise in piena luce il sistema fiscale di sospetto e di vessazione contro gli stampatori, gli editori e i librai, che divenne sempre più severo ed intollerabile fino alla caduta del Regno (2).

Opportuno riscontro alle infelici condizioni della stampa nel periodo segnalato dal march. Giuseppe Campori, si fece dal fratello del disserente il marchese Cesare, che ci venne esponendo le vicende tristissime del Collegio di S. Carlo durante il governo repubblicano.

Le spogliazioni sofferte da questo stabilimento, le tasse esorbitanti cui fu sottoposto, le angherie patite dall' illustre Rettore Bonaventura Corti, le prepotenze dei messi del potere esecutivo, passate in rassegna dall' autore, ci danno una riprova solenne del rispetto di quei funzionarj per la pubblica libertà (3).

Al Socio Bortolotti dobbiamo una dotta dissertazione sull'aureo talento ricordato da Omero, che rimaneva celato alle indagini degli archeologi. Istituendo arguti raffronti degli apprezzamenti di questo ignoto peso sparsi nei poemi greci con parecchi passi della Bibbia, l'autore mostrasi inclinato a ritenere che il talento Omerico non fosse altro che un *siclo* (4).

---

(1) Adunanza della Sezione di Lettere, 10 Gennajo 1877.
(2) Adunanza della Sezione di Lettere, 22 Aprile 1877.
(3) Adunanza della Sezione di Lettere, 30 Gennajo 1877.
(4) Adunanza della Sezione di Scienze, 7 Giugno 1877.

Digitized by Google

In altra adunanza il medesimo egregio Socio ci additava il nesso ch' egli crede poter stabilire fra la primitiva metrologia dell'Egitto e i sistemi metrici, in seguito ai rapporti determinati fra il cubito dei Faraoni e le altre misure egizie e straniere (1).

L'esimio nostro Bibliotecario prof. Franciosi, continuando i vasti e fecondi suoi studj sulla letteratura Dantesca, ci fece gustare nuove ingegnose considerazioni sull'intelligenza e sui sentimenti del divino poeta, ritraendo gli angeli del Purgatorio e le recondite ragioni dell' arte in quella sublime creazione.

Da ultimo, sebbene veggasi rallentata l' attività accademica nelle ideali regioni della poesia, avemmo all' aprirsi delle tornate accademiche un carme del Socio stesso prof. Franciosi intitolato « L'invisibile » (2) e due altri brevi componimenti poetici dei Soci prof. Raisini e Conte Paolo Abbati Marescotti (3).

II.

Se ora ci facciamo a riandare gli Atti principali dell' Accademia, ci si offre dapprima una molto giudiziosa deliberazione che venne a modificare una delle condizioni prescritte nel Concorso drammatico, quella cioè di non esigere il voto favorevole del pubblico per le composizioni drammatiche che devono subire la prova della pubblica rappresentazione in un teatro della Città coll'assistenza della Commissione giudicatrice, ad evitare per tal modo gli inconvenienti giustamente lamentati dalla Commissione stessa.

A Direttore della Sezione d'Arti, carica resasi vacante per la morte dell' illustre architetto prof. Cesare Costa, venne nomi-

---

(1) Adunanza mista di Scienze e Lettere, 24 Giugno 1877.
(2) Adunanza della Sezione di Lettere, 10 Gennajo 1877.
(3) Adunanza della Sezione di Lettere, 30 Gennajo 1877.

Digitized by Google

nato il chiarmo prof. Camuri (1) e a Censore della medesima Sezione al prof. Camuri venne surrogato l' egregio prof. Ferdinando Asioli (2).

L' Accademia dovette poi, suo malgrado, prendere atto della demissione data per molteplici impegni dal chiarmo Vice Segretario Generale Cav. Carlo Boni e chiamò a succedergli l' esimio Avv. Pietro Bortolotti (3).

Per il Concorso 1875-76 venne aggiudicato il premio d' onore (4) al prof. *Luigi Palma* della R. Università di Roma per la sua dissertazione sul tema della istruzione obbligatoria e l' *accessit* ad altri due lavori pregevolissimi intorno al soggetto medesimo, l' uno del Socio Prof. Girolamo Galassini, l' altro del Sig. Luigi Manfredi di Albenga.

Quanto ai componimenti drammatici e alle invenzioni o ai perfezionamenti d' arti meccaniche o di metodi agricoli, non si fece luogo al conferimento di alcuna speciale distinzione.

Mercè l' alacrità e la solerzia dei giudici che diedero il loro voto sui componimenti morali-politici del successivo ed ultimo Concorso a premi 1876-77, che si chiuse col 31 Luglio scorso, potè la Direzione Centrale procedere il 9 Novembre alla definitiva deliberazione sui lavori dei concorrenti a ciascuna delle tre classi.

Vinse la corona promessa intorno al primo tema morale-politico *della emigrazione*, fra le tre memorie presentate, quella che si riconobbe appartenere al Signor *Giannetto Cavasola* di Porto Maurizio.

Niuna speciale distinzione fu accordata all' unico componimento drammatico presentato nella seconda classe.

---

(1) Adunanza generale 16 Dicembre 1876.
(2) Adunanza generale 31 Maggio 1877.
(3) Adunanza predetta.
(4) Atto d' aggiudicazione del 15 Marzo 1877, Vol. XVII. p. XXI.

Digitized by Google

Nella terza classe in seguito ad accurata relazione di una Commissione tecnica, non fu accordato il premio promesso; ma trovaronsi meritevoli d'encomio e di una gratificazione d'incoraggiamento il signor Felice Riccò di Modena per alcuni saggi di un nuovo metodo d'intarsio in legno a colori, e il signor Pietro Bonilauri pure di Modena per un suo congegno meccanico che permette, in caso di pericolo, di sciogliere istantaneamente i cavalli dal veicolo cui sono attaccati.

Passando alla parte economica osserveremo che la Direzione nella sua tornata del 7 Marzo scorso compilò il consueto resoconto delle spese incontrate nell'esercizio 1876, documentate coi recapiti relativi e ne fissò l'ammontare nella somma di L. 4813,96, che venne soddisfatta con mandato sul Bilancio del Ministero dell'Istruzione Pubblica.

Per corrispondere poi ad invito ministeriale delli 8 Febbrajo scorso fu redatto il bilancio preventivo approssimato della corrente annata 1877, che venne determinato nella cifra di L. 5152,84; distinto in due articoli d'entrata e undici articoli di spesa e corredato delle indispensabili avvertenze.

Si cominciò quest'anno, compatibilmente alla mole del nuovo vol. XVII delle nostre Memorie, a dare eseguimento alla deliberazione dell'Accademia relativa alla pubblicazione dei sunti delle adunanze delle Sezioni per gli anni corsi dal 1818 al 1842; sunti che per la loro importanza meritavano di essere raccolti dai diari nei quali erano comparsi per la prima volta, e che serviranno opportunamente a non lasciare monca ed incompleta la serie degli Atti accademici.

La ristrettezza crescente della Biblioteca indusse la Direzione Centrale a dare un nuovo ordinamento alle pubblicazioni periodiche degli Istituti scientifici italiani ed esteri che trovansi in corrispondenza e fanno frequenti cambi colla nostra Accademia e a tal fine si valse degli scaffali di provenienza Gerez per adattarli convenientemente nella sala delle adunanze.

Digitized by Google

E qui ci torna a taglio il constatare l' aumento considerevole che nell' anno corrente si è verificato nelle nostre relazioni colle Società ed Accademie scientifiche estere.

Infatti accettarono il cambio de' nostri atti colle loro pubblicazioni la Società belga di microscopia di Bruxelles, la Società imperiale dei naturalisti di Mosca, la Società per la fauna e per la flora finnica di Helsingfors, la Società archeologica della Francia meridionale residente in Tolosa, l' Accademia reale delle Scienze di Lisbona, la Società Linneana della Francia settentrionale di Amiens, l' Accademia reale delle Scienze di Berlino, la Società matematica di Londra, l' Accademia reale di medicina del Belgio a Bruxelles, la Commissione reale d' arte e d' archeologia di Bruxelles, l' Accademia delle Scienze di Parigi, la R. Accademia Danese di Scienze e Lettere di Copenhagen, la Società di fisica e chimica di Pietroburgo, l' Accademia delle Scienze di California a S. Francisco, la Società di fisica e di storia naturale di Ginevra e sulla proposta del Ministero, il cambio coll' *Jahrbuch über die Fortschritte der Matematik* del prof. Carlo Ohrtmann di Berlino.

Lo scambio dei pacchi venne assai semplificato e meglio guarentita l' esattezza del recapito, come ebbi ad accennare nella precedente mia relazione, per la gentile e non mai mancata interposizione del Ministero dell' Istruzione Pubblica verso le Legazioni estere presso il Governo italiano.

Questi sono gli atti principali dell' Accademia e della Direzione Centrale, volti a consolidare il nostro Istituto e a meglio raggiungerne lo scopo.

III.

Un ultimo mesto ricordo di compianto rivolgiamo infine, anche in questa solenne adunanza, a quelle elette intelligenze che scomparvero dalla grande e sempre mutabile scena del mondo e appartennero alla nostra Società. E troppo mi duole il dirlo

Digitized by Google

assai più numerose furono nell' anno presente le perdite che abbiamo a deplorare.

Fra i Soci attuali, di recente aggregati all' Accademia, andava distinto per carattere irreprensibile e per profondo sapere nelle scienze legali il nostro concittadino avv. comm. *Gallicano Biagi*, che coprì con tanto onore e con plauso generale un posto eminente nella magistratura ed ebbe fama incontrastata di autorevolissimo ed abile giureconsulto.

Nei Soci sopranumerarj ci mancò il Conte *Luigi Forni*, allontanato da Modena per politiche vicende e da non molto ritornato fra i suoi concittadini. Negli anni giovanili fu solerte cultore degli studi di storia patria ed ebbe a darne pubblico saggio in collaborazione all' altro collega nostro il marchese Cesare Campori.

Alla classe dei Soci corrispondenti erano ascritti il prof. *Luigi Bompani*, deceduto in quest' anno a Rio Janeiro e l' esimio prof. *Carlo Livi*, passato a miglior vita in Livorno.

Il Bompani seppe cattivarsi molto credito in quelle ospitali regioni del grande impero del Brasile e non dimenticò mai i legami che stringevanlo alla sua città nativa e noi ne abbiamo una irrefragabile testimonianza nella cospicua serie di prodotti naturali dell'America meridionale inviati più volte in dono al Museo della R. Università degli studi, la quale ebbe a collocare, lui vivente, l' effigie dell'illustre concittadino a perenne ricordanza del benemerito e cospicuo donatore.

E del prof. Carlo Livi potrò mai dire, Signori, cosa che valga a tratteggiarne le doti veramente singolari della mente e del cuore? Era ancora sì profonda e sì viva nell' animo mio l' impressione provata al sentire dal suo labbro le commoventi parole che, nel giorno dell' inaugurazione del busto alla memoria dello Zani, il Livi pronunciò nella sala del Frenocomio di Reggio nel Settembre dello scorso anno, epoca in cui ebbi la fortuna di avvicinarlo; esciva cotanto spontaneo e riverberava di piena luce il suo convincimento sulla superiorità dei metodi moderni di cura delle aliena-

Digitized by Google

zioni mentali, nel descrivere i meriti del suo predecessore; era così autorevole, obbligante e gentile il tratto di quello scienziato illustre verso i suoi conoscenti, che ne fui tosto preso della stima più riverente ed affettuosa. — Io non credeva a me stesso allorchè si sparse repentino l'annunzio della sua morte, e lamentai, con tanti suoi vecchi e nuovi amici ed estimatori, la fine immatura del valente alienista.

Due astronomi celebri ed un riputato economista, Soci Onorarj dell' Accademia, compiono il doloroso quadro che ho impreso a delineare.

Il decano degli astronomi italiani, alle cui solenni esequie fu rappresentata degnamente la nostra Accademia, il nonagenario *Santini*, chiuse la sua lunga e brillante carriera nella sua villa di Noventa Padovana il 26 Giugno scorso.

Abuserei troppo della vostra indulgenza se volessi diffondermi a ricordare i molti suoi lavori e scritti di astronomia teorico-pratica, che furono passati in rassegna da un giudice competentissimo, dal prof. Giuseppe Lorenzoni nel suo elegante discorso sulla vita e sulle opere dell'insigne maestro (1).

Di *Urbano Leverrier* Direttore dell' Osservatorio di Parigi, uno de' più forti calcolatori contemporanei, basti rammemorare la celebre scoperta o divinazione del pianeta Nettuno, dedotta dallo studio analitico delle perturbazioni di Saturno e di Urano, prima che il pianeta fosse osservato nella sua orbita.

Fra gli economisti moderni va distinto il chiarmo Senatore comm. *Antonio Scialoja* che tenne importanti uffici nell' amministrazione pubblica, trattò rilevantissimi negozi coi governi esteri, e negli ultimi mesi di sua vita, recatosi in Egitto per motivo di salute malferma, fu chiamato a consiglio dal Kedivé per operazioni finanziarie.

---

(1) *Giovanni Santini; la sua vita e le sue opere.* Discorso del prof. G. Lorenzoni. Padova. Tipografia del Seminario 1877.

Digitized by Google

Avanti di chiudere la mia povera relazione, sarei troppo ardito se mancassi di fare un nuovo caldissimo appello alla vostra benevolenza.

Negli anni ultimi vi rivolsi con soverchia libertà una parola di eccitamento a contribuire con nuovi lavori alle esercitazioni accademiche e voi foste così larghi del concorso della operosità vostra che, se i mezzi dell' amministrazione lo avessero consentito, non sarebbe stata interrotta la Collezione delle nostre Memorie sul finire del 1876.

Troppo mi accuora il pensare che, per quanta buona voglia io vi mettessi, non potei mantenermi a livello di questa vostra esemplare attività e rimasi, nella carica importantissima di cui mi onoraste, troppo al disotto della vostra aspettazione.

Tuttavia se potei reggere questo ufficio attribuitelo, Signori, alla bontà e all' appoggio validissimo degli illustri miei colleghi della Direzione Centrale, cui mi compiaccio rendere qui pubblico omaggio e specialmente al volonteroso ed illuminato interessamento di quel nostro concittadino dottissimo ed egregio amico mio, che diresse e presiedette per questo triennio, con sì elevato e costante animo, la nostra Accademia.

Digitized by Google

L'EMIGRAZIONE E L'INGERENZA DELLO STATO

MEMORIA

PREMIATA NEL CONCORSO 1876-77

SUL TEMA

« Se lo Stato debba ingerirsi nelle materie della emigrazione e in caso affermativo entro quali limiti debba essere circoscritta la sua ingerenza. » (1)

CAPITOLO I.

Introduzione. - Funzioni dello Stato rispetto ai problemi economici. - Suoi rapporti colla emigrazione.

Per lungo tempo l'emigrazione di italiani per altri paesi di oltr'alpe e di oltre mare non ha destato preoccupazioni di sorta. Erano cittadini ai quali la fortuna non aveva arriso in patria, che si recavano a tentarne i capricci sotto altro cielo e con altri auspici; erano uomini arditi che non trovavano in patria un campo sufficiente all'impiego della loro attività; giovani

---

(1) Vedi il *Programma del concorso* nel Tomo XVII p. XXI e l'*Atto d'aggiudicazione* nel Tomo presente p. XVI.

Digitized by Google

ai quali le occasioni si presentavano scarse per costituirsi nelle loro città natali quella prosperità cui agognavano. Gente, insomma, che diceva addio al domestico tetto, non per disgusto degli affetti più cari, non per rinunciare alla terra che l'aveva veduta nascere, ma per desiderio di crearsi con una vita laboriosa, sovente a prezzo di dure privazioni e di pericoli, quel patrimonio che le permettesse di ritornare in patria a godervi di una considerazione e di una agiatezza non prima avute.

Era quella una legittima aspirazione dei cittadini che partivano; era il fatto, in se stesso considerato, un normale fenomeno sociale che le tradizioni di alcune nostre regioni, della ligure in specie, confortavano con una lunga serie di esempi fortunati per vantaggi individuali e per accresciute relazioni commerciali.

Ma quando le partenze si vennero di anno in anno moltiplicando oltre l'usato, quando alla partenza degli industri figli della Liguria si vide succedere un movimento di masse di coloni delle provincie interne, l'attenzione pubblica incominciò a destarsi e a preoccuparsi. In quel fenomeno nuovo si sospettò alcun che di anormale. E prima ancora che la mente degli studiosi si volgesse alla ricerca delle cause ed all'esame dei probabili effetti di quella insolita emigrazione, le statistiche ufficiali rivelarono cifre non prima supposte, alle quali tennero dietro, con frequenza allarmante, racconti penosi di disagi, di mali trattamenti, di inganni, di frodi consumate a danno degli emigranti e rapporti di Consoli sulla mala riuscita di imprese e di spedizioni, sulla miseria e sull'abbandono di migliaia di nazionali su coste lontane.

Come era naturale avvenisse, la prima impressione fu di dolore e il sentimento della pietà suggerì i primi consigli. Lo stesso Governo non potè sottrarsi a quella prima impressione; e cedendo alle insistenze della voce pubblica, che protestava in nome della umanità e della solidarietà nazionale, tentava porre un freno a quel movimento di espansione, senza che fosse approfondito il problema che per la prima volta da noi si presentava nella pratica applicazione. Ma quel problema andava di giorno

Digitized by Google

in giorno acquistando gravità; esso ormai si imponeva agli studiosi. Contro il sentimento della prima pietà reagiva lo spirito delle dottrine apprese negli studi astratti; la stessa inefficacia dei provvedimenti dal Governo adottati pareva aggiungere autorità a quelle dottrine e il quesito fu posto se lo Stato abbia il diritto di ingerirsi nelle cose dell' emigrazione.

La discussione sorse vivace come sempre avviene allorchè un problema, sia esso politico, sociale od economico, si presenta nuovo e intorno al quale, appunto per la sua novità, non sono ancora complete, nè precise le idee. Nè tardarono a schierarsi di fronte due opposte opinioni, le quali, nel consentire o nel negare allo Stato la competenza sua in fatto di emigrazione, rinnovarono la questione fondamentale della ingerenza e delle funzioni dello Stato rispetto ai problemi economici e sociali.

Due scuole, forti l' una e l' altra di convinzioni profonde, ancora si disputano, nel campo delle teorie e delle pratiche applicazioni, il primato nel definire e nel regolare le funzioni dello Stato rispetto ai problemi economici sociali. Che se all' una sembra necessario che quest' Ente collettivo, che in se riassume l' essere di un paese, segni dovunque e sempre la via che il paese stesso deve percorrere, all' altra ogni ingerenza governativa ripugna, quasi un inceppamento all' iniziativa individuale, quasi una restrizione della libertà che vivifica e feconda.

L' una e l' altra scuola, di soverchio preoccupate di principii astratti, dimenticano che un problema economico non altrimenti è costituito che da un complesso di *interessi*, i quali, vari e mutabili per se stessi, in ragione di tempo e di condizioni locali, non comportano per indole propria l' assoluto. Onde il volere stabilire *a priori* con norme inflessibili quale debba essere l' azione dello Stato rispetto a ciascuna questione economica, come il sentenziare che esso non debba in alcuna guisa ingerirsene mai, è disconoscere intieramente l' indole delle questioni stesse e la ragione di essere dello Stato.

Digitized by Google

Questo è costituito per adempiere a quegli uffici e per soddisfare a quei bisogni ai quali non bastano i mezzi individuali. Di questi uffici taluni non possono in modo assoluto essere adempiuti per azione individuale ed essi sono veri e propri dello Stato, costituenti *un pubblico servizio*. Taluni altri possono solo parzialmente essere adempiuti dagli individui in modo che gli effetti non si estenderebbero oltre ai loro autori e rispetto a tali uffici è còmpito dello Stato il sorreggere e il completare l'azione individuale, in quanto interessa la generalità del paese, per modo che i benefizi, più sicuri rispetto all'individuo, sieno accessibili o ridondino a vantaggio della generalità.

L'interdire adunque *a priori* allo Stato ogni ingerenza nell'avviamento dei problemi economici a quella maggiore soddisfazione dei bisogni e degli interessi del paese, è costituirlo indifferente a quanto più da vicino tocca alla prosperità delle popolazioni. È rendere un ente monco lo Stato ed illogico il concentramento di mezzi che l'organizzazione sociale pone in sue mani. Col pretesto abbagliante del rispetto alla libertà ed alla iniziativa individuale si maschera sovente l'indolente insipienza, che non risolve, ma sfugge i più gravi problemi di governo. La libertà, senza dubbio, deve essere norma assoluta a fronte degli interessi individuali, i quali non comportano limitazione e quindi ingerenza governativa, se non in quanto si incontrino con il diritto o l'interesse altrui, individuale o collettivo. Ma quando gli interessi dei singoli si moltiplichino per estensione in siffatta misura da costituire un interesse generale, non solamente è legittima ma doverosa e obbligatoria l'ingerenza governativa, poichè nessun interesse pubblico deve sfuggire alla attenzione e, occorrendo, alla azione dello Stato.

La coscienza pubblica e le necessità pratiche di ogni giorno si ribellano alla teoria dell'astensione assoluta, perchè l'esistenza stessa dello Stato è collegata agli interessi economici del paese, dai quali traggono alimento e vigoria tutti gli altri interessi di ordine morale e politico.

Digitized by Google

Non è possibile disconoscere l'attinenza e la influenza diretta che hanno molti servizi pubblici sulle condizioni economiche di un paese. Basti per tutti l' esempio dei rapporti tra il sistema tributario e la produzione e la consumazione. Se adunque per quegli stessi uffici di interesse generale, che emanano dalla sua essenza, lo Stato influisce sui problemi economici, come puossi logicamente sostenere la sua passività a fronte di essi?

Anche in ordini parziali di interessi l'intervento dello Stato è sovente invocato dalle leggi inesorabili della vita pratica. Forse che il concorso dello Stato nella costruzione di tante strade, nella sistemazione di tanti porti, nell'inalveamento di tanti fiumi non ha diretta attinenza con le questioni economiche o forse che tutte quelle strade, tutti quei porti, tutti quei fiumi importano alla difesa del territorio o sono richiesti dall' interesse generale e diretto del paese?

E rispetto alla libertà: forse che non è limitazione di essa qualcuno degli obblighi che per legge generale vengono imposti agli enti locali o agli individui? Forse non è trascurando l'iniziativa individuale che la legge impone ai comuni le opere pubbliche di interesse locale? O non è una coazione quella che si adopera coi cittadini privandoli di diritti, agli altri riconosciuti e garantiti, quando non abbiano imparato a leggere e scrivere?

Eppure doveroso si ritiene ed è quel concorso dello Stato in talune spese di interesse apparentemente locale, come legittima è quella coazione usata ai comuni e ai privati, colla quale lo Stato instituisce un vero e proprio giudizio sulle convenienze particolari. E le ragioni sono: che la generalità del paese ha diritto di giovarsi degli interessi particolari, diritto al quale corrisponde il dovere di sorreggere e di aiutare, anche loro malgrado, lo sviluppo degli interessi particolari; che non può negarsi allo Stato, solamente perchè tale, il savio discernimento del bene e del male, anche quando lo disconoscono gli enti minori e gli individui. E come infatti si pretende da taluni negarlo? Allo Stato si riconosce il diritto e la potenza di penetrare

Digitized by Google

il misterioso impero delle passioni sulle azioni umane, per misurare nei suoi codici i gradi di responsabilità morale e gli si vorrebbe negare l' attitudine a comprendere un problema economico, ossia un interesse materiale, che si rivela per via di fatti esteriori?

Non poniamo in dubbio, adunque, l' interesse, non disconosciamo il dovere, non neghiamo allo Stato il diritto di ingerirsi nelle questioni economiche, non contestiamogli l' intelligenza per farlo.

Ciò che importa evitare è la confusione nei termini. Altro è *l' interesse* dello Stato ed altro *il modo della sua azione*; altro il diritto ed altra la difficoltà dell' applicazione.

Tutto ciò che interessa gli individui, come causa o fatto generale, interessa lo Stato; ma l' azione dello Stato non può essere identica a quella degli individui, perchè l' interesse collettivo, al quale deve essere informata l' azione dello Stato, risultando dal cumulo degli interessi particolari, riesce necessariamente diverso da ciascun interesse individuale.

L' azione dello Stato non deve sostituirsi, nè turbare l' azione individuale; ma dove l' azione individuale manca o non può svolgersi o non può giungere per cause intrinseche od estrinseche, deve spiegarsi l' azione dello Stato, vuoi coll' abbattere ostacoli, vuoi col rimuovere cause dannose, vuoi colla tutela delle forze individuali mediante l' influenza o l' intervento delle forze collettive.

Queste distinzioni, che a noi paiono sostanziali, tra l' interesse individuale e l' interesse collettivo o pubblico, tra l' interesse e il diritto dello Stato e il modo della sua azione, non si presentarono bene delineate alla mente di taluni, i quali nella emigrazione altro non ravvisarono che il fatto individuale del cittadino che espatria. Onde parve ad essi più giusta, come era più spedita, la risposta al grave quesito « non competere allo Stato ingerenza di sorta nelle cose dell' emigrazione. »

Digitized by Google

Il quale modo parziale di vedere non risolve il problema, lo sopprime. L' emigrazione non si studia come fatto individuale, ma come fatto complessivo, come fenomeno sociale che si lega alle condizioni economiche presenti e avvenire di un paese; e perciò avente collo Stato gli stessi rapporti di tutti gli altri problemi economici.

Lo Stato non può impedire al cittadino di lasciare il suo paese di origine per cercare sotto miglior cielo una maggiore soddisfazione dei suoi bisogni o dei suoi desideri; non può, in altre parole, negare al cittadino, il quale abbia adempiuto ai suoi obblighi verso la patria, il diritto di emigrare, che fa parte della libera disponibilità della sua persona. Ma allorquando l' esercizio di questo diritto è praticato da tale un numero di cittadini onde ne risulti evidente l' esistenza di una causa determinante generale, lo Stato non può rimanere indifferente dinanzi a tale fatto, nè assistere inerte, senza venir meno a se stesso, ad uno spettacolo che attesta che la patria non ha più allettamento nè risorse per i suoi figli.

CAPITOLO II.

Origine e modi dell'emigrazione. - Caratteri ed effetti di ciascuna sua specie. - Interesse pubblico. - Ingerenza dello Stato. - Modi di questa.

In ogni età, in ogni stadio della civiltà, con qualunque forma di costituzione sociale la storia ci ricorda il riprodursi del fenomeno della emigrazione, al quale la barbarie o la civiltà del tempo imprimevano, di epoca in epoca, caratteri ed effetti speciali.

Digitized by Google

Chi voglia con forma largamente comprensiva indicare la causa costante di questo persistente fenomeno dirà che esso ebbe ed ha origine dal bisogno.

Ma i bisogni sono essi stessi così vari e mutabili di intensità e di estensione, come in ragione di tempo e di luogo, che non sarebbe possibile renderci ragione dell' emigrazione, quale in oggi si produce, per via di criteri storici o di concetti sintetici. Omessa perciò ogni ricerca che ci condurrebbe lontani dal campo che ci è tracciato, diciamo che l' emigrazione è il fenomeno più complesso che si presenti nella vita di un popolo, perchè si lega alla sua stessa costituzione sociale ed ha attinenza col suo passato, col suo presente e col suo avvenire.

L' emigrazione vuole adunque essere considerata nei suoi diversi aspetti e nei suoi distinti periodi. Anzitutto vuole essere studiata nella moltiplicità delle sue cause determinanti, nei modi come si compie, negli effetti che ne derivano. E quando essa è determinata, importa distinguere i tre periodi che si succedono, la partenza, il viaggio e l' arrivo all' estero.

Tutte le cause che determinano l' emigrazione hanno a fondamento comune le condizioni economiche del paese dal quale essa muove (1). Le quali condizioni non sempre sono cattive, come implicitamente potrebbe intendersi con la indicazione generica del bisogno, sebbene sostanzialmente esatta.

E per vero molti esempi noi abbiamo in paesi vicini e in Italia stessa di una emigrazione che di anno in anno si ripete a periodi determinati. Sono operai e braccianti, delle provincie di confine in specie, che si recano su territorio estero per accudire a lavori che per lunga esperienza ritengono assicurati e che poi rientrano riportando in patria i loro risparmi.

---

(1) Occorre appena far avvertire che non teniamo conto della emigrazione politica, la quale, risultato di uno stato violento, può avere conseguenze economiche, ma non ha origine da fatti di ordine economico.

Digitized by Google

Certamente è pure il bisogno che spinge quegli operai a varcare il confine, ma un bisogno che non ha nulla di diverso nè di più incalzante di quello che li terrebbe a lavoro nell' officina del loro villaggio. Il guadagno di quelle mercedi all' estero entra nel calcolo dei proventi ordinari dell' annata e per solito le provincie che possono farvi assegnamento presentano condizioni economiche relativamente migliori.

Non dissimile è l' emigrazione duratura per qualche anno in vista di determinate imprese, sebbene queste costituiscano un fatto meno ordinario e una sorgente di lucro meno sicura di quel primo lavoro a periodi ricorrenti.

Questa specie di emigrazione *temporanea*, alla quale l' idea dell' abbandono della patria non si presenta, ha riscontro negli spostamenti interni di popolazione. Quali che sieno le cause che la producono, permanenti o transitorie, essa in generale è produttiva di buoni effetti economici, se non sempre di buoni effetti morali.

Ma quando si parla di emigrazione, quasi esclusivamente si ha in mira quell' altra la quale si decide all' abbandono irrevocabile della patria o alla quale l' idea del ritorno non si affaccia se non come una probabilità lontana. Infatti è questa emigrazione, la quale, per contrapposto alla *temporanea*, si designa coll' appellativo di *permanente* o diuturna, che presenta tutti i caratteri di vero fenomeno sociale-economico e come tale crea un interesse pubblico.

L' emigrazione permanente proviene da cause molteplici.

Non è frequente, ma neppure immaginario, che per condizioni costanti o per circostanze straordinarie si produca in un paese una esuberanza di popolazione e di forze relativamente alla estensione del territorio. Si pronuncia allora quel salutare movimento di espansione, che non rimedia ma previene la possibilità di un disordine sociale, che conduce ad applicare altrove, con benefizio comune, le forze che in patria rimarrebbero inerti e potrebbero divenire dannose.

Digitized by Google

All' infuori però di questo caso eccezionalmente favorevole, l' emigrazione ha origine da insufficienza di ricchezza locale, sia per crisi momentanee, sia per sterilità del suolo, sia per manco di commerci e di industrie, sia infine per rimunerazione inadeguata del lavoro.

Ciascuna di queste cause imprime un carattere diverso alla emigrazione che produce, un carattere che l' accompagna in tutto il suo svolgersi.

Tra le due specie che abbiamo indicato di emigrazione permanente corre tanto divario quanto tra la ricchezza e la povertà. Scopo dell' una e dell' altra è il produrre altrove. Ma l' emigrazione non può mutare a proprio vantaggio le leggi generali della produzione. Quindi la prima, quella che rappresenta un eccesso di forze produttive, ha con se i mezzi per produrre e non va in cerca che dell' occasione per applicarli: la seconda, trovata l' occasione, deve lottare per crearsi i mezzi.

È evidente che dall' una e dall' altra sorgono effetti diversi e sorge un diverso interesse pubblico. Nel primo caso l' interesse pubblico è identico a quello dell' emigrazione all' atto in cui questa si determina ed ha sicurezza di giovarsi degli interessi particolari di essa dopo del suo collocamento all' estero.

Nel secondo caso o il fatto attesta che la costituzione sociale vien meno al suo fine, sì che i cittadini sieno costretti a cercare fuori di essa quei benefici che dovevano aspettarsene e l' interesse pubblico consiste nel rimediare allo stato anormale di cose; oppure il fatto attesta l' impossibilità permanente o temporanea di dare legittima soddisfazione a quegli interessi che vanno a cercarla altrove, ed allora l' interesse pubblico richiede che cause estrinseche non impediscano il conseguimento di quella soddisfazione e che il paese non sia privato del suo benefico influsso.

La povertà di un paese, infatti, è assoluta o relativa. È assoluta quando non sarebbe possibile suscitare una maggiore produzione; è relativa quando ne soffrono determinate classi della popolazione per crisi momentanee, per cattiva distribuzione delle

Digitized by Google

ricchezze o per difetto di attività locale che svolga tutti gli elementi di produzione che il paese possiede.

Affrettiamoci a dire che per quanto diversa sia la produttività dei singoli paesi, non può essere considerato che per eccezione, nello stadio nostro di civiltà, il caso della povertà assoluta. Dove il suolo è più ingrato la natura ha reso l' uomo più industre affinchè supplisse allo scarso prodotto della terra. E dove limitati sono i beni della natura, la società vi si è generalmente conformata nella sua costituzione. Onde un certo equilibrio vi si è stabilito, che gli usi e le abitudini tendono a conservare; per modo che mancando i confronti odiosi tra classe e classe e gli stimoli di bisogni non sempre reali, la popolazione non solamente non tende ad abbandonare il suolo natio, ma più fortemente vi si attacca in ragione delle cure che vi spende. Insomma, l' emigrazione per povertà assoluta, non potrebbe forse essere dimostrata con un esempio in Europa. Ma dato che essa si manifestasse, una stessa necessità regolerebbe l' interesse suo particolare e l' interesse generale del paese.

Dove invece abbondano terre non ridotte ancora a coltura; dove il riparto e il governo della proprietà fondiaria non permettono una equa distribuzione dei prodotti del suolo; dove le industrie non alimentano come potrebbero il commercio e le arti, la povertà intanto esiste in quanto l' organizzazione sociale è difettosa e le forze individuali non sanno o non possono trovare utile impiego.

Figlia della miseria, l' emigrazione che proviene da siffatte origini trascina ordinariamente il suo avverso destino da un continente all' altro; meno triste se si compone di operai e di industrianti, più disperata se è costituita da contadini. E per vero; l' artigiano che emigra ha con se il proprio capitale costituito dalla sua abilità e dalla sua vigoria. Se il paese dove arriva gli offre l' occasione per farlo fruttare egli riunisce tutte le condizioni per assicurarsi un equo compenso del suo lavoro. Non è così per il colono, al quale il capitale che abbisogna è la terra.

Digitized by Google

Non avendo mezzi per procurarsela, il suo lavoro aumenta il capitale altrui, non frutta a lui che per via di una mercede, che egli troppo sovente non concorre neppure a regolare.

Or bene: l'emigrazione derivante da questo stato di cose, può essere una necessità particolare per ciascun emigrante, non è una necessità assoluta considerata in ordine al paese. Un vizio della organizzazione o l'imperfezione dello sviluppo rendono necessario il ricorso ad uno spediente che non è condizione normale nella vita di un popolo, ma è rimedio utile contro una situazione anormale.

A fianco, adunque, dell'interesse particolare di ciascun emigrante sorge un grande interesse pubblico che è quello di togliere o di modificare le cause per le quali si è prodotto un malessere che l'emigrazione attesta e sfugge. Questo interesse pubblico è quello che determina l'ingerenza dello Stato nelle cose della emigrazione. Ingerenza non solamente legittima ma doverosa, come quella che si propone il benessere pubblico ossia il fine supremo della costituzione sociale.

L'emigrazione non essendo che un effetto, lo Stato deve principalmente preoccuparsi delle cause di essa. Ma quali che sieno le cause uguale dovere deriva allo Stato, quello della tutela che ad esso incombe per ufficio proprio.

La quale tutela non consiste soltanto nel difendere il cittadino dagli inganni, dalle frodi, dalle soperchierie delle quali può essere vittima allorchè si dispone a partire o già si trova in viaggio, poichè sono uffici questi che non differiscono nella loro ragione d'essere dagli uffici ordinari di polizia, ma consiste ancora nel sorreggere con opportune istituzioni e provvedimenti l'opera di quella parte di Nazione che ha poste le tende al di là dei monti o al di là del mare, affinchè non vadano perduti gli sforzi dei cittadini e non sieno frustrate le speranze della madre patria di vedere accresciute la sua influenza e le sue relazioni commerciali.

Digitized by Google

Non disconosciamo le difficoltà del compito addossato allo Stato col riconoscere e proclamare la sua ingerenza in materia di emigrazione. Avversari della inerzia governativa di fronte ai problemi economici, non crediamo che lo Stato debba cimentarsi con ogni difficoltà, nè possa superarle tutte. Vogliamo che i due campi dello Stato e della iniziativa individuale rimangano distinti, ma esercitati entrambi con uguale alacrità. E riserbandoci di indicare più precisamente quali sieno a nostro avviso le linee che possono segnare i confini tra i due campi, diciamo intanto quale intendiamo possa essere l'azione dello Stato rispetto alla emigrazione.

Una doppia azione noi riconosciamo a disposizione dello Stato per modificare le condizioni economiche del paese. È azione diretta dello Stato quella di togliere, per via di leggi, pur rispettando i diritti privati, le cause che producono o mantengono il concentramento della proprietà del suolo o ne inceppano la trasmissione; di far sorgere un benefizio largamente sentito dalla coltivazione delle terre tuttavia incolte; di rendere facile la condizione delle industrie specialmente coi dazi di confine e coll'astenersi dalle imposte che colpiscano la produzione.

Può lo Stato con azione indiretta concorrere all'incremento delle condizioni economiche, concedendo sussidi e ogni maniera di incoraggiamenti a quanti più tentativi seri si facciano di nuove produzioni, ponendo esso stesso a disposizione dell'iniziativa privata un corredo di studi e di sperimenti ordinati con savio discernimento alla ricerca di nuove sorgenti di pubblica ricchezza.

Per siffatta guisa le forze inoperose o male retribuite troverebbero in paese proficuo impiego e cesserebbero di rivolgersi altrove. Che se noi non dividiamo la preoccupazione di coloro i quali nella emigrazione vedono soltanto una sottrazione dannosa di capitali e di forze dal paese, reputiamo invece male gravissimo che il paese non offra occasione, in ragione della sua produttività, ad utile impiego di tutte le forze disponibili.

Digitized by Google

Dopo avere tutelata la libertà della sua determinazione, per modo che l'emigrazione riesca il risultato spontaneo del confronto tra la vita presente e le promesse dell'avvenire, esclusa ogni pressione di interessi estranei, allo Stato deve importare che la emigrazione raggiunga il suo scopo. Oltre alla prosperità individuale, che è il movente di chi parte, l'emigrazione dovrebbe avere per effetto naturale un vantaggio per il paese di origine.

Questi vantaggi, specialmente colla estensione che hanno oggidì gli affari commerciali, non possono sperarsi da azioni individuali, ma dalla organizzazione.

L'emigrazione della prima specie, quella che abbiamo detto eccezionalmente favorevole, avendo in se stessa abbondanti elementi di vita, guidata quasi sempre dalla speculazione, può riuscire da sola ad organizzarsi. O meglio, può assumere e sostenere quelle forme di associazione che le dieno modo di concentrare in determinati punti e su determinate imprese quante forze occorrano per ricavare gli utili desiderati.

Ma l'emigrazione che lascia il paese per miseria, senza forti appoggi non riesce a mutare la propria condizione. E se pure qualcuno giunge, e v'ha sempre chi giunge, a grande prezzo di attività e di intelligenza a costituirsi una fortuna, sono benefizi individuali dai quali nulla per solito risente la massa emigrata e poco o nulla la madre patria.

Quanto più è miserabile l'emigrazione che parte, tanto più solerte e ardita dovrebbe essere l'azione dello Stato nel guidarla a buon fine.

Tra tutte fortunatissima a noi pare quella che può avviarsi a colonie dove sventoli la bandiera nazionale. Ma poichè non tutti gli Stati posseggono colonie, nè tutti hanno l'ardire e la intelligenza di crearsele, ad essi spetta il vegliare alla tutela delle persone e degli interessi degli emigrati con ogni mezzo diplomatico e militare e con opportune istituzioni. È interesse pubblico che l'emigrazione divenga sorgente di benefizi reciproci e senza appoggi può ridursi a semplice dispersione di forze.

Digitized by Google

Ben è vero che queste massime sembrano invadenti e condannabili. Ma se avesse battuta la via che vengono additando taluni economisti, l'Inghilterra non avrebbe privilegiata la Compagnia delle Indie, nè avrebbe colonizzata l'Australia..... E ancora non se n'è pentita!

CAPITOLO III.

Contegno dei diversi Stati di Europa verso l'Emigrazione.

Il concetto dell'emigrazione quale si ha in oggi non era conosciuto nei tempi andati, quando su tutte le altre prevaleva l'idea dello Stato. L'emigrazione non altrimenti era considerata se non come una diserzione: chi abbandonava la patria per accettarne un'altra più che un pessimo cittadino era un reo. Non ci mancano infatti esempi nella legislazione non ancora antichissima di alcuni Stati di Europa, quali la Russia e la Prussia, di pene severissime comminate a chi osasse formare il proposito di emigrare, senza verun riguardo ai motivi che lo spingessero.

Ma le dottrine liberali a poco a poco si fecero strada e all'ombra di esse la scienza economica proclamò principii da prima non conosciuti. L'emigrazione incominciò allora ad essere considerata sotto il suo vero aspetto e il principio della sua libertà fu generalmente riconosciuto e proclamato.

Non credettero con ciò gli Stati meglio ordinati di avere esaurito il cómpito loro: togliendo gli impedimenti alla emigrazione essi non credettero di dover assumere un contegno passivo a fronte di essa.

Digitized by Google

Se e come essi abbiano adempiuto al dover loro, in ragione dei bisogni e dei mezzi, rispetto al rimuovere o modificare le cause determinanti l'emigrazione, è ciò che non si potrebbe affermare nè escludere, senza indagare prima le cause stesse in ciascun paese e studiare, in rapporto ad esse, le singole legislazioni. Ma certo è che il grave problema non è sfuggito all'attenzione loro e che per quanto riguarda la tutela a concedersi alla emigrazione noi troviamo quasi dovunque leggi speciali o provvedimenti dell'Autorità governativa che ad esse equivalgono, dove la costituzione politica del paese consente al Governo facoltà e mezzi altrove riservati al potere legislativo.

Nell'adempimento di questo ufficio tutelare per prima ci appare una distinzione costante e notevole tra gli Stati i quali hanno lontane colonie e quelli che non ne hanno. Ed era opportuno e savio che questa diversa condizione suggerisse diversi provvedimenti. Infatti l'emigrazione che si reca in una colonia del proprio paese, sotto tutti i rapporti è esposta a minori pericoli ed ha la prospettiva di maggiori vantaggi.

L'Inghilterra, così sovente citata come maestra nella pratica della libertà, forse più di ogni altra potenza ha accentuata questa distinzione. Essa che per il suo fine discernimento pratico non ha mai disconosciuto, in qualsivoglia ordine di interessi, il còmpito dello Stato per il timore di offendere principii astratti, ha intorno alla emigrazione un complesso di disposizioni da formare quasi un codice. E queste disposizioni sono diverse per l'emigrazione che si reca alle colonie inglesi, da quelle per l'emigrazione che si conduce altrove. Alla prima provvede essa stessa direttamente, mediante una Direzione Generale apposita, alla seconda per mezzo di Società private regolarmente costituite. Il contratto tra gli emigranti e la Società regola i loro rapporti; ma quel contratto è soggetto alla sanzione di opportune discipline.

Presso che lo stesso avviene in quasi tutti gli altri Stati di Europa, dove la tutela degli emigranti si esercita mediante Agen-

Digitized by Google

zie di emigrazione stabilite con norme speciali e soggette a rigoroso sindacato. Sola forse l'Austria non si è occupata di questa materia; la sua costituzione speciale rendendo prevalente sugli interessi delle popolazioni l'interesse dello Stato come ente politico, potrebbe renderci ragione di questa omissione. Ma appunto per questo motivo l'Austria non potrebbe servire di guida ad un Governo nazionale.

La Prussia, che dapprima esperimentò le leggi proibitive, riconobbe poi il principio della libertà dell'emigrazione. Ma nell'applicazione è severissima nel reprimere gli abusi e come tale considera qualunque eccitamento all'emigrazione. I suoi legislatori si preoccuparono in tempo e giustamente di questa specie di frode alla quale i cittadini potevano essere esposti ed inserirono nel codice penale la pena del carcere contro gli istigatori. Infatti l'emigrazione può dare origine a diverse speculazioni secondarie, le quali non hanno diritto di influire sulle determinazioni del cittadino. E se la Società punisce chi attenta alle sostanze del cittadino, non può astenersi dall'intervenire contro chi attenta alla quiete di lui e ne insidia l'avvenire per un meschino lucro personale.

L'emigrazione prussiana può rivolgersi alle Agenzie riconosciute dallo Stato per essere diretta e garantita. Le Agenzie rispondono dell'adempimento dei loro impegni con una cauzione che varia secondo l'importanza dei luoghi dove sono stabilite, secondo l'estensione delle loro operazioni e che sale anche a 10000 talleri. Esse possono essere rappresentate nell'interno delle provincie da *sub-agenzie* le quali, sebbene assumano una responsabilità indiretta e sussidiaria, pure sono tenute a prestare anch'esse una cauzione che può essere di 1000 talleri.

Ma ciò che rende in Prussia specialmente efficace il sistema della cauzione nell'ordinamento delle Agenzie, è l'autorità riservata alla potestà amministrativa di conoscere e giudicare dei danni e del conseguente diritto a risarcimento. L'emigrante non ha bisogno di ricorrere ai tribunali, di instituire un lungo giu-

Digitized by Google

dizio in contradditorio dell'agente per essere indennizzato, con pericolo di non ottenere quanto gli sia dovuto perchè non possa addurre prove giudiziarie di fatti e di circostanze avveratesi in alto mare o su spiaggie lontane. L'emigrante che si senta leso nei patti stabiliti, non ha che a rivolgersi al Console tedesco del suo luogo di sbarco o della sua nuova dimora. Il Console verifica sommariamente i fatti e secondo il proprio convincimento e il proprio criterio risolve il reclamo condannando l'Agenzia a pagare. L'ordinanza si esegue, senza appello ai tribunali, a carico della cauzione che deve essere prontamente reintegrata sotto pena di revoca della patente.

Disposizioni consimili esistevano nelle legislazioni di quasi tutti gli Stati della Confederazione germanica. Così troviamo che il Würtemberg manteneva sotto la dipendenza del Ministero dell'Interno un ufficio speciale per gli affari dell'emigrazione, dal quale ufficio si esercitava una vigilanza severissima sulle Agenzie, tutte vincolate a cauzione. Troviamo che nel Baden non si era meno severi nel punire gli eccitamenti all'emigrazione; che la cauzione delle Agenzie si elevava a 10000 fiorini e la liquidazione dei danni, delle spese e degli interessi si faceva per decreto dell'Autorità del circondario, esclusa ogni ingerenza dell'autorità giudiziaria.

In Baviera invece è mantenuto l'obbligo di un permesso speciale per ogni partenza di emigranti. E così di volta in volta l'Autorità esamina se chi si incarica della spedizione offra sufficienti garanzie.

Non è arrischiato l'affermare che è dovuto in buona parte alla severità di queste discipline ed alla savia ingerenza che con esse presero in tempo i Governi germanici, se la emigrazione tedesca, dopo dell'inglese, è la meglio ordinata e la più fiorente.

La Danimarca non si contenta di una forte cauzione per concedere la patente di esercizio alle Agenzie: richiede ancora speciali garanzie di moralità e di sicurezza nelle persone che vi aspirano, come ad esempio la dimora precedente per cinque anni

Digitized by Google

continui nel luogo stesso dove si intende aprire l' agenzia, senza aver dato luogo a lagnanze di sorta. Nè basta: per ogni spedizione di emigranti da un porto dello Stato occorre un permesso speciale del Ministero di Giustizia, al quale spetta imporre le condizioni e le cauzioni che di volta in volta ritiene necessarie a far sicuri gli interessi degli emigranti contro ogni possibile mancanza ai patti convenuti o contro la cattiva riuscita della spedizione. La istigazione alla emigrazione è punita ed importa revoca immediata della patente, senza pregiudizio di ogni indennizzo e multa.

Non segue via diversa la Svezia, la quale fa salire fino a 60000 talleri le cauzioni per le Agenzie che assumono i trasporti di emigranti ai paesi più lontani. Nessun emigrante può essere inviato a bordo senza che l' Agenzia abbia con esso lui stipulato un regolare contratto. E questo contratto deve portare il visto dell' Autorità governativa, la quale ne esamina le condizioni e si assicura dell' esatto adempimento di tutte le prescrizioni di legge.

Ma dove specialmente è degna della massima lode e di imitazione la legge svedese è nella saggia e veramente provvida proibizione di stipulare che le spese di viaggio siano poste a debito dell' emigrante per essere da lui rimborsate con opere da prestarsi dopo l' arrivo a destinazione.

Queste spese calcolate largamente dallo speculatore costituiscono troppo sovente il primo scoglio contro il quale si infrange l' attività dell' emigrato. Quel debito che lo perseguita fino dal suo arrivo nel paese scelto a sua nuova dimora gli assorbe il frutto del suo lavoro, nei primi tempi necessariamente incerto e scarsamente retribuito e basta sovente a renderlo miserabile per sempre.

Anche la Francia e il Belgio hanno le Agenzie autorizzate con obbligo di cauzione. Questi Stati però si sono preoccupati più specialmente di garantire agli emigranti la esecuzione fedele dei contratti di imbarco, che non degli abusi che si possono commettere a danno dei cittadini per deciderli a partire.

Digitized by Google

Essi infatti ammettono l'arruolamento (recrutement) che sebbene secondo lo spirito della legge sia da intendere più nel senso di raccogliere gli emigranti, che non nel senso di indurli con l'eccitamento ad emigrare, pure nella pratica potrebbe dare luogo a dubbie interpretazioni.

La stessa preoccupazione, limitata alla sicurezza del viaggio, ha avuto la Spagna, la quale ha introdotto a tale fine l'obbligo agli speditori ed agli armatori di un deposito di 320 reali per ciascun emigrante imbarcato, affinchè sieno adempiuti verso di lui gli obblighi assunti col contratto di imbarco.

Quasi tutti gli Stati, insomma, hanno riconosciuto che un cittadino partendo dal suo paese natìo non perde il diritto alla tutela nazionale; che anzi tanto più questa tutela gli è dovuta quanto maggiore ne è il bisogno in lui per le condizioni nelle quali si trova. Essi hanno compreso che dall'efficacia di questa tutela dipende in grande parte che l'emigrante possa tentare, con probabilità di successo, l'esperimento di attività personale al quale si accinge, o che egli sia un uomo perduto per se e per la patria. Hanno compreso che a quella guisa che in oggi i commerci, le industrie e tutti i progressi economici non ricevono più impulso proporzionato ai bisogni dagli sforzi individuali, ma richiedono l'associazione dei capitali e delle forze, così l'emigrazione per divenire cagione reale di prosperità e di decoro alla patria, ha bisogno di organizzazione.

Forse talune disposizioni delle legislazioni tedesche e scandinava, in se stesse considerate e in relazione a quelle assai più limitate delle leggi francese e belga, sembreranno eccessive. Importa perciò far notare che ogni Stato si inspira nelle proprie leggi ai propri bisogni ed alle proprie condizioni; onde le leggi stesse, se l'opera dei legislatori fu savia e avveduta, sono a loro volta indizio di quelle condizioni agli studiosi.

Intanto da quelle disposizioni delle leggi tedesche e scandinave che sembrano una ingerenza governativa indebita si riconosce come l'emigrazione da quei paesi non parte alla ventura.

Digitized by Google

Sono per lo più vere imprese di colonizzazione quelle che muovono, coi loro capi, col loro programma determinato, con la scelta già fatta del luogo dove porlo in attuazione, coi mezzi acconci a farlo riuscire. Ecco perchè lo Stato esamina le condizioni che offre l'impresa ai suoi partecipanti. Non è una restrizione della libertà dei cittadini, è un sindacato su chi assume sopra di se la vita e l' avvenire di altri cittadini. È lo stesso principio che legittima l'intervento presso le Agenzie, con la differenza che questo intervento, invece di tradursi in un permesso generico di spedire cittadini per tutto il globo e in tutti i tempi, si traduce in una licenza speciale. Rimane in tutti i modi l' alea della riuscita dell' impresa; ma lo Stato mira ad assicurarsi che la sorte degli emigranti non sia compromessa da cause estranee alla bontà intrinseca dell' impresa stessa.

CAPITOLO IV.

Emigrazione italiana. - Suoi caratteri. - Sua estensione. - Suoi effetti presenti e prevedibili.

Le due forme di emigrazione, temporanea e permanente, sono comuni all' Italia, sebbene si presentino meno spiccati quei caratteri che abbiamo attribuiti alla permanente.

Senza tener conto degli spostamenti interni e periodici di popolazione, che a stagioni determinate avvengono da regione a regione, come dagli Abruzzi e dalle Calabrie alla campagna romana e alla Sicilia, noi abbiamo costante il fatto di una numerosa emigrazione che specialmente dalle provincie dell' Alta Italia si reca in Francia, in Svizzera, in Germania e più ancora in Austria, in cerca di un lavoro che quasi sempre trova e compiuto il quale rientra riportando una parte del guadagno.

Digitized by Google

È una emigrazione sulla quale possono del pari le condizioni locali, le tradizioni e la facilità delle comunicazioni. Una emigrazione in grande parte industriale, che ha relazioni stabilite nei paesi dove si conduce periodicamente, che non manca nè di intelligenza, nè di dati di sicurezza nel formare i suoi calcoli. Una emigrazione, insomma, che dal punto di vista della tutela sociale ha minori bisogni perchè esposta a minori pericoli e costituita in condizione di potere meglio provvedere a se stessa. Oltre di che già esistono con parecchi Stati di Europa convenzioni consolari per la assistenza e il rimpatrio degli operai bisognosi o senza lavoro; ed in ogni peggiore ipotesi la civiltà degli Stati europei assicura gli emigranti da quei pericoli ai quali possono trovarsi esposti in altro continente.

Ben altri caratteri ha la emigrazione italiana di oltre mare. Questa da alcuni anni è salita in tale misura da prendere quasi il primo posto nelle statistiche dell'emigrazione europea. Ormai compete per numero colla emigrazione tedesca, superandola nella proporzione colla densità della popolazione e non è vinta che dall'emigrazione inglese, in specie per l'Irlanda.

L'emigrazione italiana oltremarina era rappresentata un tempo quasi esclusivamente dai figli delle regioni marittime, in primo luogo tra essi dai liguri. L'indole di tali popolazioni, per natura e per tradizioni tratte all'industria e al commercio più che non all'agricoltura, si conservava nell'emigrazione la quale riusciva specialmente industriale.

Quasi ad un tratto le cose mutarono e il maggior contingente all'emigrazione italiana di oltre mare fu dato dalla classe dei contadini.

I governi del Brasile, del Perù, delle Repubbliche del Plata, del Venezuela si erano dati a promuovere attivamente l'immigrazione per suscitare la produzione dalle loro terre incolte; e agenti di emigrazione, gettandosi ad una speculazione nuova, impresero a percorrere le provincie d'Italia più popolose e più attive, eccitando i contadini a partire con le più lusinghiere promesse.

Digitized by Google

Le masse campagnuole in Italia non sono sventuratamente in tale condizione da poter risolvere per cognizioni proprie su di imprese a tentare al di là dell' Oceano. Esse mancavano ugualmente di relazioni proprie in qualunque parte dell' America; non erano perciò in grado di formare una scelta qualsiasi. Per esse, accettata l' idea della partenza, qualunque spiaggia lontana era del pari promettitrice di fortuna, senza discutere i mezzi di procacciarla. Il solo interesse dell' agente o dell' armatore rimaneva a determinare la scelta della direzione a prendere; oggi al Venezuela, domani al Brasile o al Perù o viceversa, secondo fosse maggiore il premio di arruolamento per l' agente o prima allestita la nave per la partenza. La speculazione giunse a tale che Agenzie di emigrazione non si peritarono a stipulare contratti con armatori e Compagnie di navigazione, assumendo l' obbligo di dare a giorno fisso e sotto pena di multa per ogni individuo in meno, centinaia di emigranti per ciascuna nave che salpasse dal porto, senza chiedere neppure a quale spiaggia dirigesse (1).

Così senza una savia direzione, senza appoggi assicurati, senza mezzi, senza notizie esatte sulle condizioni del paese di destinazione e della sua agricoltura, spinta da un interesse che non era il suo, l' emigrazione italiana si affollava ora in questo ora in quel porto di America e andava incontro ad ogni sorta di disdette e di miserie.

Quale era infatti la condizione dei contadini italiani oltre mare?

L' Italia non possiede colonie proprie. Non possiedono gli italiani fattorie coloniche nè stazioni agrarie, come posseggono numerose i tedeschi e che negli effetti economici sostituiscono utilmente le colonie.

---

(1) MINISTERO DELL' INTERNO. Relazione a stampa sulla Sicurezza pubblica nel 1874.

Digitized by Google

A parte ciò che dipende dallo Stato per l'impianto delle colonie, contribuiscono a questa mancanza due motivi che strettamente si collegano e si confondono nel medesimo sentimento, l'attrazione della terra natale. L'Italiano, tranne rare eccezioni individuali, non parte mai colla intenzione di non più ritornare, di stabilirsi irrevocabilmente sulla nuova terra che va ad abitare. Suo fine, emigrando, è di costituirsi un patrimonio, sua meta il ritorno (1). Quindi, se la fortuna seconda i suoi sforzi, appena raggiunto l'intento cui aspira, egli realizza i suoi capitali e prende la via del ritorno.

Il secondo motivo è che dall'Italia non partono se non coloro i quali hanno bisogno di procacciarsi uno stato che non hanno speranza di conseguire in patria. Per lo stesso sentimento che spinge gli emigrati a ritornare, chi non ha bisogno non emigra. E così gli stabilimenti, che darebbero consistenza e continuità all'opera dei contadini italiani all'estero, non possono sorgere, perchè essi richiedono impiego permanente di capitali.

Per gli Inglesi e per i Tedeschi la cosa va diversamente. Essi considerano patria loro il paese dove si stabiliscono e non l'abbandonano più che per eccezione, pur conservando il loro carattere e i loro usi nazionali. Inoltre il recarsi a fondare uno stabilimento, a tentare una impresa transatlantica è per essi tra i modi ordinari di impiego dell'attività personale e dei capitali.

È evidente la conseguenza che ne deriva. I coloni italiani partiti alla ventura, giunti sulle spiaggie lontane sono a discrezione dei Governi o degli speculatori indigeni o di altri paesi, costretti ad aspettare che loro si offra una occasione di impiego.

Quali che sieno le promesse dei Governi americani che promuovono l'immigrazione certo è che nessuno di essi prende cura,

---

(1) Questa tendenza particolare degli italiani, oltre che dal fatto costante, ci è attestata da tutti i rapporti dei nostri Consolati all'Estero ed anche dagli osservatori stranieri.

Digitized by Google

come dovrebbe, degli emigranti che arrivano. Al più i nostri coloni trovano un *deposito* o dormitorio, dove a guisa di merci in magazzino o di bestie al mercato, aspettano le richieste. Nè a tempo indefinito: ma fino a quando per il sopraggiungere di nuove squadre, o meglio di nuovi carichi, non debbano lasciare il posto, come ospiti inutili, ai nuovi sopravvenuti (1).

Gli speculatori si presentano a quelle turbe di bisognosi, scelgono tra essi i più robusti, dettando patti che non possono essere discussi in quell' estremo bisogno e abbandonano gli altri. È cosa che fa pietà insieme e vergogna il vedere a quali vili uffici sieno costretti quei nostri connazionali per campare la vita.

E quale è la sorte di quei fortunati ai quali il maggior vigore fisico o la maggiore libertà da impegni di famiglia, ha assegnato nelle provincie interne un pezzo di terreno a coltivare?

Quelli che hanno contrattato con gli agenti di qualche fattoria già stabilita, non hanno promessa di alcuna comproprietà del suolo. Il loro è un contratto di semplice locazione d' opera,

---

(1) Molto istruttiva a questo riguardo è la *Relazione ufficiale dell' Incaricato della distribuzione della immigrazione nella Repubblica Argentina per l'anno 1873*, relazione che provocò la legge emanata da quella Repubblica il 6 Ottobre 1876, la quale non ha punto modificato lo stato delle cose, come risulta da notizie posteriori.

Il non curarsi, malgrado le pompose promesse, degli emigranti è vizio comune e persistente dei Governi americani. Il Ministero dell'Interno, su rapporti pietosi della R. Legazione, con circolare a stampa del 1877 divulgava le seguenti notizie sull'arrivo degli italiani al Venezuela..... « La emigrazione diretta al Vene-
« zuela, il cui trasporto è fatto nell'orribil modo che fu accennato di sopra,
« all' arrivo colà affranta e scoraggiata non trova nella Giunta locale di emi-
« grazione quell'appoggio e quell' accoglienza che le era stata fatta sperare e
« deve perciò ricorrere alla Legazione italiana per averne sussidi e direzioni.

« Il R. Incaricato colà accerta che muove veramente a compassione il sentire
« le grida ed i pianti di quella gente miserabile, composta di uomini e donne con
« bambini lattanti e mezzo ignudi, che imprecano tutti al mal passo cui furono
« trascinati per cieca fiducia posta in disumani speculatori e che chiede da sfa-
« marsi e da coprire i loro bambini. »

Digitized by Google

a condizioni più o meno gravose, rimesso per l'adempimento dei patti alla buona fede e alla discrezione dello speculatore e la cui durata dipende dalla buona o dalla cattiva riuscita di un raccolto. Nondimeno, malgrado tutte le incertezze della loro condizione sono questi veramente i più favoriti dalla sorte tra i nostri coloni, perchè almeno possono contare sull'interesse dei padroni a mantenerli in condizione da essere atti al lavoro. Ma sono essi il minor numero, giacchè le fattorie agricole appartenendo quasi tutte ad Inglesi, a Tedeschi, ad Olandesi ciascun conduttore attrae dal proprio paese o preferisce i propri connazionali, almeno per tutti gli impieghi meglio retribuiti e meno precari.

La grande maggioranza dei nostri coloni è condotta a dissodare le terre che ancora devono essere ridotte a coltura. E allora sieno essi assoldati per conto diretto dei Governi o per conto di privati concessionari, la sostanza e gli effetti del contratto sono gli stessi.

Il contratto promette la proprietà di quella misura di terreno che è a ciascun lavoratore assegnata. In tale condizione i coloni avrebbero bisogno di capitali per affrancare il terreno e farlo fruttare. Ma essi non hanno capitali, epperò vengono dichiarati in debito del prezzo del terreno, del valore della capanna che loro servirà di abitazione, del prezzo delle scorte e degli strumenti agrari, infine delle spese di trasporto se queste non furono da essi sostenute.

È noto che i prodotti nel primo anno di coltivazione di un terreno non sono mai abbastanza remuneratori. Non riuscendo il colono, come non può riuscire, a pagare trascorso l'anno la prima rata del suo debito, la confisca lo priva dei suoi diritti ed egli è cacciato dal fondo.

V'ha di peggio. Nel Brasile per una legge del 1837 la disgrazia del colono non si limita alla perdita del fondo dissodato, e di ogni sua fatica, chè egli può essere carcerato e tenuto, nuovo servo della gleba, a lavorare per conto del suo creditore se così a questo piaccia.

Digitized by Google

Al Venezuela per tentare di togliere gli emigrati ad ogni tutela dei Consolati, si è dichiarato per legge che i coloni ponendo il piede sul territorio della Confederazione ne acquistano di pien diritto la cittadinanza, sì che il Governo, considerandoli quali sudditi propri, non intende riconoscere alcuna azione internazionale a riguardo di essi (1).

Malgrado condizioni tanto svantaggiose, malgrado la pessima riuscita di tante spedizioni e l'eco ripetuta di tanti lamenti, l'emigrazione italiana continuò a salire.

Il Carpi, nella sua opera diligentissima, della quale dovranno sapergli grado sempre tutti gli studiosi delle questioni economiche e sociali in Italia, calcolando sopra dati ufficiali, perchè apprestati dai Prefetti del Regno, fa ascendere oltre a 40,000 gli emigrati italiani per le Americhe durante il 1873, dei quali gli otto decimi campagnuoli (2).

È probabile fossero anche più, poichè un documento ufficiale ci attesta che in quell'anno nel solo porto di Buenos-Ayres sbarcarono 26,878 italiani (3).

Nè è possibile presumere di compilare una statistica dell'emigrazione, neppure per approssimazione, quando di fianco all'emigrazione regolare ve ne ha una clandestina, che per giungere ai porti esteri di imbarco ha bisogno di eludere la vigilanza e il sindacato delle autorità locali ed ha tanti mezzi e tante vie per riuscirvi (4).

---

(1) Uguale disposizione fu inserita nella legge argentina 6 Ottobre 1876, ma soltanto per i figli dei coloni nati su quel territorio.

(2) CARPI. *Delle Colonie* Vol. III.

(3) RELAZIONE *dell' Incaricato della distribuzione della immigrazione nella Repubblica Argentina.* Buenos-Ayres 1874.

(4) Il Carpi tentò pure una statistica dell'emigrazione clandestina ricorrendo alla fonte delle prefetture. Ma è più facile spiegare il silenzio dei Prefetti che non hanno risposto, che non l'accettare senza riserve molte i dati somministrati dagli altri. Lo stesso vocabolo che si adopera a designare questa specie di emigrazione esclude la possibilità di un riscontro e quindi della statistica.

Digitized by Google

Checchè ne sia, l'opinione più accreditata è che l'emigrazione italiana di oltremare si aggiri intorno alle 50,000 persone all'anno e senza discuterla possiamo ritenere questa cifra, poichè è ufficialmente ammessa (1).

Cinquantamila persone all'anno rappresentano tale forza che ben diretta e applicata sarebbe capace dei più grandi risultati. Li otteniamo noi? Possiamo sperarli battendo la via fin qui percorsa?

Quale che possa essere la pietà destata dai racconti affliggenti di spedizioni abortite per inganni e tradimenti vilissimi usati a povere squadre di emigrati, per uno spirito di speculazione che fa disonore alla natura umana, non sarebbe a questo sentimento, per quanto nobile e rispettabile, che si dovrebbero attingere i criteri per giudicare degli effetti dell'emigrazione italiana, se quei fatti fossero isolati, se essi costituissero, come dovrebbero, l'eccezione, non la regola. Nessuna battaglia si vince senza morti e feriti. Ma quando non si abbiano argomenti validi per contraddire alle affermazioni concordi dei Consoli in America, quando non si abbiano fatti a contrapporre a fatti (2) e non solamente principii astratti a proclamare, non potrassi certamente affermare che l'emigrazione, quale si determina in Italia da al-

---

(1) RELAZIONE del Ministro di Agricoltura e Commercio sul progetto di legge presentato al Senato il 10 Marzo 1876.

(2) Il grande argomento di coloro che si ostinarono sempre a non ammettere il disordine e i malanni della nostra emigrazione furono le relazioni commerciali di Genova colle città del Plata, quasi che i genovesi si recassero colà a dissodare terreni e che quelle relazioni avessero rapporti con la emigrazione agricola. Ad ogni modo anche al Plata le condizioni dei coloni, che non furono mai ottime, sembrano ora volgere ad estrema ruina. Leggiamo infatti in una circolare a stampa del Ministero dell'Interno 10 Giugno 1877. — « ..... Gli agri- « coltori che si portano a lavorare nelle colonie devono ora lottare con nemici « forse più temibili ancora, come sono, per tacere di orribili epidemie che tal- « volta decimano le popolazioni, le cavallette e le invasioni degli Indiani. Queste « ultime che erano rare in passato ora tendono ad aumentare e le forze di cui

Digitized by Google

cuni anni e quale si svolge in America, sia provvida a se stessa, fonte di prosperità e di ricchezza alla Madre-patria, accrescimento di influenza e di decoro per una giovane Nazione.

CAPITOLO V.

Contegno del Governo italiano verso l'Emigrazione. - Contrasto di opinioni. - Società di patronato. - Progetto di legge 10 Marzo 1876.

Quando il fatto nuovo di una emigrazione disordinata e in molta parte precipitosamente rovinosa commosse in Italia la coscienza pubblica, le menti non si trovarono preparate a spiegarne le cause, nè a proporne i rimedi. A fare argine alla corrente che sempre più ingrossava e a diminuire le conseguenze finanziarie che ormai incominciavano a derivarne allo Stato, per il continuo rimpatrio di tanti sventurati, il Governo italiano, colla nota circolare del Ministero dell' Interno 18 Gennaio 1873 assoggettava

---

« dispone il Governo disgraziatamente non sono al momento tali da poterle com-
« battere e contenere; perciò i coloni si trovano esposti ad essere uccisi dai sel-
« vaggi o ad essere rubati dei bestiami e delle donne e assoggettati ad esorbi-
« tanti condizioni pel riscatto di quest' ultime.....

« ..... Le notizie che al presente giungono dalle colonie agricole della pro-
« vincia di Santa Fè, una volta già floride, sono invero delle più sconfortanti e
« tali che lo stesso Commissario generale di emigrazione in Buenos-Ayres, che
« pur sarebbe interessato ad occultarlo, ammette che lo stato delle cose è grave
« e merita di essere preso in seria considerazione e dal Governo e dai privati.
« In tutte mancano le sementi per la coltivazione dei terreni, i coloni sono ri-
« dotti nella più desolante miseria, ed esposti come si trovano alla fame od alle
« invasioni dei selvaggi, sono costretti ad abbandonare quei luoghi perdendo il
« frutto di lunghi anni di loro fatiche. »

Digitized by Google

a talune restrizioni la concessione dei passaporti, richiedendo una garanzia per le spese di rimpatrio per ciascun emigrato.

L'intenzione del Governo fu buona, ma il concetto parziale per se stesso, non avrebbe potuto dare frutti nè completi, nè buoni; ne diede invece uno cattivo per circostanze sopravvenute di altra indole.

Abolito l'obbligo dei passaporti tra la Francia e l'Italia qualunque restrizione nella concessione dei passaporti per i paesi di oltremare diveniva illusoria. Bastava mutare itinerario, far capo a Marsiglia, a Bordeaux, all'Hâvre invece che a Napoli, a Livorno, a Genova perchè cessassero tutte le difficoltà per l'emigrante. Ne approffittarono gli agenti di emigrazione e le compagnie di navigazione estere; l'Italia fu percorsa da arruolatori stranieri e l'industria italiana dei trasporti marittimi vide scemati i suoi profitti a benefizio della industria francese.

Il male si andò allora aggravando sotto tutti i rapporti e contro di esso, quasi a far prova della sua impotenza, non rimase allo Stato che la debole sanzione dell'articolo 64 della legge di pubblica sicurezza, colla quale cercò di porre in contravvenzione gli arruolatori considerandoli quali Agenti di affari non autorizzati. Diciamo cercò, perchè le contravvenzioni, difficili a provare, non potevano avere efficacia contro gli agenti stranieri, i più dannosi, senza domicilio fisso in Italia; perchè invalse presso i Magistrati la giurisprudenza più discorde e più strana; perchè infine dato pure che fosse pronunciata la condanna ad una ammenda di poche lire, rimaneva tanto di guadagno all'Agente da tornargli il conto a pagare e continuare le sue operazioni.

In quel disordine che i lamenti degli uni e le proteste degli altri aggravavano, anche le idee fuorviavano. Parve a taluni che la pratica contraddicesse alle dottrine e preoccupati esclusivamente del fatto, rinnegarono senz'altro la teoria. Altri non sapendo rassegnarsi a quella contraddizione, per amore alla teoria negarono arditamente i fatti o affettarono per essi la maggiore noncuranza. A fronte di chi sorgeva a portare sulla emigrazione giudizi tanto

Digitized by Google

severi da riuscire addirittura alla condanna di essa, (1) ne magnificavano gli altri i benefici effetti, negando allo Stato, in nome della scienza, ogni competenza ad ingerirsi nei suoi diversi fenomeni.

La contraddizione tra i fatti e i principii, più apparente che reale, proveniva essenzialmente da ciò, che nessuna legge generale, tanto nell' ordine morale come nell' ordine fisico, può essere proclamata senza una osservazione costante e completa dei fatti particolari. I fatti da sottoporre ad analisi erano mancati per lo addietro in Italia e le teorie studiate sui testi stranieri erano fondate sopra elementi di giudizio non comuni a noi. Si accettavano le conseguenti senza discutere le premesse e si facevano le meraviglie che il ragionamento non persuadesse (2). — In economia come in politica i principii segnano la meta, ma la via per giungere alla loro applicazione difficilmente si può percorrere di un tratto; l'intelligenza dell' interesse pubblico e il sentimento dell' opportunità devono dare al passo la giusta misura.

Le dispute accademiche, come i tentativi inefficaci dell' autorità non appagavano la pubblica coscienza, la quale avvertiva essere necessario qualcosa di più e di diverso, sebbene non lo sapesse definire.

Sorse allora in uomini egregi il pensiero nobile in se e per essi onorevole, di instituire una *Società di patronato* per l' emigrazione. Gli agenti arruolatori riuscivano ad ingannare le masse agricole con false notizie; pareva logico che il procurare notizie esatte dovesse combattere il male nelle sue origini con gli stessi

---

(1) Il rimprovero che può farsi al lavoro, del resto pregevole, del Florenzano è che egli, come il Winspeare ed altri, si sia lasciato di soverchio trascinare dal solo spettacolo delle disgrazie toccate agli emigranti. Solamente il Carpi sollevò la questione alla sua altezza.

(2) Taluni discorsi pronunciati al Congresso degli Economisti in Milano nel 1875 presentarono questo contrasto tra la realtà delle cose e le massime affermate.

Digitized by Google

mezzi coi quali si produceva. Quindi prima mira della Società doveva essere il procacciare informazioni sulle richieste di opera, sui compensi promessi o sperabili nei diversi paesi transatlantici e le notizie stesse, congiunte a quelle sui mezzi più acconci e profittevoli di trasporto, diffondere tra le masse con la stampa.

Il concetto generoso non era destinato a fruttificare poichè non nato vitale. Era vana lusinga quella che le nostre masse campagnuole fossero accessibili alle notizie stampate in un giornale; lusinga ancor più vana che le notizie apprestate colla stampa potessero avere la stessa efficacia di influenza della propaganda fatta a voce da agenti interessati, pronti a correggere ogni impressione, ad ingrandire ogni illusione, ad appianare ogni difficoltà, a secondare ogni moto dell'animo.

Un patronato vero per una emigrazione quale quella dei nostri contadini non può essere efficacemente esercitato senza grandi relazioni di oltremare, nè senza grandi mezzi. Il patronato avrebbe potuto riuscire ad onore dei promotori e a vantaggio reale degli emigranti, qualora fosse giunto a promuovere una associazione di capitali per impiantare nell'America o altrove veri e propri stabilimenti agricoli, dove i contadini italiani avessero potuto condividere i frutti dei loro sudori, senza curvare le spalle alle esigenze di speculatori stranieri.

Un'azione di questa natura non avrebbe potuto mantenersi a lungo senza la molla dell'interesse e non sarebbe andato gran tempo che la Società, sorta con uno scopo essenzialmente filantropico, si sarebbe convertita, per necessità di cose, in Società industriale o commerciale. Del che veramente non avrebbero avuto a dolersi nè gli emigranti, nè il paese.

Il tentativo, insomma, era dalla sua prima origine destinato a fallire e fallì per modo che pochi assai ne ebbero conoscenza.

Mancata l'opera privata venne per lo Stato la volta di riprovarsi al difficile còmpito. Le agenzie abusive di emigrazione continuavano a produrre il male ed anche il Governo pensò che da quel lato si dovesse affrontare la questione. Ridurre a disci-

Digitized by Google

plina le agenzie stesse, come avevano fatto gli altri Governi e ottenere da esse quelle garanzie che non si erano conseguite coi mezzi già tentati, fu il concetto che inspirò il progetto di legge presentato al Senato del Regno dal Ministro di Agricoltura e Commercio nella tornata del 10 Marzo 1876. Calcato sulle orme delle leggi francese e belga (è la stessa Relazione che lo ammette) ma più esigente di quelle rispetto all'ammontare delle cauzioni, più severo nella punizione delle infrazioni, il progetto italiano è meno provvido delle leggi tedesche e delle scandinave rispetto all'eccitamento ad emigrare, che non punisce. L'articolo 1.°, infatti, ha soppressa la designazione dell'arruolamento, ma vi ha sostituita la *cooperazione in qualsiasi guisa alla partenza*, che vi può perfettamente corrispondere. Scompare la parola, ma il concetto rimane. Vero è che la sanzione dell'articolo 12 nel colpire gli agenti i quali abbiano dato false notizie agli emigranti, tende a colpire indirettamente le lusinghe colle quali si induce all'emigrazione; ma come si procederebbe in pratica a distinguere fin dove la *cooperazione* fosse lecita, a riconoscere i termini precisi delle notizie date e le loro inesattezze e soprattutto a stabilire il dolo, elemento fondamentale di ogni applicazione di pena?

Praticamente adunque siffatta disposizione rimarrebbe inefficace. Ma non basta colpire le male arti colle quali si eccita alla emigrazione, poichè l'abuso consiste nell'eccitamento stesso. È essenzialmente nell'atto della sua determinazione che l'emigrazione deve essere spontanea. Il cittadino che si dispone a dire addio alla sua terra natale, troncando tutti i rapporti tra il suo passato e il suo avvenire, deve seguire unicamente il libero impulso della sua coscienza e dei suoi interessi. Ogni influenza estranea, che si inframmetta nella sua determinazione, è intrusa. Tutti i legislatori tedeschi lo compresero distintamente.

Il progetto che si propone di regolare l'emigrazione non ha che queste due sole disposizioni le quali riguardino veramente l'emigrazione. Tutte le altre non sono intese che a regolare le

Digitized by Google

condizioni e l'efficacia del contratto di imbarco. E veramente più che agenzie di emigrazione quelle che il progetto tende a creare potrebbero chiamarsi agenzie di imbarco o di trasporti marittimi di passeggieri. La loro responsabilità è limitata all'adempimento dei patti contrattuali per il trasporto a destinazione e ai rischi di mare (articoli 5, 8, 9) onde esagerato può ritenersi l'ammontare delle cauzioni richieste a questo solo fine e non proporzionato all'entità degli affari delle nostre compagnie in trasporti di passeggieri.

Penoso senza dubbio è il racconto delle privazioni e degli inganni che sovente accompagnano il viaggio dei nostri emigranti che allo Stato incombe di tutelare. Ma al postutto nell'intero processo dell'emigrazione, la traversata è la fase più transitoria e meno caratteristica, perchè comune nelle sue vicende a qualunque imbarco di passeggieri; nè un progetto di legge che miri a regolare l'emigrazione puo considerarla in quella unica fase o confondersi con un regolamento di polizia della navigazione.

Per quanto difettoso nell'applicazione e infelice nei risultamenti il concetto che inspirò la circolare tanto criticata del gennaio 1873, mirava assai meglio alle difficoltà vere della situazione. Quella infatti si preoccupava delle difficoltà del collocamento degli emigrati sulle coste straniere e voleva dare ad essi la sicurezza del ritorno qualora non avessero trovato utile impiego all'attività loro.

Nelle condizioni dell'emigrazione nostra, dei contadini in specie, i pericoli e i danni derivano essenzialmente dalle difficoltà del collocamento. Onde l'introdurre disposizioni legislative e regolamentari le quali avessero dato un avviamento alla costituzione di vere e proprie compagnie di colonizzazione, sarebbe stato un grande e benefico progresso, tanto rispetto agli individui, quanto rispetto al paese. Il porre invece l'emigrazione in mano alle agenzie di imbarco è il massimo dei pericoli ai quali la si potrebbe esporre. Sarebbe in altri termini legalizzare molti degli abusi attuali.

Digitized by Google

Il progetto 10 Marzo 1876 tenne conto della disposizione della legge prussiana, che attribuisce all'Autorità amministrativa la liquidazione dei danni. Ma ne disconobbe la conseguenza. L'efficacia di quella disposizione in Prussia sta in ciò che all'agente è precluso ogni appello ai Tribunali. Il progetto italiano (art. 9) attribuisce all'Autorità amministrativa la liquidazione dei danni e dei compensi fino a tanto che non sorga dissenso tra le parti; in altre parole fino a tanto che le parti potrebbero fare da se senza l'intervento di nessuna Autorità. Appena sorga un dissenso è l'Autorita giudiziaria che deve risolverlo.

Forse l'indole della legislazione nostra non comportava una eccezione alla competenza ordinaria nella definizione di diritti privati. Se questa considerazione era sorta, la sola conseguenza logica era la soppressione integrale di quella disposizione, la quale, inutile in caso di bonario accordo, non sarebbe più applicabile quando ne sorgerebbe il bisogno. È a prevedere che il dissenso tra le parti si manifesterebbe sempre per il conflitto stesso degli interessi dell'emigrante danneggiato e dell'agente tenuto all'indenizzo; il quale agente, non fosse che per indugiare, si rivolgerebbe sempre al tribunale, perchè paga meno chi paga dopo.

Del rimanente, quale che fosse il valore del progetto, posto che fosse in atto, non avrebbe efficacia di sorta a far cessare quegli abusi che ormai più nessuno contesta. Non l'avrebbe poichè fino a tanto che non esista obbligo di passaporti colla Francia, tutti i valichi alpini saranno adatti per eludere qualunque più oculata vigilanza e per continuare una trista speculazione delle compagnie francesi a nostro danno.

Digitized by Google

CAPITOLO VI.

Limiti razionali dell'ingerenza dello Stato nelle materie dell'emigrazione. - Quale dovrebbe essere l'azione dello Stato in Italia.

L'interesse pubblico che si connette al fatto dell'emigrazione è il fondamento della competenza dello Stato in questa materia. I confini entro i quali deve essere circoscritta l'azione dello Stato sono segnati da quello stesso principio che ne è il fondamento.

Tutti i problemi economici sono complessi; la loro soluzione sfugge a chi non ne veda che un lato solo o non li affronti dal vero punto di vista. Chi si limiti a considerare nell'emigrazione il fatto in se stesso e si domandi quale sia il *diritto* dello Stato verso di essa, sarà costretto a rispondere che non v'ha diritto, perchè volendo definirne alcuno, giungerebbe inevitabilmente ad una coazione di diritti individuali. E questo è l'errore nel quale sono generalmente caduti quanti hanno trattato quest'argomento.

Ma chi invece considerando il fatto nella sua complessività si avveda che l'emigrazione, semplice effetto per se stessa, non è suscettibile di esame razionale disgiunta dalle sue cause, non si domanderà quale sia il *diritto*, ma quale sia il *dovere* dello Stato a fronte di essa. Quindi la norma di condotta, come la legittimità dell'azione dello Stato, discenderanno da questa distinzione tra diritto e dovere, la quale segnerà un diverso punto di partenza e un indirizzo diverso.

L'emigrazione essendo il prodotto necessario di cause che operano sull'organismo sociale, l'interesse pubblico, dal quale procede l'azione dello Stato, risiede in quelle cause. Lo Stato ha

Digitized by Google

perciò il dovere di correggere quelle cause, in quanto esse sieno suscettibili di rimedio, se da quelle proviene un impedimento o una limitazione alla prosperità del paese, non ha diritto di contrariarne gli effetti. Il contrasto tra l'interesse del cittadino e le condizioni del paese spinge quello alla partenza; qualunque azione che tendesse ad impedirgli di partire costringerebbe il cittadino a subire uno stato di cose contrario ai suoi interessi e sarebbe una violenza. Còmpito dello Stato è invece trovar modo onde si stabilisca l'armonia tra l'interesse privato e le condizioni del paese; armonia sulla quale riposa la prosperità pubblica, che è il supremo interesse pubblico.

Quindi il contegno dello Stato rispetto all'emigrazione deve avere questa norma assoluta: nulla che comprima il diritto dei cittadini, tutto che ne promuova o ne tuteli gli interessi.

L'Italia non è in tali condizioni da ascrivere ad esuberanza di forze la propria emigrazione. Paese cui la natura fu larga di doni, ancora conta a centinaia di migliaia gli ettari di terre incolte; dalle coltivate non ritrae, per povertà di metodi, quanto esse potrebbero fruttare e vede allo stato di infanzia le industrie che dalla sua agricoltura e dalle sue miniere potrebbero trarre vita rigogliosa e splendida. L'indole dei suoi abitanti non è avventuriera; l'affetto alla patria è in essi generale e tenace tanto che neppure emigrando si affievolisce. Eppure l'emigrazione vi ha assunte proporzioni enormi e specialmente in quelle classi nelle quali è più ristretto l'orizzonte intellettuale e più vivo l'attaccamento al suolo natìo.

Solamente il concorso di molte cause insieme può avere dato origine a un tale fatto.

Le condizioni economiche delle classi campagnuole in Italia non sono prospere certamente. In talune regioni, anzi, sono durissime; assai più dure di quanto non pensi chi non le abbia vedute da vicino. Ma da regione a regione esse presentano differenze notevolissime, tanto da non reggere al confronto le une

Digitized by Google

colle altre. (1) Chi potesse riprodurre, ad esempio, in Piemonte, in Lombardia o in Toscana le *condizioni materiali* dei contadini di Calabria provocherebbe in ventiquattr'ore uno scoppio di guerra sociale. Eppure, checchè altri ne pensi, l'emigrazione dalle provincie meridionali è ben lontana dall'avvicinarsi a quella dell'Alta Italia, tanto in numero assoluto quanto in ragione di densità della popolazione. In alcune provincie dell'Italia meridionale dove le masse campagnuole sono più povere, come negli Abruzzi e nella Calabria, noi abbiamo numerose e costanti le emigrazioni periodiche interne; scarsissima la emigrazione d'oltremare. In tutto il mezzogiorno d'Italia l'emigrazionne permanente non ha importanza che nelle provincie di Potenza e di Salerno, con effetti più vantaggiosi per la Salernitana per le sue antiche relazioni con l'America.

Il grosso contingente all'emigrazione campagnuola è dato dalle provincie dell'Alta Italia.

Chi propenda a non vedere in questo fatto che l'effetto di un abuso, affermerà doversene ascrivere la colpa alle arti delle Agenzie. E veramente l'azione di queste si è manifestata e doveva manifestarsi a preferenza in quella parte del Regno, dove la rendevano più agevole la vicinanza alle loro basi di operazione, le comunicazioni più facili e spedite, la prossimità dei confini.

Ma dato pure che l'opera delle Agenzie sia stata più attiva nell'Alta Italia, certo è che essa ha avuto tale successo da non permettere di considerare questo come il prodotto esclusivo di un artifizio. Una causa intima doveva pure esistere perchè i contadini dell'Alta Italia dovessero cedere all'impulso insolito.

Pur troppo sono molti in Italia i quali malgrado le voci di allarme gettate da uomini di mente e di cuore, non si sono per-

---

(1) Intorno alle condizioni delle plebi campagnuole nell'Italia meridionale, veggansi i diligenti lavori del FRANCHETTI e del SONNINO: *Note ed appunti di viaggio nelle provincie meridionali* e *La Sicilia nel 1876*.

Digitized by Google

suasi ancora delle condizioni affliggenti che si sono venute facendo e che vanno peggiorando per le classi campagnuole. È vezzo antico parlare dei contadini del Piemonte, del Veneto, della Lombardia in specie, come se la loro condizione fosse confortevole. E intanto non si avverte che a misura che le tasse si vennero aggravando sui proprietari, i contadini ne sentirono il contraccolpo; che a misura che i prestiti pubblici e le speculazioni industriali hanno offerto un più facile o più pingue impiego al danaro i capitali si sono ritirati o hanno cessato di affluire all'agricoltura; che infine a misura che all'economia diretta è subentrato il sistema delle affittanze, il contratto colonico si è venuto modificando e sempre in senso gravoso al contadino.

In pari tempo la diffusione dell'istruzione, la maggiore facilità delle comunicazioni, i guadagni temporanei ma più larghi procurati dalle grandi costruzioni, i contatti sempre più frequenti coi grandi centri davano luogo a confronti e riflessioni inevitabili, introducevano abitudini meno ristrette, facevano sentire anche ai contadini più distinto il desiderio di una esistenza meno limitata e meno travagliata allora appunto quando le loro condizioni andavano peggiorando.

Il povero contadino calabrese senza dubbio, in termini assoluti, è più miserabile del contadino dell'Alta Italia. Ma nello stato di ignoranza e di abbiezione in cui è tenuto non ne ha coscienza. È più miserabile, ma è meno infelice.

La miseria adunque congiunta alla coscienza di essa è la prima cagione per la quale i contadini della Valle del Po hanno ceduto alle istigazioni degli arruolatori. Ne abbiamo una prova luminosa nel modo stesso come le diverse provincie di quella regione sono rappresentate nella statistica dell'emigrazione. La provincia di Bologna, ad esempio, nella quale le condizioni del contadino sono relativamente migliori, dà il minor numero di emigranti.

Cause affini sostanzialmente e negli effetti identiche determinano l'emigrazione degli operai e industrianti.

Digitized by Google

Dopo un periodo di agitazioni e di sconvolgimenti politici, quale l'Italia ha attraversato da un quarto di secolo in quà, è inevitabilmente grande il numero di coloro i quali, abbandonato volontariamente o forzatamente il corso dei loro affari per quanto modesti, o più non trovano o più non si adattano ad un nuovo assetto in ristrette condizioni. Questa schiera di « disoccupati » e fino a un certo punto di « vittime delle rivoluzioni », si ingrossa in Italia col forte contingente degli industrianti e degli operai, ai quali il lavoro vien meno.

L'associazione dei capitali, la cui mercè soltanto sarebbe possibile in oggi migliorare le nostre industrie e sostenere la concorrenza, non accenna ancora ad entrare nelle consuetudini della classe produttrice. All'infuori dei grandi centri non c'è ombra di associazione. Il piccolo manifatturiere coi suoi metodi antiquati, coi suoi mezzi imperfetti e limitati, non può sostenere la concorrenza che gli fanno i prodotti, che dall'estero e dai centri maggiori, usufruendo delle nuove comunicazioni, arrivano dovunque migliori, più abbondanti e più a buon mercato. Egli è rovinato e con lui gli operai che lo aiutavano e i piccoli industrianti e i piccoli commercianti che dal modesto e quasi casalingo opificio traevano i mezzi ad una vita limitata.

Il padrone di bottega rovinato ordinariamente non emigra, perchè ha consumato nella inutile lotta la sua energia e perchè non sa rassegnarsi ad intraprendere una nuova vita nella condizione di dipendente, egli che fu *principale*. Ma gli altri consoci di rovina non hanno miglior partito a prendere che la via di America.

L'emigrazione italiana, adunque, aggravata in generale da cause fittizie e transitorie, ha la sua prima ragione di essere in cause naturali e permanenti. Ciò spiega come essa abbia persistito vincendo anche la repugnanza che doveva seguire il pietoso spettacolo di tante spedizioni abortite o indegnamente tradite.

Fino a tanto che perdurano queste cause è vano lo sperare che l'emigrazione possa cessare o assumere caratteri diversi dai suoi attuali.

Digitized by Google

Ma forse perciò lo Stato dovrà restringersi a « lasciar passare » questa numerosa colonna di bisognosi, senza far nulla per risparmiarle la necessità di intraprendere una vita di avventure, senza aiutarla neppure nei suoi sforzi su terra straniera?

La dottrina degli astensionisti assoluti spoglia a questo riguardo lo Stato di quanto ha di più nobile ed elevato il suo ufficio.

Enrico IV Re di Francia il quale riponeva la sua ambizione nell'assicurare a ciascun francese il pollo per la Domenica, ci lasciò un detto che vale più di tutti i trattati di economia. Il benessere diffuso in tutto un popolo è il più grande compito cui possa adempiere un Governo. Le ricchezze accumulate in poche mani non salvano gli Stati dalle rovine e preparano le crisi sociali violente; la prosperità distribuita in tutte le classi dà la consistenza per resistere a qualunque scossa.

Il dovere dello Stato rispetto all'emigrazione, già l'abbiamo detto e il ripeterlo qui giova, è doppio; rimuovere, in quanto sia possibile le cause, se queste non rappresentino eccedenza di forze, ma insufficienza di mezzi; proteggerla nelle sue diverse fasi affinchè riesca a buon fine per se e per il paese.

L'Italia non può sottrarsi a questo doppio còmpito. Essa ha sciupato la più bella occasione che uno Stato potesse desiderarsi per compiere una vera rivoluzione economica, allorchè sperperò a solo scopo finanziario la sterminata proprietà demaniale ed ecclesiastica.

Le strettezze dell'Erario richiedevano il sussidio di straordinari proventi, è vero. Ma un amministratore provvido non sacrifica alle necessità del momento le sorti dell'avvenire, nè l'Italia le avrebbe sacrificate se il dottrinarismo invadente non avesse sentenziato fin d'allora essere indebita qualunque azione dello Stato che si estendesse oltre al togliere gli ostacoli alla libera commerciabilità dei beni. Si sarebbe dovuto riflettere e riconoscere invece che quello stesso principio dell'interesse pubblico che legittimava l'incameramento delle proprietà di mano morta,

Digitized by Google

avrebbe legittimato qualunque trasformazione della proprietà stessa, perchè la facoltà di togliere è più forte e include la facoltà di dare, tanto nei rispetti giuridici quanto nei rispetti economici. (1)

Se noi avessimo fatto sorgere, come i mezzi e l'occasione ci abbondavano, sulle rovine della manomorta una intiera classe di piccoli proprietari, noi avremmo provveduto ad un alto interesse economico e politico insieme.

Quella occasione ormai è fallita, ma i mezzi di tentare l'opera rigeneratrice, perchè scemati, non sono scomparsi. — Restano le terre incolte, salvi i diritti dei proprietari attuali; restano i beni comunali; i beni delle opere pie; i beni degli antichi demani feudali usurpati da rivendicare; (2) restano infine gli avanzi dei beni demaniali ed ecclesiastici che da soli non basterebbero a grandi progetti, ma il cui prezzo potrebbe utilmente servire alla fondazione di quegli istituti di credito agrario che sarebbero il completamento necessario di una vasta censuazione di beni.

Non tutti i contadini colla censuazione di beni, in altri termini colla colonizzazione interna, potrebbero divenire proprietari; nè a ciò dovrebbe limitarsi l'azione dello Stato. Ma basterebbe già questa conversione di migliaia di operai dei campi in proprietari a produrre, con effetti incomparabilmente più solleciti e benefici, quel miglioramento che ai contadini e all'agricoltura augurano e sperano i nostri economisti dalla sottrazione improduttiva di braccia operata dall'emigrazione. Intanto che rimarrebbe a studiare se il contratto colonico sia suscettibile per legge di modi-

---

(1) Chiunque conosca le provincie meridionali del Continente e dell'Isola è in grado di apprezzare l'esattezza degli studi fatti dal FRANCHETTI e dal SONNINO sui risultati della liquidazione dell'asse demaniale e dell'asse ecclesiastico. Alla manomorta si è sostituito, estendendolo, il latofondo e il sistema degli appalti per i piccoli lotti non ha fatto che creare una nuova categoria di immoralità, di soprusi e di odii.

(2) In Calabria rimane la Sila, la quale potrebbe da se sola costituire il principio della rigenerazione di quella regione.

Digitized by Google

ficazioni tanto nella forma che nella sostanza (1) e quali altre instituzioni possano introdursi a favore delle classi campagnuole e di quale organizzazione esse sieno capaci per azione propria o per influenza altrui.

L'emigrazione dei contadini, è stato il nostro pensiero fisso; nè ci pare di aver commesso errore. Oltre che più numerosa, è questa realmente che desta maggiori preoccupazioni, che richiede maggiori cure e che ne è più suscettibile. L'Italia paese essenzialmente agricolo non può rassegnarsi indifferente a vedere turbata e sconvolta la base della sua prosperità economica. Inoltre la emigrazione colonica è quella che più soffre delle difficoltà del collocamento in paese straniero e che nelle condizioni nelle quali si determina e si svolge ha minori probabilità di riuscita.

Togliere le cause dell'emigrazione industriale è meno in potere dello Stato. L'associazione dei capitali, il progresso della meccanica, l'incremento delle arti e del commercio non sono mezzi dei quali lo Stato disponga; nè a produrli basta la promulgazione di una legge. Può lo Stato, ed è doveroso per esso, aver riguardo alle industrie nazionali nelle tariffe doganali, nel misurare le tasse, nel conchiudere i trattati di commercio, fin dove l'interesse dei produttori non entri in contrasto coll'interesse dei consumatori. Ma all'infuori di una siffatta azione indiretta poca latitudine ha lo Stato per migliorare le industrie alle quali devono rivolgersi i capitali privati.

Molto rimane a fare allo Stato in Italia per coprire con tutela l'una e l'altra specie di emigrazione.

Già abbiamo dimostrato come il progetto di legge 10 Marzo 1876 non promettesse alcun utile effetto. Poichè le Agenzie di

---

(1) Il SONNINO nel suo libro *I Contadini in Sicilia* fa a questo riguardo parecchie proposte degne di studio. A noi basta accennare alla questione per dimostrare quanto estesa sia l'azione che rimane allo Stato per togliere le cause dell'emigrazione.

Digitized by Google

emigrazione con esso ideate altro non sarebbero che vere e proprie Agenzie di imbarco, meglio sarebbe il commettere addirittura la responsabilità dei contratti di imbarco alle Compagnie di navigazione ed agli Armatori, con discipline assai più temperate.

Oltre che si avrebbero con questa preferenza una solidità maggiore nei responsabili e nel caso di traversie lungo il viaggio, mezzi più diretti e più sicuri per rimediarvi, si avrebbe altresì nella stessa posizione commerciale degli obbligati una garanzia maggiore contro le probabilità di frodi, le quali hanno quasi sempre origine dall'intermediario.

E quì sia lecito gettare uno sguardo nell'avvenire per intravedere quale grande interesse avrebbe l'Italia ad accreditare, con provvedimenti opportuni, la sua industria dei trasporti marittimi. Aperto lo sbocco del Gottardo tutta l'emigrazione svizzera e tedesca per i mari del Sud e specialmente per l'America meridionale, che ora cerca imbarco a Brema, all'Hâvre, ad Amburgo, avrebbe il suo porto naturale in Genova, purchè vi trovasse uguali garanzie.

Non si speri però mai reprimere alcun abuso nell'emigrazione e nel trasporto degli emigranti, se non si ristabiliscano i passaporti tra l'Italia e la Francia. Se non si ha il coraggio di ricorrere a questo rimedio è perfettamente inutile stabilire con una legge quali carte debba avere chi si presenta a bordo. Le ferrovie del Cenisio e di Ventimiglia, non i piroscafi italiani, trasporteranno gli emigranti per le Americhe.

Sembrerà questa una eresia economica. Ma al postutto chi guardi alla sostanza non alla apparenza delle cose, dovrà convenire che le molestie e gli impedimenti alla facilità delle comunicazioni internazionali provengono meno dall'obbligo del passaporto, che dalle esigenze doganali, le quali non si possono sopprimere. E chi guardi alla pratica si avvedrà che dalla Francia in Italia viene chi vuole e vi rimane senza molestie. Ma gli Italiani, i quali non abbiano in Francia carte personali in perfetta regola, possono aspettarsi quando che sia di essere rimandati al

Digitized by Google

confine. Così stando le cose, a che si ridurrebbe per un Italiano il maggior tedio di procurarsi un passaporto per l'estero, anzichè un passoporto per l'interno, che è il meno gli possa occorrere in Francia?

La emigrazione italiana per dichiarazione ufficiale ascende a 50000 persone all'anno, il 25 per % dell'accrescimento della popolazione. Altri guardi con occhio tranquillo e quasi compiacente questa cifra enorme; essa a noi rappresenta un cumulo di doveri per lo Stato.

La mancanza di capitali per affrancarsi dagli speculatori stranieri, la violazione dei patti per parte dei Governi, la giustizia negata dai Tribunali americani sono le cause che più turbano il collocamento dei nostri contadini in America. A ciascuna di queste cause malefiche si può opporre rimedio corrispondente. Si possono promuovere e favorire associazioni per ottenere, con esclusione degli speculatori stranieri, la concessione di terreni a nazionali, con intervento opportuno dei Consolati. Si può e si deve esigere dai Governi americani il mantenimento dei patti; si deve chieder conto della negata giustizia.

Citiamo ancora una volta l'Inghilterra la quale, se venga torto un capello o negato uno scellino ad un suo suddito, non accorda più tregua fino a che non segua la punizione del colpevole o il pagamento del debito.

Noi teniamo in America una stazione navale per la protezione degli interessi nazionali. Ma non si è mai inteso, con tanti soprusi e vessazioni patite dai nostri coloni e ufficialmente pubblicate, che una nave abbia avuto ordine di esigere che un torto fosse riparato o un danno risarcito.

Nel vasto campo di azione che siamo venuti delineando, l'Italia più di qualunque altro Stato in questo momento ha dovere e necessità di esercitarsi. Nè il farlo consente lungo indugio poichè il fenomeno si palesa nelle sue fibre più vitali, perchè noi corriamo verso quel punto della vita di un popolo, in cui una classe numerosa non si rassegna più alla miseria come a proprio retaggio.

Digitized by Google

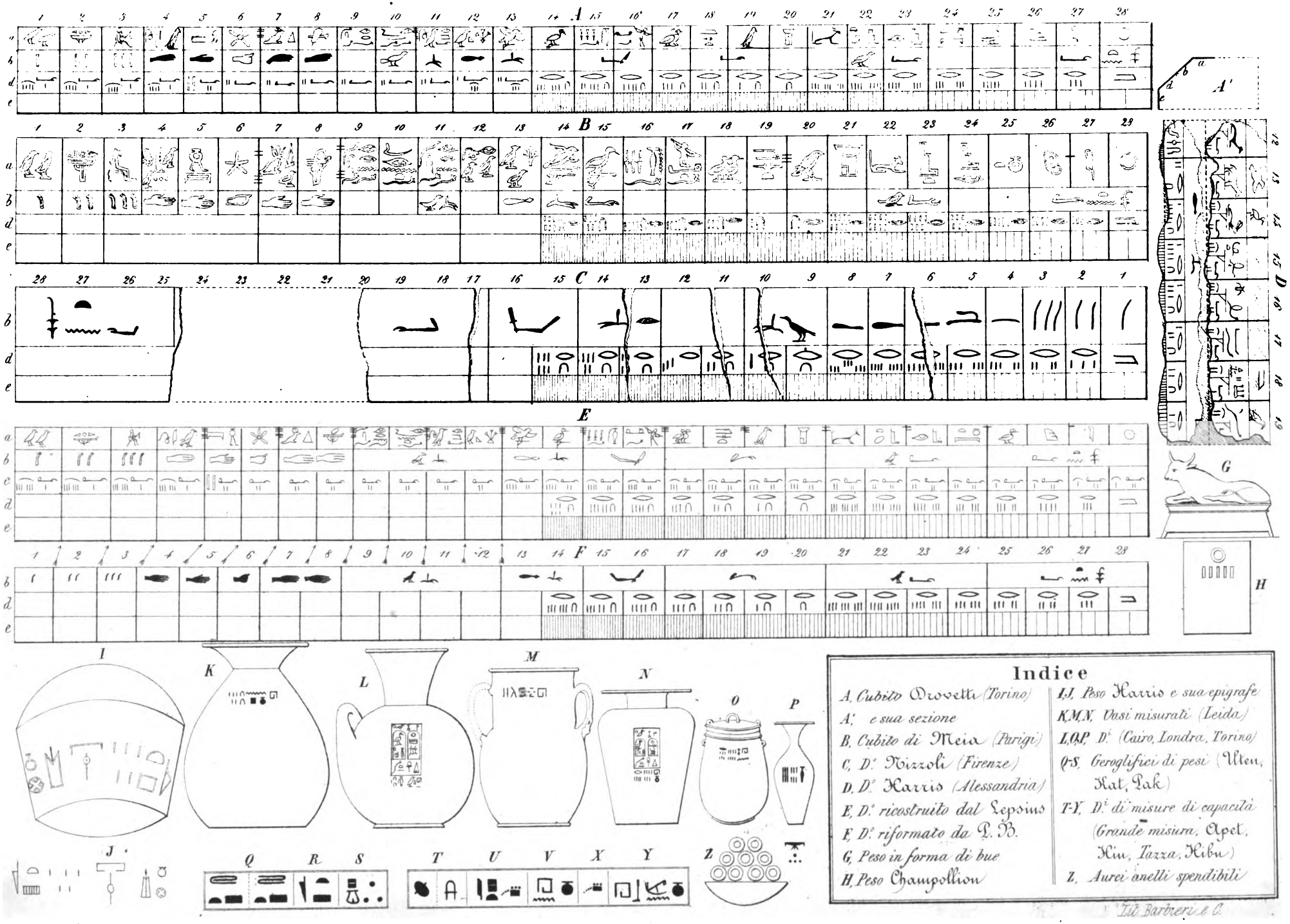
In oggi i contadini tentano sfuggire alla miseria coll'emigrazione, come la più facile tra le soluzioni che ad essi si presentano. Fallito e discreditato lo spediente dell'emigrazione, non si può prevedere a quale altro partito ricorreranno domani. Oggi essi prestano ascolto alle lusinghe degli Agenti di emigrazione; non sappiamo a quale altro apostolato cederanno domani.

La questione è grave; l'applicazione dei rimedi è difficile; ma a questa stregua si riconoscono gli Uomini di Stato.

G. CAVASOLA.

Digitized by Google

Digitized by Google



Indice

A, Cubito Drovetti (Torino)
A', e sua sezione
B, Cubito di Meia (Parigi)
C, D.° Mizzoli (Firenze)
D, D.° Harris (Alessandria)
E, D.° ricostruito dal Lepsius
F, D.° riformato da P. B.
G, Peso in forma di bue
H, Peso Champollion
I, J, Peso Harris e sua epigrafe
K, M, N, Vasi misurati (Leida)
L, O, P, D.° (Cairo, Londra, Torino)
Q-S, Geroglifici di pesi (Uten, Hat, Pak)
T-Y, D.° di misure di capacità (Grande misura, Apet, Hin, Tazza, Hibu)
Z, Aurei anelli spendibili

Tip. Barbèri e C.

Digitized by Google

DEL

PRIMITIVO CUBITO EGIZIO

E DE' SUOI GEOMETRICI RAPPORTI

COLLE ALTRE UNITÀ DI MISURA E DI PESO

EGIZIANE E STRANIERE

Il campo della metrologia faraonica, un dì sconosciuto affatto, oggi ancora ad onta di fortunate scoperte è ben lungi dall' essere interamente esplorato e sfruttato. Per ciò non è qui ad attendersi, nella mal nota materia, un pieno e formale trattato: incompatibile del resto coi limiti imposti a questo scritto accademico.

Forse tra gl' inesausti, e ancor nascosi o inavvertiti, tesori monumentali ed epigrafici dell' antichissimo Egitto l' avvenire ci serba altre rivelazioni; che manifestino intero il metrico sistema faraonico. Intanto però, in aspettazione di futuri e più proficui ritrovamenti, non sarà prematuro, nè frustraneo il passare a rassegna quel po' che per sorte se n' è reso palese fin qui.

Misure e pesi hanno un' importanza archeologica maggiore di quella che taluni sembrin disposti ad attribuirvi. Nati da una delle primissime necessità sociali, e passati in retaggio ad inconscii posteri dalle età più rimote, son parte non ultima del primitivo patrimonio della umanità. Più antichi assai di qualsivoglia più vetusto monumento superstite, seguirono i prischi

Digitized by Google

popoli nelle lor migrazioni e conquiste; i commerci nelle lor vicende: e la tenace vitalità loro desta stupore. Chi ne sa dire, ad esempio, come il reale cubito egizio, che presiedette alla costruzione delle piramidi, viva ancora nel fabbrile braccio di Modena?

Derivati, que' metrici sistemi antichi, da una medesima e naturale unità lineare, il cubito umano, mostran tuttora a chi ben scerna, ne' lor rapporti reciproci, la origine comune; e anche dopo le variazioni molteplici portatevi dall' uomo, e le accidentali indottevi dal tempo, appaion rami d' un medesimo tronco.

Solo l' egizio sistema parea ad alcuni ricisamente staccarsi: e offerire elementi restii ad ogni assimilazione.

Riconsiderare adunque le faraoniche unità metriche apparse, e investigare il nesso che per avventura le rannodi alle misure già note; anzi, come anteriori di tempo, più le raccosti allo stipite; non può non parere assunto degno di essere tentato, quand' anche, per insufficienza di opportuni dati archeologici, non avesse interamente a riuscire.

I.

CUBITO

Sommario. — 1 Origine e antichità del cubito. — 2 Scoperta di cubiti faraonici, — 3 giudicati dal Lepsius imitazioni sepolcrali. — 4 Loro forma e divisione; — 5 e ingegnosa suddivisione del digito. — 6 Digito, palmo, spanna, — 7 *ser*, *remen*, — 8 sono subalterne misure desunte dalla mano e dal braccio. — 9 Cubiti *piccolo* e *reale*; — 10 irregolari lor partizioni intruse. — 11 Qual dei due sia il primitivo; — 12 derivazione del *reale* dal *piccolo*; — 13 contraria opinione del Lepsius; — 14 e conseguente sua ricostruzione del cubito — 15 irta di difficoltà — 16 e contraddetta da un cubito originale, — 17 diviso per palmi isometri. — 18 Altri cubiti posteriori ai faraoni. — 19 Rapporto de' cubiti egizii con quelli di Babilonia, — 20 e d'Assiria, — 21 e coll' olimpico, confuso a torto col *piccolo* egizio, — 22 ma che parrebb' essere piuttosto il *piccolo* assiro, — 23 ad onta di apparenze contrarie, — 24 il cui tentato chiarimento rende non improbabile la detta genesi sua. — 25 Riepilogo e chiusa.

1. Il cubito, naturale lunghezza del braccio umano dalla punta del gomito all' estremità delle dita, come il figura ancora il suo antichissimo geroglifico egizio, fu ab immemorabili assunto

Digitized by Google

qual metrica unità lineare; siccome pronto e acconcio strumento misuratore offerto dalla stessa natura: la quale nelle estremità umane avea provvidamente posti gli elementi, come del sistema dei numeri, così di quello delle misure. Il braccio da prima, poi un bastone tagliato alla lunghezza di esso, dovette essere la primitiva misura; sin che, ad eliminare l' inconveniente delle diversità brachiali, fu adottata una media, che per consuetudine, od autorità, diventò comune e costante.

Il racconto biblico (1), e le ancor più antiche tradizioni caldaiche, cui attinse Beroso, (or tornateci in luce nelle cuneiformi tavolette d' Assur-bani-pal, desunte da più vetusti testi di Erech, e sepolte fra le ruine di Ninive) (2), riportano l' uso del cubito oltre il diluvio; riferendo in *cubiti* le dimensioni dell' arca salvatrice. Nè fa meraviglia: anzi maraviglia sarebbe se così non fosse. L' antidiluviana società, vissuta e moltiplicatasi per migliaia d' anni, dovea avere raggiunto un considerevole grado di sviluppo. All' età noetica ci son descritti come antichissimi l' arti e i mestieri (3); e con essi avean ad esserlo pesi e misure. Ciò può contribuire a spiegare l' affinità più o men palese tra le misure degli antichi: poichè al risorgere e rimoltiplicarsi della famiglia umana, e innanzi la divisione delle schiatte, una metrica base comune già dovea esser fermata ab antico. Questo accordo del resto fra le tradizioni sacre e profane, anche dal semplice lato scientifico, ha un alto valore.

2. Quanto alle misure del primitivo Egitto, che indarno i moderni avean tentato ricostruire sopra vaghi supposti e infide analogie, gli scrittori della classica antichità ci avean lasciati al buio.

---

(1) *Genes.* VI, 15, 16.

(2) *Revue polit. et lit.* T. IV 1873 p. 818. Menant *Babylone et la Chaldée;* Paris 1875, p. 24, ec.

(3) *Genes* IV, 21, 22.

Digitized by Google

Un primo raggio spuntò quando, rilevate dal Greaves le dimensioni della camera reale nella grande piramide, ebbe il Newton indovinato dover quella avere 20 cubiti pel lungo e 10 per largo; deducendone così la probabile misura del cubito egizio in piedi inglesi 1, 719 (1): corrispondenti a $0,^{m}$ 523 95, e portati poi da più esatte misurazioni posteriori a $0,^{m}$ 525 (2).

Più recenti misure di architettonici monumenti egiziani svelarono l' esistenza d' altro egizio cubito minore. Il quale, per non ben fondata presupposizione di greco sistema, fu da' migliori metrologi stimato dover essere di $0,^{m}$ 462 — $0,^{m}$ 463 (3). Nel che si rasentò bensì il segno, come appresso vedrassi, ma senza riescire a toccarlo. Del resto dalle poco esatte costruzioni d' Egitto, (fra le quali non è raro incontrare, p. e., intercolonnii ineguali, quadrati non equilateri, parti simmetriche non rispondenti giustamente fra loro), non era agevole ritrarre le fondamentali unità di misura. O piuttosto fra la moltiplicità delle linee, che l' architettura offre all' osservatore, troppo era facile di trovare quanto la prevenzione ci avesse condotti a cercarvi (4).

Frattanto però una serie di felici ritrovamenti venne rimettendo all' aprico, oltre al celebre Nilometro d' Elefantina scoperto dal Girard (5), una decina d' antichi cubiti egizii, quali d' età faraonica, quali di più tarda; le cui lunghezze differendo appena di qualche millimetro fra loro, confermarono la media misura del vetusto cubito faraonico in $0,^{m}$ 525 (6).

---

(1) Newton *Opuscula mathem.* T. III, Diss. *De sacro Jud. cubito* p. 495.

(2) Queipo *Essai sur les systèmes métriques* Paris 1859; T. I p. 533. Hultsch *Griechische und roemische Metrologie*, Berlin 1862; p. 280. Cf. Lepsius *Die alt-aegyptische Elle und ihre Eintheilung*, Berlin 1865; p. 10.

(3) Boeckh *Metrologische Untersuchungen*, Berlin 1838; p. 227. Hultsch *Op. c.* p. 280. Lepsius *Op. c.* p. 6-10.

(4) Lepsius *Op. c.* p. 4-5.

(5) *Mémoire sur le nilomètre d' Elephantine*, 1822.

(6) Queipo *Op. c.* T. I p. 47.

Digitized by Google

Ne diè l' elenco il Queipo; reso più accurato e completo dal Lepsius. Ed eccolo in breve.

1.° Cubito di *Amon-em-apet*, in legno; trovato dal Drovetti fra le ruine della necropoli di Menfi. È nel museo di Torino; misura 0,^{m} 5235; e porta il cartello del re Oro, che ne fa rimontare la data al XVII secolo innanzi l' era volgare (1).

2.° Cubito di *Meia*, in legno di Meroe; lungo 0,^{m} 523 nella parte anteriore, 0,^{m} 525 nella posteriore: passato dalla collezione Drovetti al museo del Louvre (2).

3.° Cubito di *Amon-hotep*, in pietra: uscito dalla necropoli di Menfi, appartenne alla raccolta Nizzoli e or si conserva a Firenze. È in sette frammenti; ed è mancante d' un tratto, verso il fine. La supponibile lunghezza totale vien calcolata in circa 0,^{m} 523 (3).

4.° Cubito della raccolta Anastasi in ardesia; rotto in tre parti: della lunghezza di 0,^{m} 526 5 (4).

5.° Cubito in legno, del museo Britannico; di 0,^{m} 525 98 (5).

---

(1) Pubblicollo il Jomard: *Description d' un étalon métrique* (Paris 1822), e in una *Lettre à M. Abel Remusat sur une nouvelle mesure de coudée trouvée à Memphis* (Paris 1827). Indi il ripubblicarono il Thenius, *Alt-aegyptischen Masstäbe* (Dresda 1846); il Saigey, *Traité de métrologie* (Paris 1834); il Queipo, *Op. c.* T. I, p. 44 n. 1, Tav. fig. 1ª; il Lepsius, *Op. c.* p. 14 n. 1, Tav. I, *b*.

(2) Fu pubblicato dal Jomard nella sua lettera al Remusat; dal Queipo *Op. c.* T. I p. 45 n. 3, Tav. fig. 2; dal Lepsius *Op. c.* p. 14 n. 2 Tav. II, *a*.

(3) Fu edito dal Migliarini, *Di un cubito marmoreo egizio della raccolta del Sig. G. Nizzoli* (*Biblioteca ital.* di Milano, 1824, n. XCVII, XCVIII p. 45 seg); e il ridiedero in luce il Jomard nella lettera suddetta, il Queipo *Op. c.* T. I p. 44 n. 2. Tav. fig. 3, il Lepsius *Op. c.* p. 14 n. 3, Tav. III, *b*.

(4) Pubblicato nella *Biblioteca italiana* T. LIII p. 208, registrato dal Queipo *Op. c.* T. I p. 45 n. 5, e riprodotto dal Lepsius (Tav. III, *c*; p. 15 n. 6, p. 57) da un disegno di Londra: non conoscendosi da lui l' originale, che il Saigey disse essere in Prussia, il Jomard in Italia, il Queipo a Firenze.

(5) Descritto dal Queipo *Op. c.* p. 46 n. 9, e ricordato dal Lepsius *Op. c.* p. 17 n. 10.

Digitized by Google

6.° Frammento Raffaeli, in basalte: che parrebbe mostrare una originaria lunghezza di 0,^{m} 524 (1).

7.° Frammento Harris, d' altro cubito in pietra (2).

8.° Cubito in basalte, esistente a Torino; di circa 0,^{m} 527, ma diviso diversamente dai precedenti (3).

9.° Cubito in bronzo, pure a Torino; di 0,^{m} 524 con singolari divisioni tutte sue (4).

10.° Cubito in legno, con iscrizione coptica; già nella raccolta Anastasi, or nel Museo Britannico: misura 0,^{m} 5387 (5).

Gli ultimi tre di questi cubiti paion d' età posteriore alla faraonica: i tre primi ed il settimo son riprodotti nella Tavola nostra, in piccole proporzioni, alle lett. A, B, C, D.

Altri cubiti potrebbero ricordarsi, ma di dubbia sincerità; e sono: un doppio cubito del Museo Britannico, in legno, di 1,^{m} 0489 diviso in 14 palmi, antico bastone con divisione metrica di apparente mano posteriore (6); altro, pure in legno, foggiato su quel di Meia, che un tempo fu al Louvre ma poi, siccome sospetto, ne fu ritirato (7); altro in fine pubblicato dal Sharpe (8), e riprodotto come autentico dal Queipo (9), ma che verificò il Lepsius essere mera copia, poco fedele, del sopraddetto di Meia (10).

---

(1) Il diè lo Champollion-Figeac nel *Bulletin univ. des sciences*, 1824, VII sect. T. II; il Jomard nella ripetuta lettera; il Lepsius *Op. c.* p. 15 n. 4, Tav. III *a*.

(2) Fu messo in luce dal Brugsch *Geographie des alten Aegyptens*, Part. I, Tav. XVI p. 197, 142; e il riprodusse il Lepsius *Op. c.* p. 15 n. 5, Tav. III *b*.

(3) Il dà il Lepsius nella Tav. IV *a*; e il descrive a p. 16 n. 1, 59-61.

(4) Se ne ha la figura nella Tav. IV *b* del Lepsius e la descrizione alla sua p. 16 n. 8, 61-62.

(5) Lepsius *Op. c.* p. 16 n. 9, 62-63, Tav. IV *c*.

(6) Queipo *Op. c.* T. I p. 46 n. 10. Lepsius *Op. c.* p. 18 n. 14.

(7) Queipo *Op. c.* T. I p. 45 n. 4. Lepsius *Op. c.* p. 17 n. 11.

(8) *Egyptian Inscriptions* T. II p. 46.

(9) *Op. c.* T. I p. 45 n. 8, Tav. fig. 4.

(10) Lepsius *Op. c.* p. 17 n. 12.

Digitized by Google

3. Tutti questi cubiti però venutici alle mani, e usciti da vetusti ipogei, son reputati dal Lepsius non già vere misure mercantili o fabbrili, ma semplici e rozze imitazioni d' uso sepolcrale (1), e da sotterrar coi defunti: come pare a lui ad evidenza mostrare la negletta e ineguale divisione delle lor parti, e il vederli sovente di pietra: fragile e greve materia, disutile negli usi comuni.

Se non che non è forse indubitabile quanto potrebbe apparire questa sentenza dell' illustre alemanno. È vero che le 28 parti, ossia digiti, in cui dividesi ciascuno di que' cubiti, hanno ineguaglianze da far meraviglia; veggendosene talune differir tra loro persino del terzo o del quarto. Ma le accurate lunghezze di que' cubiti, varianti sol di qualche millimetro, son indizio palese che essi non eran dunque tagliati a casaccio, sì bene sopra cubiti veri. Se pertanto dal vero eran tolte le lunghezze totali, perchè non ancor le parziali? Dividere un regolo in 28 eguali porzioni, ancorachè alla grossa e a occhio e croce, è meno spiccio e agevole còmpito che raccostarlo al cubito modello e da esso trarne la divisione già fatta. Si può adunque ritenere per fermo che anche la partizione dei digiti, per materiale comodità di costruzione, dovea essere esemplata dal vero. Ora se i veri cubiti usuali fossero stati accuratamente divisi sarebbe inesplicabile la tanta irregolarità delle copie. Un lieve svariar di segno, o trascorrer di sega, pel negletto e frettoloso lavoro del ricopiare, non varrebbe a produrre, di primo tratto, in quella ventottesimale partizione i divarii che abbiamo.

Forse nella pratica comune ponean bensì cura gli egizii alla giusta lunghezza del cubito; unità lineare di conto, i cui difetti od eccessi anche minimi avrebber, moltiplicando, potuto portare troppo sensibile divario; poco curando poi l' esattezza delle frazioni le quali, non avendo che accidentale ufficio di

---

(1) Lepsius *Op. c.* p. 18.

Digitized by Google

complementi, non potean dar luogo a differenze notevoli. Certo è che l' antico Egitto non parea scrupoleggiare gran che nell' opere sue in fatto delle misure. Se n' è toccato già sopra: la stessa camera reale della grande piramide, monumento di tanta importanza, (per recarne un esempio), non ha un lato che esattamente batta coll' altro (1): segno che i modici svarii nell' arte d' allora non eran riputati osservabili. Anzi fin ne' monumenti astronomici e cronologici, che pur esigerebbero una accuratezza somma, gli egizii non si mostravan più esatti (2). Che se poi quest' incuria delle differenze tenui era veramente invalsa in Egitto, ben si spiegherebbe come, grossamente ricopiando dall' un cubito all' altro, e vie più spostandosi di copia in copia i tagli divisori degli spazii, si fosse potuto giugnere alle disparità che or troviamo.

Del resto mentre fu comune nell' antichità il destinar sovente in servigio del sepolcro gli strumenti della vita comune, (come dimostrano monumenti infiniti, quali p. e. le rappezzate situle cinerarie di bronzo dell' estense museo del Cataio) (3), non parrebbe molto probabile che niun degli usuali cubiti egizii fosse mai deposto nei sepolcri; ovvero che, se talora se ne seppellì di veri, talor d' imitati, tutti i rinvenuti da noi avessero per strano caso a essere appunto degli ultimi. Nè l' avervene poi di pietra, di tali cubiti, crea la difficoltà che parve al Lepsius. Come de' metri nostri avvene, secondo i bisogni, de' maneggevoli e de' fissi (per telerie od altro), così potè essere de' cubiti egizii: e legno e pietra erano per l' appunto le più ovvie e acconcie materie per gli uni e per gli altri,

Checchè più veramente ne sia, (chè, pago dell' aver posto in rilievo le apparenze ancipiti, non vo' recare sentenza), certo

---

(1) Piazzi-Smith *The great Pyramid in Egypt* p. 37; nelle *Astronomical observations made at the Royal Observatory of Edimburgh,* Edimburgh 1871.

(2) Lepsius *Op. c.* p. 27.

(3) Cavedoni *Indicazione dei mon. ant. del mus. del Cataio,* p. 43.

Digitized by Google

è che, messa in sodo dalla concordia di tutti questi lineari campioni la lunghezza del cubito egizio, anche la teorica partizione sua potrà da essi, veri o imitativi che sieno, essere egualmente chiarita.

4. Tutti que' cubiti son regoli di sezione originariamente rettangola, ma per ismusso d' un canto divenuta pentagona; come la figure A', fa vedere. Cosi scantonato il regolo presenta all' osservatore tre faccie: una superiore, orizzontale; una media inclinata; una inferiore verticale: e su di esse son pel lungo disposte le varie figurazioni e divisioni del cubito. Per tal guisa la prima lista *a* del cubito A corrisponde nella sua sezione A' alla parte dell' orizzontale lato superiore segnata in nero; mentre la vicina porzione a puntini rappresenta un' altra lista con geroglifica epigrafe, ommessa nella figura nostra perchè inutile per noi. Le due medie liste *b, d* dividonsi il piano inclinato: l' ultima *e* discende pel lato verticale.

La superiore lista *a*, ne' cubiti A, B, D, non ha ufficio metrologico; recando i semplici nomi di 28 divinità, cui ciascun digito è sacro. Cominciando da destra si hanno in ischiera i dieci dei del primo ordine; *Ra,* rappresentato dal disco solare, *Sa, Ka, Seb, Nub, Osiride, Iside, Set, Nephthys* e *Oro;* poi chiudono il semicubito quattro deità del ciclo d' Osiride, *Amset, Hapi, Kebhsenuf* e *Tumutef* (1). L' altro semicubito, cominciando a sinistra, dopo una sequela di deità minori in massima parte ignote ha alla 14ª casa la figura di *Thoth,* primo iddio dell' ordine secondo; il Mercurio egizio, cui si attribuiva la invenzione e tutela delle misure e de' pesi; simboleggiato dal sacro ibi in sulla gruccia. Il quale nel cubito B vedesi invece al 15° digito; per erronea ripetizione, alla casella 11ª, delle figure della 9ª.

Quelle che or richiamano la nostra attenzione son le tre liste *b, d, e* (cubiti A, B, C): destinata la prima alle divisioni

(1) Lepsius *Op. c.* p. 20, 21.

Digitized by Google

del cubito, l' altre due alle suddivisioni del digito. Cominciamo dall' ultima.

Delle 28 parti, o sia digiti, in che son partiti tutti questi cubiti nostri, le prime quindici a dritta, (anche quando le figure dell' altre liste comincino a manca), son divise, da 1, 2, ... 15 linee, in 2, 3 ..... 16 spazi eguali. E sopra ciascuno è nella lista *d* la geroglifica indicazione della frazione: vale a dire il lenticolare segno *Ro*, che significa *porzione*, *frazione* (1), soprastante al suo numerale denominatore, (scritto a lato nel cubito *B* per angustia di spazio), espresso in cifre numeriche egizie. Nelle quali le decine son figurate da due verticali congiunte ad arco, a modo di U capovolti, e le unità da ripetuti segni verticali: divisi a gruppi per farli prontamente spiccare all' occhio senza bisogno di contarli. Sol l' ultima casella invece del *Ro*, ha il *Mo*, o *M* egizia (2), (due orizzontali congiunte alle estremità da un' obliqua), ordinario segno della metà. E leggonsi quelle geroglifiche indicazioni: (digito) *diviso per due*, *per tre*, *per quattro* ..... *per sedici*; ovvero *mezzo*, *terzo*, *quarto*, ... *sedicesimo* (di digito).

5. Questa progressiva serie di suddivisioni del digito chiaramente appare non di primo getto, ma riformata e rifusa. Il suo arrestarsi a' *sedicesimi* la mostra fondata sulla partizione binaria; da cui si hanno i quozienti *mezzo*, *quarto*, *ottavo*, *sedicesimo*, ec. In fatti il più elementare e primitivo modo di dividere fu *dimezzare* e *ridimezzare*; di cui restano esempi ne' metrici sistemi antichi e moderni (3). Nè d' altra stampa eran le misure agrarie d' Egitto; che dovean risalire a rimotissimi tempi per l' annua necessità di rimisurar le terre dopo l' escrescenze del

---

(1) Brugsch *Grammaire hieroglyphique p.* 35.

(2) *Id. ib.*

(3) Potrebbe a questo proposito ricordarsi, ad esempio, la monolite colonna di Beni-Hassan, d' antichissimo stile egizio, portante *sedici* scanalature; evidente prodotto della elementare divisione binaria (Rougé *Annal. del phil. chrét.* Ser. III T. XV p. 185).

Digitized by Google

Nilo. Colà il *Sat*, *Remen*, *Hesp*, *Sa*, *Su*, *Roma* aveano i relativi valori 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$ (1). Che se la ridivisione qui arriva alla quinta potenza del due, il *trentaduesimo*, nel cubito invece, che ha sol 28 case, era duopo arrestarsi per mancanza di spazio alla quarta, il *sedicesimo*. L' altre intermedie divisioni poi per *terzi*, *quinti*, *sesti* ec. interzate, (quasi ripieno ad ordito), alla partizione binaria, dovettero esser giunta e perfezionamento posteriore; a compiere, cioè, la gradazione de' quoti, e soggettare non meno il digito, che il cubito e qualunque sua parte, agli elementari divisori primi di tutti que' progressivi sistemi *binario*, *ternario*, *quinario*, ec. Così la divisione del cubito, della spanna, del palmo, del digito e d' ogni lor multiplo per 3, p. e., per 5, per 12, od altro, trova su' nostri campioni segnato il suo quoziente geometrico.

Il perchè questa teorica partizione vetusta, che potrebbe apparire ridondante e impacciata, vince, chi ben consideri, (nell' ordine pratico e ne' limiti delle quantità lineari abbastanza notevoli), per ampiezza di concetto e accuratezza di risultati l' ammirata nostra divisione decimale del metro. Poichè i millimetri nostri non valgono a dividere esattamente il centimetro che per 2, 5, 10; essendo la sua divisione per 4, 8, 16 sol conseguibile con dilicati strumenti micrometrici fuor della portata comune; mentre poi tutte l' altre divisioni sue, per 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, per niun modo possono raggiugnersi intere. Laddove nel cubito egizio, qualora sia accuratamente diviso, ognuno de' ripetuti quozienti si ha esatto ed in pronto; espresso poi in geometriche frazioni nè male usabili per esiguità soverchia, nè troppo forti da non bastare a' delicati usi fabbrili: essendo il sedicesimo di digito di poco superiore al millimetro.

Se non che i teorici vantaggi di sì giudiziosa divisione geometrica, la quale assicura un merito incontrastabile a' suoi vetusti

(1) Brugsch *Op. c.* p. 35.

Digitized by Google

inventori, trovavansi poi nell' ordine pratico scemati d' assai da speciali inconvenienti, onde non si debbe tacere.

È notevole che mentre la meccanica partizione del digito ci schiera dinanzi tutte le ordinate serie di frazioni geometriche $^1/_{16}$, $^2/_{16}$, ... $^{15}/_{16}$, $^1/_{15}$, $^2/_{15}$, ... $^{14}/_{15}$, ec., l' aritmetica notazione egizia mancava poi in massima parte delle sue rispondenti espressioni; poichè, fuor della quasi unica eccezione de' $^2/_3$, le frazioni egizie non aveano per numeratore che l' unità. E i valori rappresentati da' nostri multipli numeratori, come a dire $^{15}/_{16}$, o $^{14}/_{15}$, era d' uopo scomporli, ed esprimerli per addizione: p. e., $^1/_2 + ^1/_4 + ^1/_8 + ^1/_{16} = ^{15}/_{16}$; $^2/_3 + ^1/_5 + ^1/_{15} = ^{14}/_{15}$(1). Ma non sempre per tali combinazioni dei termini dell' aritmetica serie $^2/_3$, $^1/_2$, $^1/_3$, ... $^1/_{16}$ erano esattamente esprimibili le altre geometriche frazioni del digito di numeratore superiore all' unità. I $^7/_{15}$, o $^{12}/_{13}$ di digito, poniamo, potrebbero bensì risolversi nelle somme $^1/_3 + ^1/_8 + ^1/_{120}$, e $^2/_3 + ^1/_4 + ^1/_{156}$; ma le aritmetiche espressioni $^1/_{120}$ e $^1/_{156}$ di digito, mancandone sui cubiti la corrispondente espressione lineare, restano inutili per la pratica divisione meccanica; e solo servono al calcolo. Difetto però che non è sol proprio di quel metodo antico; ma è la condizione generale di tutte le nostre decimali frazioni inferiori al millimetro (2).

---

(1) *Id. ib.* Chabas *Recherches sur les poids égypt.* p. 6, 3.

(2) Ad onta delle imperfezioni sue quell' egizio metodo, per addizione di rotti aventi a numeratore l' unità, non era praticamente senza un qualche suo pro: e la serie delle frazioni del digito, a mo' d' esempio, ne riesciva più ricca.

La geometrica serie ascendente delle frazioni segnate sul digito, a computo odierno, sarebbe la seguente: $^1/_{16}$, $^1/_{15}$, $^1/_{14}$, $^1/_{13}$, $^1/_{12}$, $^1/_{11}$, $^1/_{10}$, $^1/_9$, $^1/_8$, $^2/_{15}$, $^1/_7$, $^2/_{13}$, $^1/_6$, $^2/_{11}$, $^3/_{16}$, $^3/_{15}$, $^1/_5$ ..... $^{15}/_{16}$. Il computo egizio invece, evitando i numeratori superiori all' unità, avrebbe p. e., tra i due termini $^1/_8$ e $^1/_7$, sostituito ai nostri $^2/_{15}$ quattro somme crescenti: $^1/_{16} + ^1/_{15}$, $^1/_{16} + ^1/_{14}$, $^1/_{15} + ^1/_{14}$, $^1/_{16} + ^1/_{13}$. Tra gli altri due termini $^1/_7$ e $^1/_6$, avrebbe interposto in luogo de' nostri $^2/_{13}$ non meno di nove termini graduati: $^1/_{15} + ^1/_{13}$, $^1/_{16} + ^1/_{13}$, $^1/_{14} + ^1/_{13}$, $^1/_{15} + ^1/_{13}$, $^1/_{16} + ^1/_{14}$, $^1/_{14} + ^1/_{13}$, $^1/_{15} + ^1/_{14}$, $^1/_{13} + ^1/_{13}$, $^1/_{14} + ^1/_{14}$. E così via crescendo nelle altre sostituzioni seguenti. Ma di ciò basti.

Digitized by Google

La quale imperfetta e impacciata notazione aritmetica messa a riscontro della sì piena e pur semplice partizione geometrica del digito, rende verosimile che quest' ultima, immaginata forse pe' casi più delicati ed eccezionali, fosse rimasa in pratica presso che oziosa: sterilmente relegata nel mero ordine teorico. Poichè per poco che si fosse preso a frequentare l' uso di quelle sì chiare frazioni geometriche, a numeratori e denominatori variabili, pare incredibile che la notazione numerica non avesse avuto ad illuminarsene, apprendendo a dare alle frazioni la stessa libertà e concisione delle nostre (1).

---

(1) Quella specie di frazioni non fu però esclusiva dell' Egitto. Anche i greci l' usavano; e le loro cifre numeriche accompagnate in alto da virgolette veniano appunto convertite in frazioni di questa foggia: a invariabile numeratore *uno*. Il celebre Erone riducendo sotto i Tolomei a più esatti calcoli vecchie formole geometriche egizie non dipartivasi da quella maniera di frazioni; e così l' alessandrino Didimo esprimeva i $^2/_5$ coll' addizione $^1/_2 + {}^1/_5 + {}^1/_{10}$ (Capo 12).

Questo era il modo preferito da' greci; forse per agevolezza di computo: benchè ad essi non fossero ignote le frazioni a numeratore variabile. Nelle quali scrivevano il denominatore al luogo de' nostri esponenti: e così p. e.; trovasi espressa da Diofanto la frazione $^{2633544}/_{334776}$ (Lib. IV, Quaest. 46. Delambre *Hist. de l' Astronom.* Paris 1817 T. II, p. 11). Anche il bizantino Eutocio ne' *Commentarii* maneggia frazioni d' ambe le specie, cioè a numeratore fisso e variabile. Ma i risultati egli preferisce ridurli alla prima delle due forme; scrivendo, p. e., $^1/_2 + {}^1/_6$ in luogo di $^4/_6$, ovvero $^1/_6 + {}^1/_{15}$ invece di $^{15}/_{64}$, benchè in quest' ultimo caso gli sia d' uopo star pago di una semplice approssimazione: al modo stesso con cui noi ci contentiamo sovente di trascurare alcun decimale nella riduzione delle frazioni ordinarie (V. Delambre *L. c.* p. 20, 21).

Alle antiche frazioni a numeratore fisso, possono fare riscontro l' altre a denominatore invariabile: celeberrime fra queste, (e non isemsse ancora dagli astronomi, perchè superiori in comodità alle decimali), le *sessagesimali* frazioni caldaiche od assire: nelle quali computavasi per *sessagesimi, sessagesimi di sessagesimi,* e via di seguito. Anche l' oncie latine appartengono a questa specie medesima: a numeratore variabile e denominatore fisso, il *duodecimo*. Il medesimo può dirsi di molte altre metriche frazioni: p. e. il *digito* egizio è l' invariato *ventiquattresimo* del piccolo cubito, o *ventottesimo* del grande.

Un mio cortese collega, il ch. prof. A. Favaro, da me richiesto del suo parere per lettera, stima che l' odierno modo di numeratori e denominatori variabili, gli uni agli altri sovrapposti, non rimonti oltre gl' indiani; essendo poi noto che la intermedia orizzontale fu introdotta, sotto nome di *virgula*, da Leonardo Pisano.

Digitized by Google

Concorda in fatti con questo dubbio la neglettissima, e sovente erronea, divisione materiale di quelle frazioni di digito sui nostri campioni: tanta e tale, da rendere inutile quel riparto e meramente illusorio. L' ha già notata il Lepsius, nè può sfuggire all' occhio d' alcuno, la frequente discordia della partizione geometrica dei digiti colla soprastante sua notazione geroglifica. Così nel cubito A, invece della ordinata serie di 2, 3, 4, ... 16 spazii, in che i 15 digiti dovrebbero essere progressivamente divisi, si ha questa: 2, 4, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 12, 12, 13, 12, 14, 16. Il frammento del cubito Raffaeli, registrato sopra al N. 6, nelle quattro ultime divisioni, che sole vi restano, invece di 13, 14, 15, 16 spazii ne ha 9, 8, 10, 12 (1). Nè gli altri cubiti poi, sebbene meno scorretti, sono esenti da tali errori del tutto.

6. Nelle due liste *d*, *e* altro non resterebbe a notare che gli eccezionali segni delle prime 13 case nel cubito A lista *d*: ma ne toccheremo più innanzi. Passiamo dunque alla lista *c*, riserbata alla propria partizione del cubito.

In questa lista son seguate per ordine, sebbene per inesattezza di costruzione non sempre a' giusti loro luoghi, le varie parti del cubito; anzi di due cubiti, uno maggiore dell' altro: cioè l' uno di 28 digiti, l' altro di 24.

Nelle tre prime caselle è ritratta, una, due, tre volte la figura del dito; in egizio *Tab*, o *Teb* (2): a. significare 1, 2, 3 *digiti*. La giusta figura del digito, ridotta a mera verticale nei campioni A, C, vedesi ne' due ricostruiti E, F.

Seguendo la chiara indicazione di questa progressione figurata, *uno, due, tre digiti*, si è numerata, nella nostra Tavola, con soprapposte cifre arabiche, la serie delle caselle, o sia dei digiti, de' varii cubiti dal 1° al 28°. Così tutte le parti del cubito, *palmo*, *spanna*, ec., che fra breve passeremo a rassegna, trovano

---

(1) Lepsius *Op. c.* Tav. III *a*.
(2) Brugsch *Op. c.* p. 35. Lepsius *Op. c.* p. 43.

Digitized by Google

nelle cifre soprastanti la lor debita corrispondenza numerica. Notisi però che la serie dei digiti comincia nel cubito C alla destra; conforme all' ordine regolare della scrittura egizia; negli altri due, A, B, invece principia a sinistra. Il Lepsius però anche in questi due ha voluto cominciare a destra la sua numerazione dei digiti (1); e per lui è il 1° quello che per noi è il 28°. Ma così l' arabica sua notazione numerica va a ritroso della geroglifica serie dei digiti, e sposta la numerale rispondenza di tutte le varie unità subalterne del cubito (2).

Nella 4ª casa è figurata la mano col pollice nascoso (cubito A) segno de' 4 digiti, o sia del palmo: in lingua egizia *Sop* (3). Il campione B ha erroneamente la mano con tutte le dita; la quale per altro è così registrata come regolare figura del palmo dal Brugsch (4); benchè, per testimonio del Lepsius, difficilmente occorra nelle iscrizioni, tranne che in queste de' cubiti (5). Nel cubito C il geroglifico del palmo è compendiato in una semplice orizzontale; che tien luogo della linea arcuata, (⌒), noto compendio del palmo, frequente ne' monnmenti del primo impero e del secondo, ed eziandio de' Tolomei (6).

Seguono nella 5ª e 6ª casella la intera mano ed il pugno col pollice teso, geroglifici de' 5 e 6 digiti; i cui nomi egizi son dubbi, nè a noi importa chiarire (7). Vengono appresso ne' quadri 7° e 8° due figure del palmo, a rappresentare gli 8 digiti, o sia

---

(1) Lepsius *Op. c.* Tav. I *a*.

(2) Nel riprodurre poi nella Tavola nostra (Lett. E) questa ricostruzione del Lepsius ci è stato d' uopo di cominciare da sinistra l' arabica numerazione dei digiti, per uniformità cogli altri cubiti e ad evitare difficoltà di confronti e confusione di citazioni.

(3) Brugsch *L. c.* Lepsius *L. c.*

(4) *L. c.*

(5) *Op. c.* p. 40.

(6) Brugsch *L. c.* Lepsius *Op. c.* p. 41.

(7) Lepsius *Op. c.* p. 39, 40.

Digitized by Google

il *doppio palmo:* il *διχὰς* de' greci (1). Que' due quadri, malamente fra lor divisi, dovrebbero formare uno scompartimento solo, come nelle ricostruzioni E, F; per non scindere la doppia mano, che forma un gruppo geroglifico solo. Il cubito C ha in queste case più o meno inesatti compendii.

Occupa ciascuna delle seguenti due case un piede di uccello, geroglifico della *spanna* (2), o metà del cubito, (corrispondente alla *spithama* greca e allo *zereth* ebraico); preceduto l'uno da un *passero* che geroglificamente vale *piccolo;* l'altro dalla fusiforme mazza, segno di *grande.* Così abbiamo la *piccola spanna* e la *grande spanna;* in egizio *Erto* (?) *nets*, *Erto* (?) *aa:* (3) rispettiva metà de' due cubiti minore e maggiore.

La metà di questi due cubiti, di 28 digiti e di 24, deve cadere alla quattordicesima e dodicesima casa. Infatti la *grande spanna* debitamente occupa i riquadri 13 e 14 ne' cubiti B, C; benchè nel cubito A erroneamente sia arretrata d' un grado. La geroglifica dizione *grande spanna* è malamente spartita nel cubito B dalla verticale divisoria che, nelle liste superiori e inferiori, segna il 13° digito, ma che su questa lista *b* non dovea protrarsi: poichè non avendo quivi essa a segnare niuna delle subalterne unità divisive del cubito, non vi ha ufficio di sorta.

Per simil guisa le divisorie dei digiti nono, decimo, undecimo, inutili in questa lista *b*, dove nulla hanno a segnare tra il *doppio palmo* e la *piccola spanna,* dovrebber mancare: e il piè d' uccello preceduto dal passero, geroglifico della spanna minore, dovrebbe occupare il mezzo del vacuo compartimento 9-12. Di fatto que' geroglifici veggonsi sulle medie case 10ª e 11ª nel cubito A; benchè stipati insieme nell' 11ª nel campione B, e anticipate sulla 9ª e 10ª nel C. Son dunque, più o meno precisa-

---

(1) Heron *Fragm.* I, 5.
(2) Lepsius *Op. c.* p. 37.
(3) *Id. Op. c.* p. 37, 43.

Digitized by Google

mente, sul debito comparto ancor que' geroglifici della piccola spanna; sebbene le importune linee divisorie, continuate su questa lista, li facciano parere spostati.

7. Campeggia appresso, sullo scompartimento formato dalle congiunte case 15 e 16 nel cubito C, un braccio armato d' incerto strumento; geroglifico dei quattro palmi, (equivalenti a' due terzi del picciolo cubito, o sia al *piede de' greci*); che in lingua egizia suona *Sar*, *Ser*, *Tser*, *Teser* (1). Questo segno è malamente tagliato a mezzo, da una divisoria superflua, nel cubito A; e nel campione B è ritirato sulla casella 15, e scambiato coll' inerme braccio disteso, geroglifico del cubito.

Mostrasi poscia, sull' area del quinto palmo, caselle 17-20, un geroglifico non ben definito; che ne' nostri campioni, come in quello Anastasi, (registrato al N. 4, ma ommesso per angustia di spazio nella nostra Tavola), ha le apparenze di un rozzo braccio, o sia *cubito*; benchè a parere del Lepsius dovesse ritrarre una zampa d' uccello (2); quale è figurata ne' due ricostruiti campioni D, E. Questa misura di cinque palmi, al pari del *πυγων* de' greci e del latino *palmipes*, corrisponderebbe ai $^5/_6$ del piccolo cubito, o $^5/_7$ del grande. Il suo egizio nome è *Remen* (3); però altra omonima misura agraria d' Egitto, già di sopra citata, offre colla sua principale unità il tutt' altro rapporto del $^1/_2$ (4). Nel cubito B il *Remen* è ommesso; nel campione A occupa il giusto mezzo del quinto palmo: dove per le protratte linee divisorie, è tagliato in due al pari del *Ser*.

Le due figure del braccio, armato ed inerme, cui abbiam veduto doversi il nome di *Ser* e di *Remen*, avrebbero avuto a significare, a parere di taluno, i rispettivi piedi, o sia i $^2/_3$, del

---

(1) *Id. Op. c.* p. 36, 43.
(2) *Id. Op. c.* p. 32.
(3) *Id. Op. c.* p. 36. Brugsch *L. c.*
(4) Brugsch *L. c.*

Digitized by Google

piccolo cubito e del grande: nella supposizione che gli egizii usassero, al pari dei greci, quella subalterna misura del *piede*. Il Queipo, che in quel preteso piede maggiore trovava una fortuita rispondenza lineare coi pesi ebraici, da lui creduti eguali agli egizii, ne avea fatto il fondamento principale del suo sistema; e tanto era persuaso della opinione sua, da non creder possibile pure un dubbio in contrario (1).

Siccome i due terzi d' un cubito di digiti 28, sarebbero digiti $18\,^2/_3$, frazione di cui non appare vestigio sui nostri campioni, erasi imaginato il Queipo che la figura del braccio tagliata per sorte, nel cubito A, a circa *due terzi* della sua lunghezza dalla verticale divisoria dei due digiti 18 e 19, dovesse significare digiti $18\,^2/_3$. Ma per la stessa ragione il braccio armato, *diviso a mezzo* dalla linea che separa la 15ª e 16ª casella, dovrebbe indicare soli digiti $15\,^1/_2$; e pure, anche a parere del Queipo, certamente significa i 16. Poichè, come negli odierni metri, così in que' cubiti antichi, le varie misure si compiono non coi caratteri che ne esprimono il nome, ma colle linee che ne determinano lo spazio. Ora in quel 19° riquadro, su cui campeggiano i supposti $^2/_3$ del braccio, niuna linea divisoria è tracciata a segnare la frazione del digito: neppure nelle più minute divisioni della sottoposta lista *e*, la quale ha ivi gli *undecimi* di digito, indivisibili pel tre. Se non che un abbaglio si cela nella supposizione del Queipo; poichè a segnare, a suo modo, i digiti $18\,^2/_3$ dovea non già esser tagliata a' due terzi, dalla verticale divisoria, la figura del braccio; sì bene essere per due terzi occupato da questa figura lo spazio della casella 19: della quale invece quel geroglifico non arriva a coprire pur la sola metà. Per modo che dove i digiti $18\,^2/_3$ dovrebbero compirsi ivi nè geroglifico, nè linea, nè punto alcuno lor segna il confine. E come credere adunque alla esistenza d' una misura che non si

(1) *Essai* ec. T. I p. 55-57, 202, 217.

Digitized by Google

trova punto segnata? Aggiungasi il mancare di quel geroglifico nel cubito B: che il dimostra misura non punto fondamentale e importante, se potè tralasciarsi; e il campeggiare del geroglifico stesso sulla nuda e indivisa area del 5° palmo nel cubito C, come in quello Anastasi: ciò che esclude la sua supposta significazione dei digiti $18\,{}^{2}/_{3}$.

Il fatto sta che gli egizii antichi nel lor sistema lineare non ebbero *piede* di sorta; nè i monumenti scritti offrono esempi de' $^{2}/_{3}$ di alcun de' due cubiti come unità di computo in uso. Anche le misure de' quattro e de' cinque palmi, *Ser* e *Remen*, aggiunte forse ad abbondanza sui cubiti per compire la progressione dei palmi, paiono in pratica (per quanto almeno dalle iscrizioni può arguirsi) essere state unità superflue, e come fuor d' uso. Certo è che il loro nome nulla ha di comune con quello del piede, *Rat* (1); mentre la geroglifica lor figura di braccio troppo bene li distingue dagli arti inferiori. E se i geroglifici del *Ser* e del *Remen* ebbero significato figurativo, forse furon misure di parti del braccio: p. e. il primo dal gomito alla giuntura della mano, il secondo dal gomito ai primi nodi del pugno.

8. Nè è a farne meraviglia. Non già nel *piede*, ma nella *mano* e nel *braccio*, ha la natura offerto all' uomo, nato al lavoro, il proprio tipo e strumento delle misure. La *spanna*, massima apertura della mano fra le estremità del pollice e del mignolo, è il più ovvio utensile di misurazione: quasi naturale compasso da rilevare le dimensioni dei corpi. Onde chiedeva il profeta: *Chi ha col cavo della palma misurato i mari, o misurò i cieli colla spanna?* (2).

Nelle umane proporzioni due spanne misuran giusto dalla estremità del gomito a quella delle dita distese: che è il *cubito*.

---

(1) Lepsius *Op. c.* p. 37.

(2) *Isaias* XL, 12: dove allo *zereth*, o spanna del testo ebraico, è sostituito il *palmo* dalla Volgata.

Digitized by Google

Quattro cubiti poi fanno l' *orgia*; cioè quanto stendonsi le aperte braccia fra l' una e l' altra estremità delle mani: che credesi corrispondere all' ordinaria statura dell' uomo. E a divisori della spanna ha dato la natura le due larghezze della mano e del dito. Veramente la spanna non misurerebbe che due volte la mano nella sua larghezza maggiore, compresovi il pollice; e così equivarrebbe a due *palmi* di cinque *digiti* (pollici) ciascuno: e in pieno accordo col sistema decimale dei numeri, derivato esso pure dalle dita umane, si avrebbe pur quello delle misure; con palmo quinario, spanna denaria, cubito vicenario. Se non che la divisione del cubito che noi qui troviamo, e di cui ci resti più antica memoria, è la duodenaria: preferita forse per la maggiore comodità de' suoi numerosi fattori. Al quale scopo la misura della mano fu presa più in alto, in una sua minore larghezza: al secondo articolo delle dita congiunte, esclusone il pollice. E così tre *palmi* di quattro dita, o sia dodici *digiti* formarono ab immemorabili la spanna.

Nè è sperabile di poter mai accertarci se in tempi ancor più rimoti una decimale divisione della spanna, e vigesimale del cubito, avesse potuto veramente precedere: vinta poi e sbandita dalla partizione duodenaria nelle secolari lotte, onde i due sistemi decimale e duodecimale, l' un più vetusto dell' altro, si disputarono il predominio in tutte le età, e fino nella nostra. Più oltre forse un qualche incerto barlume potrà balenarci intorno di ciò. Intanto è notevole che nella scrittura geroglifica, le cui origini si perdono nella notte dei tempi, veggasi figurato il *palmo* da una compita mano con tutte cinque le dita (1): che altri potrà credere errore di disegno; altri anche sospettarla tradizione di metrologico sistema più antico.

Comunque siane per altro, chiaro è che tra le fabbrili misure *manuali* e *brachiali*, appreseci dalla natura, non ha che fare

---

(1) Brugsch *Op. c.* p. 35. Veggasi la nostra Tavola, lett. B.

Digitized by Google

il *piede*: acconcio al più, insieme col *passo*, anzi preferibile invero, per le misure itinerarie ed agrarie. Ed è questo il solo senso in cui sia accettevole l' opinione del Mommsen, che la misura dello spazio abbia il naturale suo tipo nel piede umano, più comodo ad impiegarsi che il braccio (1). Se non che anche per le misurazioni terrestri, a evitare confusione e duplicità di sistemi e d' unità lineari, dovunque era invalso il tipo del cubito questo fu usato e fu creduto bastare.

Nè qui accade cercare come in altri men primitivi e più rimaneggiati sistemi, poniamo nel greco, l' altra misura del *piede* s' intruse e pigliò a dominare. Ed è abbastanza antico fra essi. Quantunque Omero non computi, se ben rammento, che a *cubiti* ed *orgie*, (2) Esiodo però, cresciuto in Beozia, promiscuamente si vale di *cubito* e *piede* (3). Toccare de' piedi asiatici e del come e perchè fossero ricavati dai cubiti, coi quali si divisero il campo, ci trarrebbe a troppo lunghe parole. I romani poi ebbero sì esclusivamente famigliare il lor piede, che allo stesso cubito diedero il nome di *sesquipes*.

Piuttosto intorno a questo proposito non è a preterirsi una osservazione di fatto: che la supposta proporzione de' $^2/_3$ del cubito naturale, attribuita al piede, anatomicamente non concorda; poichè a tanto l' ordinario piede non arriva. Lascio la proporzione di $^5/_9$ del cubito attribuita al piede umano dal Piazzi Smith, e ch' egli dice verificabile da ciascuno sul proprio corpo (4), ma che a me parrebbe un po' scarsa. Meglio s' attaglia il rapporto de' $^3/_5$ del cubito, che l' Oppert ha creduto di rilevare in un piede caldaico ricavato da uniformi misure di mattoni babilo-

---

(1) *Histoire romaine*, vers. fr. I, p. 275.

(2) *Iliad.* XXIV, 270. *Odyss.* XI, 310, 311.

(3) *Op.* v. 423-426.

(4) *The great pyramid in Egypt*, p. 106, nelle *Astronomical observations made at the R. Observatory of Edimburgh:* 1871.

Digitized by Google

nesi (1). Se non che quella partizione per *quinti*, estranea a' sistemi duodecimali, ci richiamerebbe ancora al più elementare supposto di divisione decimale o vigesimale del cubito; o almen quinaria del palmo. Nel che a non ismarrirci in congetturali ricerche di troppo difficile riuscita, varrà meglio arrestarci. Sol noterò che l' avere, ad onta della sproporzione anatomica, accomodata la misura del *piede* a una delle aliquote partizioni del *cubito*, è indiretta conferma dell' avvertita poziorità di quest' ultimo, e della importanza sua quale primitiva e fondamentale unità lineare.

9. Tornando adunque a' nostri campioni di cubiti, più non ci restano a osservare sulla lista *b* che gli ultimi due gruppi geroglifici a destra: cioè la figura del braccio o *cubito*, (in egizio *mah*, pari all' ebraico e caldaico *amah*), prima accompagnato dal *passero* segno di *piccolo*, poi dalle tre lettere S, T, N, (figurate dal curvo virgulto, dal semidisco e dall' orizzontale ondulata), che suonano *Suten*, *reale*; dandoci così l' espressa menzione e misura di due cubiti: l' uno *piccolo*, o volgare, l' altro maggiore, o *del re*.

La giusta postura di que' due gruppi geroglifici è a mezzo del sesto palmo e del settimo; a indicare 24 digiti, o 28. In fatti il primo gruppo occupa le case 22, 23, o sia il mezzo dello spazio palmare 21-24 (Cub. A, B); se non che le verticali divisorie dei digiti, 21, 22, 23, prolungate a torto sulla lista *b*, danno la falsa apparenza al picciol cubito d' essere chiuso al 23.° digito, e così l' accorcia d' un grado. Nel cubito Anastasi, mancando le intruse divisorie, il geroglifico del *picciolo cubito* campeggia a suo luogo e mostra aperta la sua misura di 24 digiti (2); della quale per altro non vi sarebbe ombra di ragione a poter dubitare. Il medesimo ci avrebbe senza fallo mostrato il

---

(1) *Bulletin archéologique de l' Athenaeum français;* 1856 p. 33 seg.
(2) Lepsius *Op. c.* Tav. III *c.*

Digitized by Google

cubito Nizzoli (Tavola, B), se per frattura il 6.° palmo non fosse andato smarrito. In tutti poi i nostri campioni il geroglifico del cubito reale segna il termine della misura o sia del 7.° palmo e 28.° digito: solo ne' cubiti A, B è da qualche divisiva linea intrusa interrotto e spostato alquanto verso la dritta.

Tutti questi segni da noi passati in rivista sulla lista *b*, *digiti*, *palmi*, *piccola* e *grande spanna*, *quadruplo del palmo*, *quintuplo del palmo* e *piccolo cubito* e *cubito reale*, compiono la serie delle regolari divisioni e notazioni del cubito: comuni per ciò a tutti i campioni, e bastevoli a qualsivoglia partizione e bisogno. Nè di regolari e costanti e, a così dire, legali notazioni del cubito, e delle sue subalterne unità, avvene altre da queste; benchè si mostrino qua e là tentativi di eccezionali notazioni e ripartizioni diverse: forse pratici e materiali surrogati di chi bene non intendeva l' uso e la significazione delle ordinarie.

Premetto un' avvertenza sui verticali segni divisivi dei digiti, che abbiamo veduto molte volte essere proseguiti a sproposito sulla lista *b* con danno della chiarezza ed esattezza della notazione geroglifica. Che dire del cubito C, dove le linee divisorie sono a salto ora ommesse, or segnate in questa linea quasi a capriccio od a caso? Eccone, a quanto pare, il perchè. Non so se altri abbia osservato che dovunque cade una delle possibili divisioni di qualcuno de' due cubiti, ivi la lineetta è appuntino segnata. Il cubito reale ha questi divisori: 1, 2, 4, 7, 14, 28; il minore a sua volta: $^2/_3$, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; e ciaschedun de' quoti ha la rispondente sua linea, che ne segna la misura. Mancan le divisorie dei digiti 5, 9, 11, 13, ec. perchè niun di questi numeri è divisore di alcuno de' due cubiti volgare, o reale.

Questo modo di divisioni però benchè possa avere qualche pratica utilità non è a confondersi colla notazione regolare, siccome superfluo; nè richiesto da alcun bisogno, cui questa non avesse potuto bastare. Intanto ha l' inconveniente di disgiungere colla divisoria del 7.° digito il gruppo de' *due palmi*, che avrebbe almeno bisognato accoppiare insieme sull' 8ª casella; e di spostare

Digitized by Google

col segno del digito 10° i geroglifici della *piccola spanna* che avrebbero dovuto portarsi invece sulle case 11 e 12. Indizio, che chi industriavasi di raggiugnere per questa nuova via tutte le divisioni dei cubiti non intendeva le antiche.

10. Altre due serie di eccezionali notazioni, interposte fra le ordinarie, esigono osservazione.

Nei campioni A, B ripetuti segnetti orizzontali sono intercalati nella lista *a*, riserbata ai geroglifici dei numi; e tagliano le verticali divisorie dei digiti 6, 8, 10, 19, 26. Poco si era posto mente da prima a questi minuti tratteggi; ma è evidente che ne' nostri campioni essi non son che gli avanzi sconnessi d' una notazione che non ci è arrivata completa. Il Lepsius ha supposto che faccian parte d' una numerazione per palmi e semipalmi (1); e nel cubito ricostruito da lui secondo il suo pensiero, e riprodotto nella Tavola nostra alla lett. E, l' intera serie di questi segni è supplita nella superiore lista *a*. La divisoria del digito 26° ha un mezzo segno, indice del mezzo palmo; in luogo del segno intero che interseca la corrispondente divisoria del cubito B secondo la figura che ne dà il Lepsius, ma che però nella copia datane prima dal Queipo non appare (2). Seguono nelle divisorie 24ª, 22ª, 20ª una lineetta, una lineetta e mezza, due lineette supplite da lui a discrezione, a significare il *palmo*, il *palmo e mezzo*, il *doppio palmo*. Alla divisoria 18ª egli segna due tratti e mezzo, in luogo dei tre portati dal cubito B alla divisoria 19ª; e indicano i *palmi due e mezzo*: e così di seguito.

La divisione del cubito egizio in semipalmi non manca di riscontri monumentali. I varii cubiti, sebbene d' età assai più tarda, del Nilometro d' Elefantina erano divisi ciascuno in 14 parti, o sia semipalmi (3); e meglio infatti che il *digito* (troppo

---

(1) *Op. c.* p. 30, Tav. I *a*.
(2) *Essai*, ec. T. I, Tav. n. 2.
(3) Queipo *Op. cit.* T. I, p. 44.

Digitized by Google

tenue unità) era acconcio il *condilo*, o *semipalmo*, a misurare gli alzamenti dell' acqua del Nilo, su cui dovea regolarsi l' annua proporzione e percezione delle imposte agrarie. Se i segnetti del campione A, non celino altr' uso e non ammettano per sorte altra spiegazione diversa da quella del Lepsius, sarebbe aperto che la divisione per palmi e semipalmi apparterrebbe anche agli ordinarii usi popolari e rimonterebbe ad età ben più antica: risalendo quel nostro campione d' oltre un millenio e mezzo innanzi l' era volgare. Con tutto ciò non penserei che que' tratteggi possan far parte della regolare e originaria notazione dei cubiti. Anzi non mancan ragioni a persuadere il contrario: l' essere, cioè, malamente intrusi fuor di debito luogo que' tratti, nella lista riserbata ad onore dei numi; il procedere la loro serie a ritroso della notazione regolare, la quale segna il mezzo palmo al 2° digito, non al 26°, e così di seguito; il ridurre in fine le subalterne unità lineari di conto non più che al *palmo* e al *semipalmo*, mentre l' originaria notazione, trascurando il secondo, aggiugne invece *digito*, *spanna*, *ser*, *remen*. Forse quella serie di tratti non fu che giunta e avvedimento volgare per far distinguere, quasi a modo di notazione tesseraria, le frazioni del cubito agli idioti, e inesperti di geroglifici e lettere. Il perchè non mi pare convenevole che questi segni abbian parte in una ricostruzione regolare del cubito; quando almeno non vi si voglia dar luogo, a fianco della originaria notazione fondamentale, anche a tutte le alterazioni e varianti che l' imperito uso del popolo possa col tempo avervi introdotte.

Più strana e men decifrabile serie di eccezionali geroglifici occupa le prime 13 caselle della lista *d* nel cubito A; ed ha inutilmente esercitato l' acume degli eruditi. Non riferirò tutte le supposizioni degli interpreti; il Queipo, seguendo dappresso le orme del Saigey (1), ne ha dato spiegazioni che il Lepsius dice

(1) *Traité de métrologie* p. 10.

Digitized by Google

impossibili; ma senza riuscire egli stesso il dottissimo uomo, a mio sommesso vedere, (benchè intesamente vi si adoperi, e con persuasione di successo), a sostituirvi altra interpretazione di men disputabile possibilità.

Il primo gruppo, quattro volte ripetuto negli spazii 1-4, indicherebbe secondo il Queipo che *ciascun di quei digiti è il quarto del* 1° *palmo* (1); ma a ragione nota il Lepsius aversi qui il geroglifico non del *primo palmo* ma del *primo cubito*, e l' orizzontale arcuata soprastante alle quattro unità essere breviatura del segno del *palmo*, non della *frazione*: la quale, quando pure fosse così compediata, ci darebbe in quel gruppo non già $^1/_4$ *di palmo*, ma *cubiti* $1\ ^1/_4$ (2). Sui segni delle caselle 5-11 non v' ha disparere: tutti ammettono per le due grandi unità del 5° digito significarsi il principio del secondo cubito; e pel geroglifico del cubito accompagnato dalle due piccole unità indicarsi che ciascun di que' digiti appartiene al medesimo cubito secondo. Il gruppo 12° esprimerebbe secondo il Queipo *il terzo* del cubito stesso, a cominciare dal 5° spazio; il 13° *i due terzi*, da quella casella fino alla 28ª.

Lascio le superfluità, le inette ripetizioni, l' assoluta inutilità di questa serie di geroglifici; la quale nulla segnerebbe che non sia già sul cubito diversamente segnato. Noto solo, che gli ultimi due gruppi non hanno già il geroglifico valore di *un terzo di cubito*, *due terzi di cubito*, come si vorrebbe supporre, ma sì di *un cubito e tre palmi*, *due cubiti e tre palmi;* ovvero di *cubito primo palmo terzo*, *cubito secondo palmo terzo.*

Il Lepsius ravvisa tutt' altramente la cosa; ma a poter ben entrare nel suo pensiero convien premettere una quistione, che anche gli altri interpreti han provato a discutere, ed egli risolve a suo modo.

---

(1) *Essai* ec. T. I, p. 52.
(2) *Op. c.* p. 27.

Digitized by Google

11. Qual è il reciproco rapporto, e quale sarà stata la propria origine de' due cubiti *piccolo* e *reale*, accoppiati insieme e contemporaneamente usati in Egitto?

Quanto al *rapporto*, coloro che confusero il piccolo cubito egizio col greco, alquanto maggiore de' $^6/_7$ del cubito reale, come il Boeckh (1), il Queipo (2), l' Hultsch (3), supposero che la proporzione de' due cubiti non fosse esattamente 6 : 7, ma $6 + x : 7$. Nel qual caso, essendo diviso l' un de' cubiti in 24 digiti, l' altro in 28, e così riuscendo i digiti e palmi del primo maggiori di quelli del secondo, niun di que' dotti si curò poi di risolvere la capitale difficoltà, come mai quegli antichi avessero potuto sopra unici moduli, e con palmi e digiti eguali, rappresentare due cubiti che li avrebbero avuti diversi. È dunque forza concludere, e l' ammette anche il Lepsius (4), che il rapporto dei due cubiti dovea essere esatto; 6 : 7, o sia 24 : 28.

Quanto alle *origini* si presenta spontaneo il quesito se sieno indipendenti i due cubiti, o l' uno proceda dall' altro: e quale, in caso, sia il primitivo e più antico.

Il rispettivo numero de' lor digiti, 24 e 28, non dà lume che basti; potendo favorire due contrarie sentenze. È vero che il primo, informato all' ovvio e vetusto sistema duodenario, ha aspetto d' originalità; onde rifondesi apparenza di derivazione nel secondo. Ma siccome il duodecimale sistema pare desunto dall' annuo ciclo solare di mesi 12, la cui importante scoperta fu lento frutto di secolari studi astronomici e di pazienti osservazioni sul corso delle stagioni; mentre il numero *ventotto* per sorte concorda col più elementare e primitivo ciclo lunare, sì perspicuo per le mensili fasi di quel pianeta, e cui tuttora s' informano ventot-

(1) *Metrol. Unters.* p. 288 seg.
(2) *Essai* ec. T. 1 p. 61.
(3) *Die griech. und röm. Metrol.* p. 280.
(4) *Op. c.* p. 47.

Digitized by Google

tesimali zodiaci vetusti dell' Asia orientale; perciò potrebbesi supporre, a ragione di precedenza astronomica, che il maggior cubito preceda, e non ne sia che successiva riduzione il minore. Ma verisimilmente qui non abbiamo, in questo lineare *ventotto*, che una numerica coincidenza fortuita e senza valore di sorta nel nostro proposito.

Piuttosto l' epiteto di *reale* dato al maggiore cubito lo indica novità faraonica: perciò il Queipo il ritiene posteriore al piccolo, o volgare (1). Ma qui pure non è escluso ogni dubbio. Se al maggior cubito dovette precederne un' altro, da cui fu d' uopo distinguerlo coll' aggiunto di *reale*, non ne consegue per ciò che quell' anteriore cubito dovesse appunto essere il *piccolo*, piuttosto che alcun altro cubito ignorato da noi. Nel qual caso il *picciol* cubito potrebbe anche supporsi non essere poi che posteriore riduzione duodecimale del *grande*.

Disparatissime origini del maggior cubito furono immaginate. Fuvvi chi lo volle risultato da misurazioni d' un meridiano terrestre; e così il picciol cubito non sarebbe stato che riduzione dell' altro: ma quella scientifica derivazione è tutt' altro che fondata. Girard invece ne escogitò una affatto materiale: pensò che misurandosi un tempo col cubito naturale, cioè col destro braccio, s' interponesse di traverso la sinistra mano per segno tra l' uno cubito e l' altro; e così ne fosse riescita la settenaria misura del *cubito e palmo* (2). Ma non fece riflessione, che se l' unità di misura in corso era il braccio non vi si sarebbe potuto intromettere e aggiunger la mano; se poi voleasi realmente contare per unità complesse di *cubito e palmo*, dunque il concetto e l'uso della unità settenaria sarebbe anteriore alla pretesa pratica volgare da cui si vuol derivarla.

---

(1) *Essai* ec. T. I, p. 60, 262.
(2) *Mémoire sur le nilomètre ec.* p. 26.

Digitized by Google

Così il proposto quesito sulla origine e priorità dei cubiti resta insoluto; ma un' osservazione di fatto, non so se avvertita da altri, tronca ogni difficoltà.

12. Il *cubito,* come fa palese il suo nome, è una misura anatomica: e qual de' due cubiti egizii s' accordi con essa, quello è il primitivo. Ora il braccio umano, dalla punta del gomito all' estremità della mano, qual' è rappresentato dall' egizio geroglifico del cubito, misura sei palmi, non sette. Dunque il senario cubito precedette il settenario, o reale; che dovett' essere faraonico incremento proporzionale dell' altro.

E oggi in fatti, anche dopo tanto volger di secoli, la media lunghezza del cubito virile agguaglia tuttora il piccolo cubito egizio, di $0^m, 45$. E di vero, che le umane proporzioni e misure non sien mutate ne fan fede migliaia di mummie. Gli antichi giganti, che la mitologia o la storia ricorda, son descritti come eccezioni: i nuovi sogni poi di primitivi pigmei, o *microchiri*, avran certo a cercarsi tutt' altro campo che sulle rive del Nilo. Così ha ragione chi chiama *cubito naturale* il piccolo cubito egizio (1).

Assicurata la priorità del senario, il passaggio ad altro cubito settenario, (qualunque siane il come ed il quando), è chiaramente indicato dal suo nome di *reale:* siccome proporzionale aumento prescritto dal re. Nè è mestieri immaginarne ragioni recondite; basterebbe l' ovvia e antica della favola: *quia vocor leo.* In età nelle quali le pubbliche imposte percepivansi in natura, e gran parte delle gravezze era per comandate, o angarie, potè tornare a spiccio e indiretto aumento d' imposta rincarar la misura (2); che una volta introdotta fu facile perpetuare: come d' altri non dissimili provvedimenti economici abbiamo esempio

---

(1) Saulcy *Revue arch.* 1873 T. VII p. 10.
(2) Cf. *Exod.* V, 8.

Digitized by Google

in Egitto (1). Avarizia e bisogno suggerirono sempre gli stessi spedienti; e anche nelle seguenti età, e fin nella nostra, con aumenti di decimi, di quinti, con distinzioni di misura forte e misura debole, di moneta camerale e di moneta di piazza e somiglianti partiti, si è cercato ognora di sovvenire alle pubbliche necessità, od è riuscito ad avidi potenti di assicurare la parte del leone per sè.

Del resto, anche fuori d' Egitto, era familiare la rinforzata misura lineare settenaria: misura *sacra* o *reale*, che aggiungeva al comune *cubito* il *palmo*. A tempi di Davide la statura di Golia vien descritta *sex cubitorum et palmi* (2); ebraismo, che la caldaica parafrasi dichiara colle parole: *sex cubitorum in cubito qui est cubitus et palmus*. Ed Ezechiele, che profetava nella Caldea, scrivea: *in manu viri calamus mensurae sex cubitorum et palmo;.... mensurae altaris in cubito verissimo, qui habebat cubitum et palmum* (3).

Quale più certa memoria dell' essersi allora usato un cubito forte e legale formato coll' aggiunta d' un 7° palmo al piccolo cubito volgare? E pure, ad onta di sì piane derivazioni, fuvvi chi non seppe scernerle, o rendersene capace; e sospettò aver forse potuto trarre sua indipendente origine dall' alto Egitto il cubito maggiore (4). Ma posta pure quella tebaica provenienza, non resterebbe sempre lo stesso quesito: come colà si fosse potuto introdurre quel cubito in esatto rapporto 7 : 6 col naturale?

13. Il Lepsius, persuaso della priorità del cubito *reale*, ma senza addurne ragione (5), suppone indipendenti l' un dall' altro, e di diverse origini, i due cubiti: usati a lungo e separatamente,

---

(1) *Genes.* XLVII, 26.
(2) I Reg. XVII, 4.
(3) XL, 5; XLIII, 13.
(4) Queipo *Essai* ec. T, I p. 63.
(5) *Op. c.* p. 29.

Digitized by Google

egli pensa, l' uno nell' Alto l' altro nel Basso Egitto; provincie che furono un tempo divise, e serbarono in fatti qualche varietà di costumi (1).

La politica congiunzione de' due Egitti, superiore e inferiore, è fatto antichissimo: anteriore alle grandi piramidi. Il magnifico bassorilievo sinaitico di Snefru, antecessore di Khufu (Cheops), il dice *Signore dell' Alto e del Basso Egitto* (2). Di guisa che l' accoppiamento e il promiscuo uso de' nazionali due cubiti risalirebbe all' antichità più rimota. Sol vorrei osservare, che se il maggiore de' due cubiti, poniamo tebaico, ebbe dunque a dirsi *reale* a Menfi perchè introdottovi e imposto dal re, a Tebe invece per parità di ragione avrebbe avuto a dirsi *reale* il minore. Inversione di parti, e doppia accezione di nome, che sui legali campioni lineari del regno unito non mi par punto probabile: e vie più infirma la gratuita supposizione onde origina.

Se non che altre maggiori difficoltà opponevansi a quella separata derivazione: l' inverosimiglianza, cioè, che due indipendenti misure tra loro straniere serbassero vicendevoli ed esatti rapporti; e l' improbabilità che l' una di esse avesse ab origine la mal pratica e innaturale divisione per *sette* palmi: la quale nelle più ovvie frazioni $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$..... ci porta agli incomodi numeri $3\,^1/_2$, $2\,^1/_3$, $1\,^3/_4$. A sciogliersi quindi da tali difficoltà, fu d' uopo al Lepsius supporre, che da principio i due cubiti non avessero esatto rapporto; che una successiva riforma abbia lor dato il ragguaglio 6 : 7; che anche il cubito reale fosse diviso in 6 palmi; anzi che questa sua divisione senaria proseguisse sempre nell' uso, benchè il nuovo rapporto col picciol cubito paresse dargli aspetto di settenario. A tante e tali ipotesi fu d' uopo al chiaro uomo ricorrere per rendere accettevole la

---

(1) *Op. c.* p. 51.

(2) Chabas *Etudes sur l' antiquité historique d' après les sources égyptiennes.* Paris 1873; p. 328.

Digitized by Google

prima. Ma in simili serie di concatenati supposti, (massime poi non confortati da storici o monumentali indizii, o altre riprove), la forza suol stare in ragione inversa del numero.

14. Or vediamo come l' illustre egittologo s' argomenti provarci l' uso contemporaneo e la coesistente partizione duodecimale d' ambi i cubiti sugli stessi lineari campioni.

Prendiamo sott' occhio il ricostruito suo cubito E; e precisamente la lista *c*, aggiunta di sana pianta per isvolgervi secondo il suo concetto l' oscura serie di segni del cubito A, lista *d*.

La ricostruzione del Lepsius divide il cubito in 28 spazii di tre diverse misure. I primi 4 a sinistra son ventiquattresimi, o sia *digiti*, del cubito reale; e ne formano il 6° ed ultimo palmo; per ciò portano ciascun di essi la scritta: *Cubito* I, *Palmo* VI. Invece i primi 16 a destra son ventiquattresimi, o sia *digiti*, del picciol cubito; e formandone così i primi quattro palmi, le loro epigrafi sono: *Cubito* II, *Palmo* I; *Cubito* II, *Palmo* II..... *Cubito* II, *Palmo* IV. L' intermedio spazio poi 5-12, è diviso bensì in 8 eguali spazii, a compire il numero di 28; ma essi non son digiti nè dell' un cubito, nè dell' altro; poichè questi anomali spazietti, o digiti spurii, stanno a' digiti del picciol cubito, e a quelli del grande come 11 : 12 : 14. Su questi spazii sta scritto *Cubito* II a indicarli complemento del cubito minore. Così il dotto alemanno confida d' avere insieme conciliate le opposte esigenze de' due cubiti; benchè fra lor diversi di digito e palmo. In fatti non avendo tocco i primi 16 digiti a dritta tutte le più importanti misure, delle due *spanne*, de' due *cubiti*, del *sar* e del *remen*, restano a' luoghi loro. De' *digiti* poi e del *palmo* del grande cubito trovasene un saggio a sinistra; quelli del piccolo possono numerarsi, egli dice, da destra.

Se non che dietro queste congruenze apparenti si celano gravi discordanze e difficoltà. Notiamone alcune.

15. La chiara e genuina lezione della superiore lista *b*, concorde in tutti i nostri campioni, segna cominciando a sinistra la serie di 1, 2, 3..... 8 digiti. Quale più aperto indizio che

Digitized by Google

quei digiti dovean essere eguali? Or nell' ipotesi del Lepsius non sol riescon diversi, ma gli ultimi 4 neppure sono *digiti* nè dell' un cubito, nè dell' altro.

Se ambi i cubiti son divisi in 6 palmi, lo spazio 1-8 ove si compie il *doppio palmo* dovrebbe corrispondere al *terzo* di uno de' due cubiti; ma non vale a segnarne niun dei due: poichè pel picciolo cubito è soverchio, e troppo scarso pel grande. Quello spazio in fatti, composto di 4 digiti maggiori e di 4 digiti spurii, al sopra avvertito rapporto, riesce di $4 \times 14 + 4 \times 11 = 100$; mentre il *terzo* del cubito reale è $8 \times 14 = 112$; quello del piccolo $8 \times 12 = 96$.

Nella superiore lista *a* ammette il Lepsius, (nella nota serie di paralelli segnetti $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2,..... 6 interposta fra' geroglifici degli dei), una divisione del picciol cubito per semipalmi; otto cioè nello spazio 28-13, gli altri quattro nel tratto 12-5. Ma per l' aumento accordato a' primi spazii 1-4, alle spese de' seguenti 5-12, questi ultimi otto, ridotti alla misura di $8 \times 11 = 88$, non bastano ai quattro semipalmi segnativi di sopra e che dovrebbero misurare $8 \times 12 = 96$. La notazione adunque per semipalmi suppone che il picciol cubito corrisponda allo spazio 5-28: e per ciò che il residuo spazio 1-4 sia non il $\frac{1}{6}$ ma il $\frac{1}{7}$ del grande.

Se questo primo palmo sinistro sia il $\frac{1}{7}$ del cubito reale allora s' intende il valore delle due grandi unità del 5° digito come segno del *principio del cubito secondo*. Ma cresciuto il palmo dal $\frac{1}{7}$ al $\frac{1}{6}$, le due unità suddette, a parere del Lepsius, rappresentano non già il *principio*, ma il *passaggio al cubito secondo*: speciosa espressione, cui non corrisponde la realtà. In fatti gli otto spazii 5-12 non son già digiti del picciol cubito, più che non lo sien del grande; poichè tutto quel tratto egualmente appartiene, come porzione mediana, ad ambi i cubiti: cominciati al digito 1 e finiti l' uno al 24 l' altro al 28. Esclusa adunque questa significazione di *passaggio*, confermasi l' altra comunemente intesa di *principio*; principio, cioè, d' un *picciol* cubito ch' esso

Digitized by Google

pur compiesi al 28° digito: onde addiviene che il 1° palmo a sinistra equivalga a $\frac{1}{6}$ del cubito *reale*.

Essendovi due *cubiti* e due *spanne*, rappresentati sopra una stessa misura, i geroglifici a ragione li distinguono coll' aggiunto di *grande* e di *piccolo*. Or, nella nuova partizione immaginata, si avrebbero anche due *digiti* e due *palmi*, e dovrebbero aversi due *ser* e due *remen*. Perchè dunque non si vedon distinti cogli stessi epiteti di *piccioli* e *grandi* ancor essi?

Perchè poi sì povero di proprie divisioni il cubito reale a paragone del volgare? De' suoi digiti non ne veggiam tracciati che quattro: chi avesse a misurarne i cinque o i sei, dove li troverebbe segnati? Anche la progressiva suddivisione dei digiti per *mezzi, terzi,..... sedicesimi*, vi manca. Suppone il Lepsius che il grande cubito potesse servire agl' architetti, che posson passarsi delle minori frazioni: serbando il piccolo, più accuratamente diviso, a' mercatanti e alle arti minute (1). Ma qual pro per un ingegnere l' avere sopra uno stesso regolo, imperfetta la misura dell' arte sua, e perfetta poi quella dell' altrui?

Se i due cubiti ebbero veramente digiti e palmi diversi, quale necessità, quale profitto di confonderli e tormentarli, (quasi su letto di Procuste), sopra un regolo stesso? E pur su di un regoletto medesimo avrebber potuto tenersi distinti; l' uno in una faccia, l' altro nell' altra: come appunto in uno de' nostri campioni, (il 9° della nostra serie; l' 8° di quella del Lepsius) (2), che su tre lati porta tre lineari unità di lunghezze e divisioni diverse. Anzi su di un sol lato eziandio sarebbe stata possibile una piena partizione duodecimale d' ambi i cubiti; dividendo, cioè, l' una metà in 12 spazii, l' altra in 14: e tutti i duplici multipli, *digiti*, *palmi*, *spanne*, *ser*, *remen*, *cubiti* vi si sarebber

---

(1) *Op. c.* p. 52.
(2) *Op. c.* p. 16, Tav. IV *b*.

Digitized by Google

trovati. Sol le suddivisioni dei digiti avrebber dovuto arrestarsi le une ai *tredicesimi*, le altre ai *quindicesimi*: lieve jattura, a paragone del vantaggio di coordinare tutte le divisioni principali. E se pe' due cubiti non si usaron due regoli, nè si pensò a niuna delle industrie descritte, non è egli giusto pensare, che non dovea esservene mestieri? Che, cioè, digiti e palmi erano eguali, e per ciò i due cubiti erano l' uno settenario, l' altro senario?

16. Soprabbasterebbe il detto; ma un ultimo suggello può apporlo il frammento del cubito Harris (1): prezioso in questo particolare. Su di esso ha inteso di esemplarsi il Lepsius (2); ma preoccupato dal suo sistema forse non vi pose attenzione bastante. In quel frammento, su cui non restano, (più, o meno incolumi), che le caselle 12-19, sotto la lista degli dei ne corre un' altra portante un' insolita serie di geroglifici: quella dei *Nomi*, o sia delle provincie d' Egitto. Intrecciata poi e stipata co' topografici geroglifici è una progressiva enumerazione di palmi sul fare di quella del cubito A, onde parliamo. Tutti quei digiti portan la scritta *Cubito II*; benchè nel 13°, 17°, 19°, per la frattura, il *II* non appaia; e nel 18°, per evidente scorrezione epigrafica, sia scambiato col *I*. Accanto all' indicazione del cubito è quella del palmo: cioè *Palmo II* nelle caselle 17-19, *Palmo III* nelle 14-16: ma senza fallo il geroglifico del *II* palmo dovea estendersi anche alla 20ª casa, e quello del *III* alla 13ª, che la frattura ci toglie or di vedere. Occupando adunque nel nostro frammento il *Palmo III* del *Cubito II* i quadri 13-16, e il *Palmo II* i seguenti 17-20, è manifesto che il *Palmo I* del *Cubito II* dovea trovarsi sulle caselle 21-24. Ora i residui digiti 25-28, o sia l' ultimo palmo a destra, saranno essi stati il $\frac{1}{6}$, o il $\frac{1}{7}$ del cubito reale? Se fossero stati il $\frac{1}{6}$ non sarebbe rimaso sufficiente

(1) Settimo della serie nostra, riprodotto nella Tavola alla lettera *D*.
(2) *Op. c.* p. 29.

Digitized by Google

spazio a sinistra pel *Cubito II.* Furono adunque il $1/7$; come si dovea dimostrare.

Tutto adunque persuade che anche nel cubito A i primi quattro digiti a sinistra non son che il palmo differenziale dei due cubiti: cioè il $1/6$ del picciol cubito, eguale al $1/7$ del grande: dandoci così la completa misura del *cubitus et palmus.* Sì che la esistenza de' grandi digiti del cubito reale su' nostri campioni resta ancora a provarsi: e ben sarà difficile, dopo tutto il detto fin qui, che una tal prova riesca.

Forse potè indurre in abbaglio l' illustre egittologo la maggior lunghezza del primo palmo sinistro nel cubito A; quasi si trattasse di digiti maggiori: semplice imperfezione di fabbrica, da non trarne conseguenza che valga. In fatti il primo palmo a destra è ancor maggiore del primo a sinistra: e pure non potrebbe concludersene che anche a dritta si trovino altri digiti ed altro palmo del solo cubito maggiore. Della intenzionale eguaglianza di tutti que' digiti e palmi non può muoversi dubbio; benchè tutti, ancor quelli che nel sistema del Lepsius dovrebbero essere eguali, per trascurato lavoro, più o meno si disguaglino.

17. Esclusa adunque la supposta duplicità di digiti, tutta quella faticosa serie di ripetuti geroglifici, tronca e svisata sul campione Drovetti, e meglio spiccante benchè mutila sul cubito Harris, non in altro risolvesi che in una mera divisione *per palmi;* sul fare dell' altra per *semipalmi* segnata per interposte lineette nella lista superiore. Supervacanee giunte l' una e l' altra; non richieste da niun difetto della sì nitida e compita notazione regolare e ordinaria; e i cui laceri e ormai inintelligibili avanzi sol per idiotaggine d' artefice ebbero a essere cumulati sul campione A, benchè la presenza dell' una serie avesse dovuto bastare ad escludere il bisogno dell' altra. Forse con quelle sussidiarie notazioni volgari si volle servire alla comodità d' invalsi computi popolari per palmi; ma smarritone l' originario concetto, e da mali apografi tra imperite mani traendosene altri peggiori,

Digitized by Google

non v' ha stranezza d' incompresi errori e di mutilazioni cui non si potesse arrivare.

Chi sulla stregua della palmare serie Harris dovesse riordinare e compiere l' altra Drovetti, quasi nulla troverebbe in questa da non dover ritoccare. Computando, com' è naturale e palese, dalle due grandi unità del 5° digito il principio del cubito minore, solo il 13° gruppo co' suoi geroglifici *II Cubito Palmo III,* si mostra esatto e a suo luogo. Nel 12° sarebbe invece a togliere una delle lineette al segno del palmo e ridarla a quella del cubito, per riavere la corretta lezione *II Cubito*, *Palmo II.* Sotto il solitario segno poi del *II Cubito* de' precedenti digiti si avrebbe ad aggiugnere il geroglifico del *Palmo II* negli spazii 9-11, e quello del *Palmo I* negli altri 5-12; riponendo nel 5° digito, dinanzi alla figura del braccio le due minori lineette che, forse per angustia di spazio, son passate di sotto; e supplendo a destra tutti i geroglifici mancanti a compiere i sei palmi del cubito volgare. Ne' primi quattro digiti a sinistra poi, settimo palmo ch' è la differenza fra' due cubiti, bene sta il geroglifico del *Cubito I*; ma sotto l' accoppiatovi segno del palmo bisognerebbe alle 4 numerali lineette sottoporne altre 3, a compita espressione del *Palmo VII.*

Tali sarebbero le emendazieni, a voler rendere uniformi quelle due serie geroglifiche; ma chi può assicurare che l' avessero a esser davvero? Altri frantendendo le note altrui, e rifacendole a sua posta, può averne tratto tutt' altro costrutto: e quell' improvviso arrestarsi alla 13ª casa, nel cubito A, accompagnato da tante varianti, ne insinua il sospetto. Comunque sia queste intercalate notazioni accessorie, sì lontane dalla sobria partizione regolare e primitiva del cubito, intruse fuor di luogo e cominciate a ritroso di essa, han troppo palese aspetto d' inette interpolazioni volgari; da non meritare di aver posto nell' ordinata ricostruzione di quegli antichi campioni lineari.

In vece adunque della composita ed elaborata ricostruzione del Lepsius, m' attengo a una più semplice, (Veggasi nella Ta-

Digitized by Google

vola la figura F), conforme alla costante e fondamentale partizione del cubito; esclusa ogni eccezionale ed informe notazione arbitraria. L' enumerazione però degli dei, che avrebbe dovuto occupare la linea superiore, l' ho ommessa nella figura sol per risparmio di spazio; e siccome parte non metrica, ma semplicemente rituale.

Della supposta esistenza di *grandi* e *piccoli digiti* il ch. Lepsius figuravasi di trovarne una riprova nelle sezioni dei descritti modelli lineari (Vedi Tav. fig. A') (1). A suo parere quelle sezioni dovrebbero misurare un piccolo digito nella faccia superiore, due nell' inferiore, un digito grande nella posteriore, e delle due faccie anteriori un grande digito la inclinata, e un mezzo la verticale. Ma la provata insussistenza delle varietà dei digiti mi dispensa dal dilungarmi in mostrare quanto l' argomento che si vuol trarre dalla pretesa proporzione geometrica delle sezioni sia debolmente fondato. Qual uso invero, e quale pratica utilità poteano avere tali proporzioni? Che importa p. e. nei nostri metri la grossezza dei regoli su cui sono segnati?

Intorno a' campioni lineari dell' evo faraonico basterà il sin qui detto: quanto a' pochi altri registrati sopra da noi, e di evidente età posteriore, non occorrerà che un brevissimo cenno.

18. Il cubito di Torino in basalte (nostro N. 8; e N. 7 del Lepsius), conserva bensì la lunghezza del cubito reale, ma abbandonata la partizione ventottesimale e la suddivisione dei digiti, e smesse le geroglifiche notazioni di *grande* e *piccolo cubito*, *spanne*, *palmi* ec., non ha che, per semplici linee, questa triplice partizione sopra tre faccie diverse: in 3, in 4, in 24 spazii. È notissima la tolemaica riforma del cubito egizio; che fu diviso alla greca, non più in 28 digiti ma in 24, per potere averne il *piede*, o sia i *due terzi* di cubito, preferita unità lineare della

---

(1) Lepsius. *Op. c.* p. 27.

Digitized by Google

nazione conquistatrice. E a quel nuovo sistema appartiene il nostro campione.

Altro cubito del museo di Torino, in bronzo e quadrangolo, (materia e forma insolita ne' campioni più antichi), della lunghezza di $0^m,523$, ha sopra tre faccie tre diverse misure lineari. La prima ne dà il cubito reale ($0^m,523$) colla divisione tolemaica in 6 palmi di 4 digiti ciascuno. La seconda è più breve ($0^m,513$), mancandole un centimetro a raggiungere la lunghezza del regolo; partita in 12 semipalmi, divisi ciascuno in 6 spazii, ridivisi a lor volta, nel primo semipalmo a sinistra, in 5 minori spazietti; riuscendone così una insolita divisione del palmo in *mezzi*, *duodecimi*, *sessantesimi*, e del cubito in *duodecimi*, *settantaduesimi*, *trecensessantesimi*: novità metrologiche, di partizione assiro-caldaica e d' ignota lunghezza, di cui qui non accade cercare i riscontri. La terza misura poi, di mezzo centimetro più corta del regolo, è divisa in 27 spazii: e se avesse a supporsi che il 28° digito fosse stato ommesso, per non potervi capire intero, e per ciò dovesse supplirsi; riescirebbe un cubito di $0^m,533$, esso pure mancante di esempi. La presenza del cubito tolemaico in questo campione escludendolo dal nostro programma, ci dispensa dallo studiarne le singolari divisioni: tanto più che sulla sincerità di esso non è mancato chi elevi sospetti. È al nostro N. 9: N. 8 del Lepsius.

Da ultimo un cubito coptico in legno del Museo Britannico, diviso in 6 palmi di 4 digiti ciascheduno, (quadrangolo come il precedente e con coptica epigrafe), dipartesi affatto da' cubiti faraonici per la sua lunghezza di $0^m,5387$; e molto si avvicina al cubito *nero* di $0^m,541$ introdotto dagli arabi in Egitto sul cadere del II secolo dell' egira, e di cui ci resta esempio nel Nilometro di Rudah, ricostruito da Almamun (1).

---

(1) Queipo *Op. c.* T. II p. 90 seg.

Digitized by Google

19. Detto poi de' vetusti due cubiti egizii di 0^m, 450 e 0^m, 525, ampio campo si aprirebbe a ricerche di metrologia comparata; su' visibili rapporti, cioè, tra dette misure ed altre lineari unità antiche e moderne. Ma nè lo spazio, nè il tempo ci consentono di dilungarci; nè senza matura considerazione gioverebbe avventurarci sull' infido terreno; dove seducenti coincidenze numeriche, talvolta fortuite, posson di leggieri sviare con fallaci apparenze di realtà. E basterà per ciò alcun brevissimo cenno; come per saggio.

Caldea ed Assiria, altri primitivi focolari di civiltà, non ci hanno per anche ridonato veruno de' loro antichi campioni lineari; e la metrologia deve star paga colà a cercar lume in architettoniche misurazioni; come già nell' Egitto, quando Newton da dimensioni delle piramidi ricavava il cubito faraonico, confermato poi dalle posteriori scoperte. L' Oppert in fatti tra le rovine di Babilonia ha potuto rilevare in uniformi lastre quadrate di selciati un costante lato di 0^m, 525; e in centinaia di mattoni, portanti i nomi di Nabucodonosor, Neriglissor, Nabonid, il medio lato di 0^m, 315: misure, ch' egli interpretò dover essere il *cubito* e il *piede*; pari, quest' ultimo, a' $^3/_5$ del primo (1).

Quanto al cubito la scoperta dell' Oppert concorda col testimonio d' Erodoto (2) e dell' arabo Kalcaschendi (3), che ne lasciava ragguagli d' un cubito babilonese non dissimile dal reale d' Egitto. Fatto, di cui la storia può offerire verisimili ragioni; benchè male voglia attribuirlo il Queipo alle relazioni sorte fra' due paesi dopo la conquista di Cambise (4): senza riflettere che i metrici monumenti dell' Oppert sono anteriori alla dominazione persiana, e che questa poi, anzi che dal vinto e deca-

---

(1) *Bulletin arch. de l' Athénaeum. fr.* 1856 p. 33 seg.
(2) Lib. I, n. 178.
(3) Queipo *Op. c.* T. I p. 269.
(4) *Ib.*

Digitized by Google

dente Egitto riportare misure sull' Eufrate, meglio avrebbe potuto apportarne di asiatiche sul Nilo.

Quella non fu che una rivincita dell' Asia; ma in tempi molto più antichi ebbero per converso le regioni niliache lunga preponderanza politica al di là dell' istmo di Arsinoe. Lascio, sui primi inizii de' tempi storici di Babilonia, l' etiopico dominio sul basso Eufrate; allorchè il cuscita Nemrod prese a regnare nel Sennaar (1); intorno di che un competente scrittore così si esprime: *Toutes les traditions de la Babylonie et de l' Assyrie permettent de supposer qu' il existe une rélation étroite entre l' Ethiopie, l' Arabie occidentale et les villes du Bas Euphrate. Mais c' est à l' Égypte qu' il faudra demander cette histoire* (2). Dell' egizio predominio sull' Asia sovrabbondano le memorie monumentali; quando i faraoni conquistatori ergevano lor stele reali sull' Eufrate e sul Tigri, e ne' loro annali marmorei registravano le vittoriose lor marcie *contro i ribelli* sino alle porte di Ninive (3). Così non mancano istorici punti di contatto per cui spiegare il possibile passaggio d' egizie misure nella Caldea (4). Se pure, per la meravigliosa longevità de' metrici sistemi, ambi i paesi non avessero avuto per sorte gli stessi elementi d' altronde. Certo è che l' egizia coltura, per quanto si arretrino di millennii le memorie monumentali, ci appare sempre adulta e in pieno sviluppo sul Nilo: talchè parrebbe forza concluderne, che i suoi esordii fossero a cercarsi altrove.

20. Giunta a questo punto la stampa della presente memoria, (stesa già da qualche anno, ma non mandata alla luce per

---

(1) *Genes.* X, 8-10.

(2) Menant *Babyl. et la Chald.* p. 39.

(3) Chabas *Étud. sur l' ant. hist.* p. 123 - 124. Rougé *Inscr. de Karnak* (*Revue arch.* 1860 T. II p. 287 seg.)

(4) Cf. Oppert *Sur les rapports de l' Égypte et de l' Assyrie, éclaircis par l' étude des textes cuneiformes* (*Mémoires de l' Académie des Inscriptions* 1869 T. VIII p. 523 - 640).

Digitized by Google

poter fare tesoro di ulteriori studi di dotti, o di successive scoperte), venivami a sorte a notizia una opportunissima dissertazione del Lepsius sui rapporti appunto del cubito egizio col sistema de' cubiti persiano, assiro e prisco babilonese (1); dissertazione letta sull' entrare del 1877 alla R. Accademia delle Scienze in Berlino, e annunciata nei suoi bullettini mensili (2). E lasciato per mesi sin qui inoperoso il tipografo, nella speranza di procurarmi la bramata memoria, se nel frattempo fosse stata pubblicata, che non so, almeno per estratto; fallita ora ogni mia ricerca, e urgendo la pubblicazione di questo nostro volume accademico; m' è d' uopo condurre innanzi il mio còmpito, col dispiacere di non aver potuto fare mio pro de' lumi molteplici che, a conferma o riforma de' miei studi e pensieri, eran certamente a raccogliersi dalla monografia del dotto alemanno. E ciò mi valga di scusa: da non aver colpa, quasi non me ne fossi curato.

Altri due importanti lavori di affine argomento, venivanmi frattanto alle mani, l' uno dell' Oppert sul campione delle misure assire desunto da' testi cuneiformi (3); l' altro del Lepsius sulle lineari misure babilonesi ed assire secondo la tavola di Senkereh (4): e di questi potrò tener conto nel seguito di questo mio scritto.

Riprendendo adunque l' interrotto mio dire, noterò come tra gli avanzi del palazzo di Sargon a Khorsabad due corti e una torre rettangole, misurate dal Botta e dal Place, mostrassero i lati di 65^m, $32^m,50$, 43^m (5), che divisi per 120, 60, 80, (netti e

---

(1) Lepsius, *Ueber die aegyptischen Ellen-Masstäbe mit Vergleichung der Persischen, Assyrischen und alt-babylonischen Ellensysteme.*

(2) *Monatsbericht der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* Januar 1877, p. 1

(3) Oppert, *L' Étalon des mesures assyriennes fixé par les textes cuneiformes; Paris* 1875.

(4) Lepsius, *Die Babylonisch-Assyrischen Längenmasse nach der Tafel von Senkereh; Berlin* 1877: estratto dalle *Memorie* di quella R. Accademia di Scienze.

(5) Oppert, *L' Étalon* ec. p. 38; *Bulletin de l'Athénaeum* l. c. Queipo, *Essai* ec. T. I, p. 281.

Digitized by Google

verisimili divisori nel sessagesimale computo assiro), danno per quozienti 0^m, 54 166 e 0^m,53 750; la cui media, 0^m, 540, era paruto all' Oppert poter riguardarsi siccome probabile cubito assiro. Tanto più che la misura, essendo stata da' due esploratori eseguita colla catena dell' agrimensore, non potè essere sì squisita da escludere le leggere varianti trovate. Ed era notevole, che siccome il reale cubito babilonese di 0^m, 525, pari all' egizio, non è che il piccolo cubito naturale di 0^m, 450 cresciuto d' un *sesto*, così il suddetto presuntivo cubito assiro sarebbesi ragguagliato allo stesso piccolo cubito egizio aumentato d' un *quinto*.

Della presenza però di quel piccolo, e originario o naturale, cubito di 0^m, 450 sul Tigri, (non improbabile del resto là dove ebbero voga i suoi derivati di 0^m,525 e forse di 0^m,540), non ci hanno fornito, ch' io sappia, diretta prova le esplorazioni. Tuttavia non sarebbe impossibile, che si nascondesse quella primitiva misura ne' quattro famosi prismi ottagoni d' argilla, dell' altezza di 0^m,450, preziosi testi cuneiformi scoperti dal Layard ne' quattro angoli delle fondamenta del palazzo di Tuklat-pal-Asar I (1); di poco posteriore all' eccidio di Troia, e anteriore di circa quattro secoli a Sargon. Quella netta altezza di 45 centimetri, ne' prismi, può essere fortuita: ma potrebbe anche non esserlo. Certo è inverosimile assai, che mentre i comuni mattoni plasmavansi a giuste misure, que' monumentali prismi reali fossero tagliati a casaccio. E poichè dalla celebre tavoletta calcolatoria di Senkereh, illustrata dall' Oppert e dal Lepsius, ricavasi che il cubito assiro, (qualunque siane la più vera misura), ebbe sessagesimale partizione; sia poi in 30 *digiti* come piace al Lepsius, sia in 60, o 120 *unghie* come parve all' Oppert; è palese che, se l' altezza de' prismi non fu che frazione del cubito assiro, e questo fu veramente pari all' egizio di 0^m, 525, come giudica il Lepsius, i 45 centimetri che ne sono i $^6/_7$ non poterono essere sessagesimale aliquota di esso;

(1) Menant, *Annales des rois d' Assyrie*. Paris 1874; p. 33.

Digitized by Google

mentre nell' ipotesi dell' Oppert, d' un cubito di 0^m, 540, i prismi rappresenterebbero $\frac{5}{6}$ del cubito, o sia 5 palmi. Troppo infidi dati per altro a poterne far capitale.

Ho detto che l' Oppert riputò di 0^m, 540 il cubito assiro; ma questa fu la sua prima opinione. E nel ripetuto suo recente lavoro, stimò di doverlo portare a 0^m, 5485 (1): fondandosi sopra una cuneiforme epigrafe di Sargon, la cui disputata lezione ha suscitata tra lui ed il Lepsius una nobile gara d' ingegno (2). L' assira epigrafe dà l' antica misura del recinto della nuova capitale di Sargon a Khorsabad; che le misurazioni moderne di quelle rovine riscontrano essere di 6790^m; e poichè la somma assira, a giudicio dell' Oppert, risulterebbe di 24740 *semicubiti* perciò salirebbe il cubito a 0^m, 5485 (3). Se non che quella sua lezione è ricisamente impugnata dal Lepsius, che legge invece 16280 cubiti interi: pari, al suo computo di 0^m, 525 per cubito, a metri 8547 (4). Di guisa che, se all' interpretazione del primo mancò il suffragio dei dotti, a quella del secondo venne meno la rispondenza e conferma de' topografici riscontri.

Ben potrebbe supporsi, dal punto di vista del Lepsius, che l' antica misura fosse fatta al largo della città, oltre le opere esteriori; se pure Sargon munì la città sua di fosse, come l' emulo suo Marduk-bal-adan erasi contro di lui trincierato di formidabili fosse di 200 misure (5). Ma in tal caso la differenza tra i due rettangoli di cinta, murale ed esterno, dovrebbe lasciare per le fosse acconcio spazio espresso in tonde misure. Se non che, comunque suppongasi il cubito assiro di 0^m, 525, o di 0^m, 540, o fosse pur di 0^m, 450, non se ne ha costrutto di risultati accette-

---

(1) *L' Étalon* ec. p. 38.

(2) *Monatsbericht der K. Preus. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*, 1877 p. 741-58; 1878 p. 87-94.

(3) *L' Étalon* p. 16.

(4) *Die Babyl. Assyr. Längenmasse* ec. p. 132, 134.

(5) Menant, *Annales des rois d' Assyrie*, p. 174.

Digitized by Google

voli. Il perchè par forza concluderne, non essere ancora abbastanza maturi gli studi per trarre dal confronto di quelle antiche e moderne misure di Korsabad buon lume sul vero cubito assiro (1).

---

(1) La tavoletta di Senkereh, per quanto preziosa, è di scarso sussidio a illuminare questo punto. Essa non dà il valore del cubito; sol ne insegna distintamente i multipli, e incertamente le frazioni: quasi per intero asportate da un enorme frattura e lacuna iniziale, suscettiva di supplimenti diversi.

Si è creduto di ravvisarvi una tavola di ragguaglio tra le misure babilonesi ed assire; quanto a me, sarò in errore, ma non saprei riconoscervi che una specie di abaco, o prontuario aritmetico, qual'è l'altra tavoletta sorella: poichè in esse, colla serie de' *quadrati* e de' *cubi* dall' 1 al 60, si dà pure il sessagesimale computo, *per cubiti*, delle misure lineari dalle minori alle massime. Computo, che era utile di avere ordinato ed in pronto: dacchè, per sconnessione nella serie delle unità lineari, l'ordine delle medesime non ha esatta coincidenza con quello della numerazione.

Come le nostre misure decimali seguono la numerazione decadica, basata sulle potenze del 10, (... $^1/_{10^3}$, $^1/_{10^2}$, $^1/_{10^1}$, 1, 10^1, 10^2, 10^3 ...), onde la ordinata serie delle nostre metriche unità, ... *millimetro, centimetro, decimetro, metro, decametro, ettometro, chilometro*, ecc. così le caldaiche misure avrebbero potuto appuntino improntarsi sulla numerazione sessagesimale; la quale procede per le potenze del 60: ... $^1/_{60^2}$, $^1/_{60^1}$, 1, 60^1, 60^2, ecc. Ma così esattamente non fu. A bene considerare, è palese che la serie di quelle unità lineari non è d'un getto e d'una intenzione. Non è che l'unione di due serie, che non ben si connettono insieme: quella delle misure fabbrili, che ha per fondamento il *cubito;* e quella delle itinerarie, od agrarie, che ha per punto di partenza la *canna (qanu)* di 6 cubiti, o la *doppia-canna* di 12. La prima potenza (60^1) di quest'ultima, il *Sus*, riesce di 60 doppie canne o di cubiti 720; e la seconda (60^2), o il *Sar*, risulta di 3600 doppie canne, o di cubiti 43200: che è il doppio *Kaspu*, o *Kasbu*, massima unità itineraria, al modo della parasanga persiana. Il semplice *Kaspu* è la seconda potenza (60^2), o sia il *Sar*, della semplice *canna*. E qui rivelasi una prima incongruenza di metodo; poichè mentre, il *Sar*, o seconda potenza, ch'è il *Kaspu* ha per punto di partenza la *semplice canna*, la potenza prima, o sia il *Sus*, muove invece dalla *doppia canna*.

Ma se poi dalla *canna* risalgasi al *cubito* e alle sue sessagesimali frazioni, l'ordine delle potenze numeriche non coincide più con quello delle unità metriche: a cagione del salto, d'un sestuplo o d'un duodecuplo, che divide le due fondamentali misure, il *cubito* e la *canna* semplice o doppia. Che se invece il computo sessagesimale s'imprenda dal cubito, il coincidere delle potenze numeriche si otterrà bensì nelle frazioni cubitali, ma sarà perduto ne' multipli. Sì che dovea tornar utile, anzi necessaria, nell'uso una tavoletta di computo, da avere in pronto la corrispondenza tra numerazione e misura.

Digitized by Google

In questa condizione di cose, non avendo l' emendazione dell' Oppert, della sua prima determinazione del cubito assiro, fondamento che regga; nè sapendo d' altronde se per semplice congettura, o per fondate ragioni, accomuni il Lepsius all' Assiria il cubito di Babilonia e d' Egitto, di 0^m, 525; siami lecito di non fermare sentenza: e di lasciare qui correre intanto, (sotto piena riserva, e salvo emenda non appena appaia lume bastante), la primitiva opinione dell' Oppert di un possibile cubito assiro di 0^m, 540. So che non è nuova l' opinione in Germania, che dalle sponde dell' Eufrate fa derivare il cubito reale d' Egitto: (1) onde la facile presupposizione, essere quel cubito una nazionale, o locale, unità del Sennaar, senza distinzione tra caldei ed assiri. Fu un tempo, tra i dotti, la voga delle origini greche; ora è delle asiatiche. Ma conviene andare a rilento ne' giudicii. Ed avverrà caso, nel corso di questa stessa memoria, da doverci apparire invertite le derivazioni.

Nè sul proposito delle unità lineari d' Assiria son da pretermettere le quadrilunghe tavolette cuneiformi, di cinque metalli diversi, oro, argento, antimonio, rame, piombo, rinvenute dal Place entro una cassa di pietra nelle fondamenta del ricordato palazzo di Sargon a Khorsabad; disgraziatamente sommerse le tre ultime nel Tigri con un carico d' altre anticaglie importanti; ma scampate le due prime, e passate al museo del Louvre a Parigi (2). Le due quadrilatere lamine superstiti misuran per lati, quella d' oro 0^m, 080 e 0^m, 040; e quella d' argento 0^m, 120 e 0^m, 061; e com' esse corrispondono al peso di 20 darici d' oro la prima, e di 80 d' argento la seconda, (unità ponderali che dovettero adunque precedere di assai e Dario e la moneta coniata), così il Queipo suppone che anche nelle dimensioni si ragguaglino a un cubito antico, fissato da lui a 0^m, 640, (3) ch' egli accomuna alla Caldea e alla Persia, e

(1) Brandis, *Das Münz-Mass-und Gewichtswesen in Vorderasien* p. 22.
(2) Oppert, *Expédition scientifique en Mésopotamie*, Paris 1859 p. 343.
(3) *Op. c.* T. I p. 283, 284.

Digitized by Google

reputa eguale al sacro cubito ebraico (1). Que' lati delle due tavolette risponderebbero ad $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^3/_{16}$, $^3/_{32}$ del cubito predetto, ovvero ad $^1/_4$, $^1/_8$, $^3/_8$, $^3/_{16}$ della sua metà, 0^m, 320: unità metrica la quale, (checchè ne sia del suo doppio), dovremo vedere in progresso avere avuto fuor di dubbio una parte fondamentale nella metrologia assiro-caldaica. E poichè gli arabi ebbero pur essi un cubito di 32 digiti, e di circa 0^m, 640, (2) originato al dire dei loro metrologi dai re persiani, perciò non dubitava il Queipo, quello essere stato (e colla partizione medesima) un cubito degli antichi persi e caldei. (3) Di che gli fa rimprovero l' Oppert: d' avere in luogo dell' ovvio cubito sesquipedale alla greca, introdotto un inaudito cubito bipedale; ignoto, a parer suo, per tutto altrove nell' asiatica antichità (4).

Non io però vorrò impugnare il parere del dotto spagnuolo, poichè d' un assiro piede di 0^m, 320 avremo a vedere sicuri riscontri, a lui sfuggiti; e anche del doppio di esso potrà forse apparircene, in progresso del nostro esame, qualche fumo d' indizio. Sol vorrei notare, dal nostro punto di vista degl' intimi rapporti tra' cubiti egizii e gli assiro-caldei, che la disputata misura di 0^m, 640 prossimamente coincide con un progressivo incremento proporzionale dei noti cubiti egizio-caldaici: avendosi 0^m, 630 $= {}^7/_5 \times 0^m$, 450 $= {}^6/_5 \times 0^m$, 525 $= {}^7/_6 \times 0^m$, 540. Ed è appunto quella la misura che, per analogici computi, avea indirettamente ricavata il Newton pel sacro cubito ebraico, pur da lui equiparato al caldaico; ragguagliandolo a romani pollici 25 $^6/_{10} = 0^m$, 632 (5). Talchè avrebbe potuto parere mostrarcisi nella maggiore misura lineare di 0^m, 630 il noto cubito settenario orientale, il *cubitus et palmus* d' Ezechiele già da noi ricordato: derivabile, cioè, (per l' aumento

(1) *Op. c.* T. II p. 437, 440.
(2) *Op. c.* T. II p. 444.
(3) *Op. c.* T. I p. 271 seg.
(4) Oppert, *L' Étalon* ec. p. 2.
(5) *Opusc. math.* T. III p. 507.

Digitized by Google

d' un palmo, o d' un sesto), dal cubito di 0^m, 540, attribuito all' Assiria dall' Oppert. E parrebbe concordare con questa orientale misura supposta, di 0^m, 630, il ragguaglio dall' antichità tramandatoci della parasanga persiana, (probabilmente tutt' altra che il *Kasbu* del Sennaar): un de' pochissimi lumi fornitici dalla storia sulla prisca metrologia di quelle regioni. L' alessandrino Erone ragguaglia la parasanga di Persia, pari all' egizio *schoene*, a 12000 cubiti fileterii, o sia reali d' Egitto (1); che sono $6300^m = 0^m, 63 \times 10000$. Tonda miriade di cubiti, che potrebbe bensì essere un fortuito prodotto aritmetico, ma potrebbe anche avere non inverisimile aspetto d' una grande e genuina unità di prisco sistema decimale. Sistema prevaluto appunto fra le genti ariane, come indi ed elamiti, ch' ebbero a base della numerazione la *decina*; mentre i turani e semiti del Sennaar preferirono di sostituire la *sessantina:* dalla quale in fatti il *Kasbu* mesopotamio si informa.

Tuttociò per altro, (intorno questi reciproci emergenti rapporti), sia detto di passo, e più per curiosa, che per scientifica, osservazione: non già per istabilir fatti e fermare conclusioni, e da mere apparenze voler trarre argomento di realtà.

Se non che, tornando a' babilonesi mattoni dell' Oppert e alle architettoniche misure da lui citate del palazzo di Sargon; dai primi de' quali egli avea ricavato il cubito e il piede di Babilonia, 0^m, 525 e 0^m, 315, in rapporto di 5 : 3 fra di loro, mentre nelle seconde avea creduto di ravvisare un cubito assiro di 0^m, 540; non deesi tacere essersi argomentato il Queipo di riferire invece tutte quelle misure al tondo piede di 0^m, 320 (2). Così ne' mattoni gli è stato d' uopo di gratuitamente forzare le medie trovate dall' Oppert; e, che è più, spingere il notissimo cubito di 0^m, 525 sino a 0^m, 530, anzi oltre ancora: poichè $3 : 5 :: 0^m, 320 : 0^m, 533$.

---

(1) Cf. Queipo *Op.* c. T. I p. 147, 274.
(2) *Essai* ec, T. I. p. 281, 283.

Digitized by Google

Ne' lati poi delle due corti, 65^{m} e 32^{m}, 50, egli figurasi di trovare 200 e 100 giusti piedi di 0^{m}, 325; mentre nel lato della torre, 43^{m}, non riducibile a tondo numero di piedi, sta pago di riconoscervi 80 cubiti di 0^{m}, 540. Ma non sono supponibili negli stessi edifizii due campioni lineari diversi: per ciò lo stesso cubito che servì di norma nella torre dovette essere la fondamentale misura ancor delle due corti sovraccennate. Tanto più che i decimali multipli del Queipo, 200 e 100 *piedi*, estranei all' assiro sistema di computo, per se invitano a sostituirvi i corrispondenti sessagesimali fattori di *cubiti* 120 e 60.

Con più facile còmpito il Brandis, a evitare le difficoltà incontrate dal Queipo s' è studiato di dare maggiore elasticità alle sue cifre; e per averle arrendevoli ad ogni bisogno, fa oscillare cubito e piede di Babilonia fra 0^{m}, 530 — 0^{m}, 525 e 0^{m}, 320 — 0^{m}, 315. Della *minima* poi di questo piede ne ha fatto la *massima* d' un lato piede greco di 0^{m}, 315 — 0^{m}, 308; per poter riferire ancor questo alla norma di Babilonia. Se non che tanta latitudine di oscillanti valori teorici non è punto giustificata dai monumenti. I quali, dovunque han potuto essere direttamente consultati come gli egizii, greci, romani, lasciano luogo a ben minori libertà ed incertezze. Le possibili variazioni dell' egizio, o caldaico, cubito di 0^{m}, 525 s' aggirano in una cerchia assai più ristretta. Il mesopotamio piede poi di 0^{m}, 320, tutt' altro che potersi confondere col supposto caldaico di 0^{m}, 315, (se pure questo ha veramente esistito), e molto meno col greco od olimpico di 0^{m}, 308, il vedremo essere un nitido e molto esatto prodotto di tutto affatto diversa derivazione.

21. Ma delle vetuste misure lineari asiatiche basti ora questo cenno, per serbare brevi parole almen per una delle primitive d' Europa, l' olimpica.

Il piede d' Olimpia, il più celebre e comune fra i greci, ci è noto per monumenti non dubbi. La fronte del Partenone, che da buone fonti sappiamo essere stata di 100 piedi olimpici, accuratamente misurata dallo Stuart ha dato per valore del piede 0^{m}, 308 27; e altra misura del Foucherot è riescita di 0^{m}, 308 597.

Digitized by Google

Conferma poi questi risultati il cognito rapporto di 25 a 24 notato dagli antichi tra il piede olimpico e il romano; sapendosi che lo stadio greco agguagliava 600 dei primi (1) e 625 de' secondi (2). Ora i più accurati studi sul piede romano assegnandogli 0^m, 296 3, riesce l' olimpico a 0^m, 308 64. Differenze minime, (ne' soli decimi di millimetro), tra le quali il Queipo s' appiglia alla cifra tonda di 0^m, 308 50; onde il cubito olimpico, che è un piede e mezzo, gli risulta di 0^m, 462 75. Cifra sicura ne' millimetri, ma che nelle minime frazioni di essi potrà ancora variare qualcosa.

Per un errore di sistema il prelodato scrittore, ed altri valenti metrologi prima e dopo di lui, hanno appropriato all' Egitto il cubito olimpico, supponendolo originario di colà; e confondendolo col piccolo cubito egizio, anzi ricisamente sostituendolo ad esso. E pure appariva evidente il rapporto 6 : 7 non col reale egizio di 0^m, 525, troppo scarso, ma con altro maggior cubito di 0^m, 540: quale fu appunto quello che nelle assire misure di Khorsabad erasi mostrato all' Oppert; e che quindi, come per riverbero del cubito olimpico, qui ci torna inopinatamente davanti. Cubito, al quale, (sotto piena riserva, s' intende), noi ridaremo intanto il nome di *assiro*; poichè omai ci si ripresenta dinanzi non più col nudo riscontro delle sole misure addotte dall' Oppert, ma colla luce riflessa da' suoi scoperti rapporti col cubito olimpico, e dalla ulteriore riprova del suo non essere, o almeno non parere, (come or ora vedremo), che naturale incremento del reale cubito egizio per semplice effetto di assira numerazione.

In tempi ne' quali l' Asia e l' Egitto ci offrono indubitabili esempi di correlativi cubiti settenarii e senarii, il settenario rapporto del nuovo cubito 0^m, 540, (che affacciasi a Khorsabad), coll' olimpico di 0^m, 462 75, non può non fare impressione. Questo

---

(1) Herod. II, 149.
(2) Plin. *N. H.* II, 23. Colum. *R. R.* V, 1.

Digitized by Google

d'un solo diecimillimetro divariasi da'giusti $^6/_7$ di quello: $0^m,46285$. Squisite concordie, tra cifre non ripescate con isforzo, ma emergenti spontanee da semplici dati monumentali, le quali sebbene possano essere fortuite, pure, in mancanza di dirette prove contrarie, la prudente critica ben si asterrà dal sentenziare alla recisa per mera e certa opera del caso.

22. Conforme adunque al reale cubito egizio, e all' altro settenario d' Ezechiele, profetante appunto sui fiumi di Babilonia, ne apparirebbe sul Tigri un cubito di sette palmi o, a dir più esatto, maggiore d' un settimo che un altro cubito di sei. Nè l' analogia ci porterebbe forse lungi dal vero nel riconoscere nelle due correlative e proporzionali misure un grande o *reale* cubito assiro e il suo *piccolo* o fondamentale cubito volgare. Infatti il maggiore dei due farebbe mostra in reali edifizii di Assiria; al modo stesso che nelle misure delle piramidi rilevate dal Greaves erasi manifestato al Newton il regale cubito d' Egitto; confermato poi dal nilometro d' Elefantina, altro pubblico monumento che ne' settenarii suoi cubiti ripete ancora, com' era dovere, la stessa misura officiale o reale. E se non erano i più modesti cubiti fabbrili resi alla luce dagli egiziani ipogei niuno avrebbe sospettata l' esistenza e fondamentale proporzionalità dell' altro minore cubito egizio. Poiché sebbene le misurazioni architettoniche avessero messo sulle traccie d' un' altra unità lineare minore, erasi persistito dai metrologi a riputarla indipendente e improporzionale, e da riferirsi a pertinenza greca. Così ora il ragguaglio del cubito olimpico, come riflette lume sulla possibilità d' un grande o reale cubito d' Assiria, è ancora indizio rivelatore della probabile esistenza d' un assiro cubito minore. Ne l' essercisi finora mostrato solo nella Grecia questo cubito più piccolo toglie nulla alla probabilità della sua orientale derivazione: poichè è ancora ben lontana la valle del Sennaar dall' averci interamente svelata la serie, e molto meno la storia, delle sue lineari unità.

La rimota influenza dell' Asia interiore sulle contermini provincie marittime, popolate da antichissime colonie greche in

Digitized by Google

stretta relazione di commerci co' loro connazionali dell' arcipelago e del continente europeo, spiega la via per cui dalla Mesopotamia potè una lineare misura passare nella Grecia e riuscirvi popolare. Misura, non già *regale*, quale s' impone a popoli soggetti; ma sol *volgare*, o demotica; quale per convenienze, o necessità commerciali potea rendersi accettevole in paese straniero e farvisi liberamente adottare. E troppe altre mesopotamie unità metriche son palesi nella Grecia ed anche nel Lazio, per poter nulla trovare d' incredibile nella orientale provenienza del cubito di Olimpia: che male attribuito alla vallata del Nilo, dovrà invece rivendicarsi a quella dell' Eufrate e del Tigri.

Le misure dell' età di Sargon sono per l' Assiria quelle del tramonto: nè è inverosimile che pel lungo corso dei secoli possano essere state precedute e preparate da altre. I cilindri di Tuklat-pal-asar I, accennati più sopra, ne sarebbero indizio.

23. Una difficoltà però avrà qui colta a volo, precorrendo alla risposta mia, l' acuto lettore: come possa, cioè, essere settenario rispetto al cubito olimpico di 0^m, 462 85, l' assiro di 0^m, 540, che per l' eguaglianza sua a $^6/_5$ del naturale di 0^m, 450, e a $^6/_7$ del supposto caldaico di 0^m, 630, parrebbe aver dovuto avere divisione senaria?

Gl' intimi rapporti tra queste prische misure, non ricavati, ripeto, da forzate elaborazioni aritmetiche e da preoccupate induzioni, ma spontaneamente emersi dalla fredda osservazione dei monumenti, son fatti; che per l' addentellato reciproco si rifletton lume e si prestan forza a vicenda, e che la sana critica non potrebbe tenere in non cale. Ma se la realtà di questi rapporti scambievoli può riguardarsi come fuori di quistione, il modo però con che quelle proporzionali variazioni operaronsi, e il divisivo sistema applicato alle nuove unità risultate, sfuggono ancora alle nostre investigazioni; e restano per ciò nell' incerto campo della congettura: finchè da qualche fortunata scoperta monumentale non ci spunti lume migliore. Un prezioso acquisto ha bensì fatto frattanto la scienza nelle tavolette di Senkereh: ma da esse non è sollevato che un lembo del velo.

Digitized by Google

Due fatti per altro, messi in sodo dalla storia metrologica, possono considerarsi come punti acquisiti, e fornire non improbabile filo alle nostre supposizioni. L' uno, che per proporzionali incrementi di cubiti minori si usò crearne altri maggiori: come fan prova i due cubiti egizii e il *cubitus et palmus* d' Ezechiele. L' altro, che una misura medesima potè avere partizioni diverse: come il reale cubito faraonico, di settenario ridotto da' Tolomei a senario, e come il piede romano diviso a un tempo in 12 oncie, ed anche in 16 pollici.

Nel quale proposito, delle variazioni subìte dalle unità lineari, giova bene riflettere, che tranne quelle indotte dal tempo o da incuria, le quali sfuggono al calcolo, l' altre prescritte per avventura da pubblica autorità naturalmente dovean riuscire proporzionali: poichè le differenze da introdurre non potendo essere quantità ignote al popolo che dovea adottarle, era mestieri computarle ed esprimerle in cognite frazioni dell' originaria unità da variarsi. Un assoluto taglio e distacco dalle vecchie misure, qual fu nella introduzione del *metro*, avrebbe importato l' adozione d' una base metrica nuova; ma se ciò abbia potuto avvenire in qualche tempo presso alcun popolo dell' antichità qui non cade indagarlo: certo è che niun fumo di ragione per sospettare di ciò ne offrono i particolari sistemi onde parliamo. Altra maniera d' innovazione nelle lineari unità potè avvenire, anzi avvenne a notizia nostra talora, per accordarle colle cubiche di capacità o di peso: ma restano anche in tal caso, più ascose bensì, pur discernibili le proporzionali variazioni introdotte.

Quanto poi alla partizione della lineare unità fondamentale, il cubito naturale, e della naturale o anatomica sua metà, lo *zereth* o spanna, in anatomiche frazioni di palmi e digiti, non è a riputarla sì necessariamente legata al sistema duodenario, cui conformaronla, anzi forzarono per lor numeriche predilezioni egizii e greci, da non poter informarsi anche ad altri sistemi. Poichè secondo il vario punto a cui si prenda la larghezza della mano e delle dita può riuscirsi a divisori e divisioni diverse.

Digitized by Google

Accostate in fatti ambo le mani tra loro, colle dita spianate e congiunte, sì che le divergenti estremità de' due pollici sieno tra loro a contatto, si han due grandi palmi: equivalenti a 5 pollici ciascuno, e tutti e due insieme eguali alla spanna. Onde uno *zereth* decimale, ed un cubito vigesimale: probabile divisione primitiva, per la nota priorità del sistema decadico, e perchè se dall' aritmetica scala quinaria, decimale, vigesimale, delle estremità umane ebbe la natura insegnato a dedurne il sistema della numerazione, più dovea suggerire d' uniformarvi quello delle misure, delle quali quegli arti medesimi erano naturale modulo e tipo. Accomodare il cubito a una nnova stregua duodenaria, (quando gli aritmetici pregi dell' astronomico numero del *dodici* vennero in voga), importò in fatti uno sforzo. Fu d' uopo, cioè, ridurre il naturale elemento della mano, ossia il palmo, a 4 sole dita: e poichè i quaternarii tre palmi nella piena loro larghezza avrebbero ancora superato la spanna, bisognò misurarli al mezzo delle dita, al secondo loro nodo, per coartarli entro la naturale misura dello *zereth*. Meno forzato poi ebbe a riuscire il raggiustare il cubito secondo l' orientale sistema della sessantina, o trentina. Poichè raccogliendo e allineando insieme l' estreme punte delle cinque dita congiunte ne sorte un palmo quinario bensì, ma pari in misura al quaternario di prima: riuscendone una spanna di 15 digiti e un cubito di 30; (che dimezzati potrebbero dare le 60 porzioni, o sia i sessantesimi caldaici). E ne torna a conferma la tavoletta di Senkereh, dove i 30 *digiti* in che dividesi il cubito, hanno il cuneiforme nome di *punte della mano: Handispitze*, del Lepsius; (1) *corne* (de la main), *ongle*, dell' Oppert. (2).

Non par dubbio l' ordine cronologico di queste progressive divisioni del cubito: attestate l' ultime due da' monumenti, benchè la prima sia semplicemente induttiva. È osservabile su que-

---

(1) *Die babylonisch - assyr. Längenmasse* p. 121.
(2) *L' Étalon* ec. p. 30 - 31.

Digitized by Google

sto particolare una significativa anomalia della scittura cuneiforme: la quale del resto è notorio avere avuto origine figurativa, a mo' della geroglifica. Benchè il palmo del Sennaar, svelatoci da' monumenti, sia quinario, la sua figura cuneiforme non ha che *quattro* tratti, o sia digiti: mentre d' altronde l' arcaico carattere cuneiforme del palmo ne ha cinque (1). E si direbbe che la calligrafica riforma di quel carattere del palmo, dovesse risalire ad un tempo, in cui un nuovo palmo quaternario fosse succeduto in Oriente a un anteriore quinario, rappresentato dal quinario carattere arcaico suddetto. Onde ci si mostra in barlume la verisimiglianza che anche colà una duodecimale divisione del cubito, preceduta forse dalla decimale, abbia preesistito, e fatto strada alla trigesimale de' tempi meno remoti. La quale, benchè tornata a un nuovo palmo quinario, non più immutò il quaternario carattere già invalso; al modo istesso per cui in Egitto continuò a servire a segno del palmo quaternario la figura della mano con tutte cinque le dita, di che fu toccato più sopra. Parallelli indizi, ai quali non si vuol certo attribuire maggiore forza che non abbiano; ma che, se pur valgono a nulla, parrebber rifondere una stessa luce sul probabile ordine di precessione de' varii sistemi divisi del cubito.

24. E or lasciandoci ricondurre da questo filo d' idee al supposto cubito assiro di $0^m,540$, che per l' equivalenza sua a $^5/_6$ del naturale cubito di $0^m,450$ può avere aspetto d' origine senaria, non è disdetto di escogitarne altra possibile derivazione e partizione diversa. È vero che la tavoletta di Senkereh, secondo la interpretazione corrente, dà al cubito sei palmi: ma è proprio certo che quello sia il cubito assiro? E chi ha dimostrato che l' Assiria non avesse che un cubito, e un solo sistema divisivo; e che la famosa tavoletta dell' antica Larsam (Senkereh), là al sud di Babilonia, nel cuore della vecchia Caldea, recasse e conteggiasse davvero non già il cubito caldaico, ma quello di Ninive?

---

(1) Oppert. *Expédition scientifique en Mésopotamie* p. 63. Lepsius L. c.

Digitized by Google

È degna di nota la indicativa differenza che passa fra i due cubiti di $0^m,525$ e $0^m,540$: questo eccede d' un esatto *trentacinquesimo* di quello. E poichè, siccome già si avvertiva, nelle metriche riforme le differenze introdotte sogliono essere aliquote, non sarebbe incredibile che il *trentacinquesimo* fosse una propria frazione del cubito assiro; nè l' ipotesi mancherebbe d' una molto agevole spiegazione. Come, per uniformità al computo nazionale fu diviso in Caldea in 30 o 60 parti il reale cubito egizio di $0^m,525$, potè invece l' Assiria avere assoggettato a quel computo e diviso per *trentesimi* il cubito volgare di $0^m,450$; lasciando settenario il reale: vero *cubitus et palmus*, di digiti 35. Che se col volgere dei secoli, come già un tempo in Egitto, fosse tornato acconcio di rinforzare la officiale misura, era ovvio (sotto colore di semplice riforma di computo) aggiungervi un digito: portandola a $0^m,540$, o sia digiti 36. I quali, naturalmente divisi in sei palmi, con probabile suddivisione del digito in dieci spazietti di millimetri $1\ ^1/_2$ ciascuno, potean dare il riparto del cubito in 360 porzioni, (imitato da quello dell' eclittica, che dura tuttora); facendo riscontro al grande multiplo lineare l' *ammatgagar* di 360 cubiti, usato in Mesopotamia, e di cui secondo l' interpretazione dell' Oppert (1), la grande iscrizione in basalte di Nabucodonosor ci ha conservato memoria (2). La effettiva divisione di un cubito in *trecensessantesimi* l' abbiam per sorte in un de' nostri:

---

(1) Oppert, *Expédition en Mésop.* II, 321. *Bull. de l' Ath. fr.* 1856 p. 33 seg. Menant *Babyl. et la Chald.* p. 204, seg.

(2) Babilonia, che a detta d' Erodoto (I, 78) avea mura di 120 stadi per lato, che son 480 stadi in quadro, nella riferita iscrizione ripetesi dallo stesso Nabucco essere stata da lui cinta d' un muro di 480 *ammatgagar*. Onde appare non essere l' *ammatgagar* che lo stadio. Il quale, com' era di 600 piedi pei greci, così al noto rapporto di 3 : 5 fra piede e cubito caldaici riusciva di 360 cubiti in Babilonia (Cf. Brandis *Das Münz - Mass* ec. p, 22). In luogo di 480 il Rawlinson avea letto 400: di che il Brandis sta in forse se la lezione dell' Oppert sia bene sicura (*Op. c.* p. 24).

Digitized by Google

quello in bronzo di Torino, onde si è più sopra parlato. Uno stadio poi di 360 cubiti, originario della Persia o della Caldea, l' abbiam nel *galva* degli arabi (1).

Posta poi la primitiva esistenza de' due cubiti di $0^m,450$ e $0^m,525$ in Assiria, divisivi in 30 e 35 digiti, cioè nel rapporto di 6 : 7 fra loro; se per la giunta d' un digito, o sia d' $\frac{1}{35}$, al secondo di essi quel rapporto fu rotto, non sarebbe fuor di ragione il supporre che si fosse voluto ristabilirlo con simile giunta d' $\frac{1}{35}$ anche al primo: che sarebbe salito a $0^m,46285$, misura del cubito d' Olimpia.

Così l' assira genesi del cubito olimpico potrebbe spiegarsi; se le semplici ipotesi, sole possibili in tanta penuria di documenti e distanza di tempi, bastassero a fondamento de' rigorosi calcoli e pronunciati della scienza. E converrà attender conferma o disdetta dal tempo: potendo le meglio immaginate divinazioni dell' oggi venir mandate in dileguo dal primo monumento che torni all' aprico il domani.

Quest' eran parole e conclusioni già scritte da me innanzi di avere notizia e delle tavolette di Senkereh e de' pregevoli studi dell'Oppert e del Lepsius intorno di esse. E come il filo del mio discorso correva una linea obbligata, in forza del sommario stampato già in fronte al capitolo, così non m' è stato possibile di rifonder di pianta la mia scrittura a seconda del lume novello che dalla preziosa tavola metrologica di Larsam potea derivare: e m' ha bisognato star pago a introdurne, e quasi interpolarne, qualche occasionale tocco od accenno quà e là. Vero è, che per quanto ho potuto raccoglierne l' autorità del monumento di Senkereh non pare perentoria, sul punto di mettere in sodo la medesimezza del cubito di Babilonia e di quello di Assiria: onde alle precedenti misurazioni dell' Oppert sul conto dell' ultimo non è tolto

---

(1) Queipo, *Op. c.* T. II p. 444.

Digitized by Google

ogni peso (1). Ma fossero pure identici, come tiene il Lepsius, i due cubiti, babilonese ed assiro, (entrambi, cioè, di $0^m,525$), non ne uscirebbe che vieppiù chiarito e più fermo il principale mio assunto: che qui era di far palese l' affinità grande che passa tra le lineari misure di Mesopotamia e quelle d' Egitto.

Avrei voluto toccare dell' antico piede romano, che sappiamo dagli scrittori e vediamo ne' monumenti aver avuto rapporto di 24 : 25 coll' olimpico; ma mi vien meno il tempo e lo spazio. Avrei bramato non tacere d' altri, anche moderni, cubiti, o *bracci*, che più o men ritraggono de' faraonici: dell' indiano *hasta*, o cubito, a mo' d' esempio, di $0^m,457$, sì prossimo al piccolo egizio e diviso pur esso in due spanne o digiti 24; ma sarebbe un non più volere far fine. Sol confido che l' intima parentela tra le lineari misure egizie e straniere siasi fatta palese, e possa parere abbastanza assodata; sebbene non sempre riesca d'afferare con scientifica certezza il nascoso filo che insieme rannoda quelle misure.

25. Resterebbe a dire delle lineari unità maggiori o itinerarie, che nell' Egitto faraonico non dovettero mancare; ma delle quali le memorie storiche, epigrafiche e monumentali non ci hanno conservata precisa notizia. Sappiamo di uno stadio di 400 cubiti, e d' uno *schoene* di 30 stadii, pari alla parasanga persa, usati in Egitto; ma in tempi più bassi; e non potendo con buon fondamento riportarli all' età faraonica, miglior consiglio è tacerne.

Gioverà piuttosto ridare una rapida occhiata a tutto il detto fin qui: soggiugnendo per sommi capi l' epilogo de' principali punti venutine in chiaro.

I.° Due cubiti, uno *piccolo* o volgare, l' altro maggiore o *reale*, ebbe l' antichissimo Egitto: l' uno di 6 palmi, l' altro di 7; divisi, quello in 24 digiti, questo in 28.

---

(1) Forse nell' ultima dissertazione del Lepsius, citata più sopra, intorno le relazioni del cubito egizio col persiano, assiro e babilonese antico, può essersi ricavata dai monumenti nuova luce, e migliore. Ma ho avuto ad esprimere già prima il dispiacere mio di non esser riuscito a procurarmi sì importante e bramato lavoro.

Digitized by Google

II.° Primitivo e fondamentale cubito fu il *piccolo*, rispondente al cubito naturale; l' altro non ne fu che successivo e legale incremento.

III.° Ad onta di contrarie opinioni di dotti, è certo che i palmi e digiti d' ambi i cubiti furono eguali; sì che i due cubiti stettero fra loro nell' esatto rapporto di 6 a 7. E poichè, da' molti emersi campioni, la media lunghezza del maggior cubito risulta di $0^m,525$, quella del minore riesce di $0^m,450$.

IV.° Non è quindi a confondere, come più d' un metrologo ha fatto, il *piccolo* cubito egizio coll' *olimpico*; poco diverso bensì di misura, ma spiccatamente e caratteristicamente da esso distinto.

V.° La subalterna unità del *piede*, pari a $^2/_3$ del cubito, usata dai greci, non fu negli usi dell' Egitto faraonico. Onde vien meno la base, (cubo del preteso piede reale), su cui elevò il Queipo il metrico sistema ebraico, da lui accomunato all' Egitto.

VI.° L' ebbe bensì la nuova misura del *piede* l' Egitto tolemaico; il quale, sotto nome di *fileterio*, mantenne l' antico cubito reale: diviso però alla greca, non più in 28 digiti, ma in 24.

VII.° Quanto a' rapporti poi de' due cubiti egizii con altre unità lineari straniere, ciò che se n' è brevemente toccato può riassumersi come segue.

a) L' uso dell' egizio cubito reale a Babilonia, già attestato da Erodoto, avere or trovata la sua monumentale conferma per le osservazioni dell' Oppert.

b) Del piccolo cubito egizio non restarci in Mesopotamia riscontri egualmente sicuri; sebbene la sua giusta misura ne appaia a Ninive ne' cuneiformi prismi del palazzo di Tuklat-pal-Asar I, di poco posteriore all' evo troiano.

c) Due cubiti poi, in esatto rapporto di 6 a 7 fra loro, come gli egizii, e rispettivamente eguali a' $^{36}/_{35}$ di questi apparire, con vario lume, sotto diverso cielo: l' uno evidente e indubitato, in Atene, l' *olimpico* di $0^m,46285$; l' altro, men palese e sicuro, in Assiria, ricavato in $0^m,540$ dall' Oppert tra le rovine

Digitized by Google

di Khorsabad. Onde parrebbe l' antico cubito olimpico non essere stato che un primitivo e volgare *piccolo* cubito assiro.

d) La genesi poi di detti due cubiti, per proporzionali incrementi degli egizii, parere visibile; sebbene le verisimili congetture sul modo ond' essa abbia potuto operarsi aspettino la lor conferma da ulteriori scoperte.

e) E da tali congetture parere offerirsi la chiave del come il supposto cubito assiro di $0,^{m}540$, sebbene *settenario* rapporto all' olimpico, avesse potuto divenire *senario* rispetto ad altro cubito maggiore, il caldaico di $0^{m}, 630$, o $0^{m}, 640$ già divinato da Newton: creduto eguale al cubito sacro degli ebrei, o al *cubitus et palmus* d' Ezechiele.

f) Rimanere indi incerto se la misura di $0^{m}, 315$, o forse $0^{m}, 316$, de' babilonesi mattoni dell' Oppert sia un vero *piede* pari ai $^{3}/_{5}$ del cubito di $0^{m}, 525$, o non piuttosto lo *zereth* dell' altro cubito di $0^{m}, 630$, o $0^{m}, 640$.

g) Da queste correlazioni poi tra precipui cubiti antichi, (dalle quali anche il piede romano non dipartesi, siccome eguale a $^{24}/_{25}$ dell' olimpico), riuscire abbastanza palese la mutua affinità loro, e la comune derivazione dal cubito naturale, o sia dal piccolo egizio. Affinità, che un più ampio saggio di metrologia comparata potrebbe mostrarci estesa a un' infinità d' altre lineari misure antiche e moderne.

Vero è che l' essersi talvolta fatto abuso da metrologi di accidentali rispondenze numeriche, per inferirne immaginarie derivazioni di sistemi, ha sveglio il sospetto. Sì che con inverso abuso il Queipo, pure ammettendo i manifesti rapporti proporzionali tra le lineari unità egizie, caldee, ebraiche, olimpiche, romane, tutti in fascio li sentenzia fortuiti; e da non poterne indurre il minimo rapporto d' origine fra que' cubiti (1).

Se questa pretesa disparità di origine fosse scientificamente certa, o almen probabile, forse la presunzione della casualità de'

---

(1) Queipo *Op. c.* T. I p. 166, 268.

Digitized by Google

rapporti potrebbe passare; sebbene non potesse non parere strano per vero che tanto intreccio ed esattezza e reciprocità di relazioni avesse ad essere mero effetto del caso.

Ma ogni verisimiglianza sta invece per la impugnata unità di derivazione; e la connessione de' rapporti si volge quindi in conferma di essa.

Che le umane schiatte, uscite da un comune stipite e discese da un popolo primitivo, debbano averne avuto in retaggio i rudimenti primi della vita socievole, è altamente credibile. Or tra le primissime necessità sociali è pur quella di unità metriche comuni; e l' adozione del braccio umano a modulo di misura accenna in fatti ad usi primitivissimi e a metodi estremamente elementari. E concordano le bibliche e caldaiche memorie nel mostrarci sino da' suoi primordii la rinovellata famiglia umana, (erede d' una più che millenaria società anteriore), già famigliarizzata col cubito. Cubito, probabilmente non più indeciso e variabile, a misura del braccio individuale mal bastevole ad arti e bisogni comecchessia progrediti; ma ridotto ormai, com' è dato di credere, a stabile e comune tipo meccanico, desunto dalla media lunghezza del braccio medesimo. Con che potrebbe parere confrontare una osservazione filologica; l' essere, cioè, comune a' camiti del Nilo e a' semiti dell' Eufrate e del Tigri, e chi sa, forse anteriore alla migrazione delle schiatte, il nome della misura del cubito: egizio *mah*, ebraico *amah*, caldaico *ammat*. Nè alla sana critica possono parere spregevoli queste significative concordie tra l' intima natura delle cose, e forse delle parole, e le più vetuste e rispettabili tradizioni dell' umanità.

Ebbevi adunque un cubito anteriormente agli esordii delle nazioni storiche: egizia, caldea, ellenica, o quall' altra si voglia. E i primi progenitori loro dovettero trasmettere ai posteri ciò che avean ricevuto dagli avi.

Certo è che, col volgere dei secoli e disgregarsi delle genti, variazioni assai dovettero avervene; e variazioni di variazioni: sia volute, sia accidentali. Ma quando un popolo, per ragione qual-

Digitized by Google

sisia, voleva portare novità nelle proprie misure, elevando o scemando le rispettive unità, la più ovvia e spiccia via era di determinare gl' incrementi o decrementi delle nuove misure in frazioni delle passate: non già d' introdurre differenze arbitrarie e incommensurabili colle unità in corso. Differenze, cioè, mancanti di un naturale fondamento, bisognevoli di un nuovo tipo a cui riferirsi, ignote e straniere a chi dovea adottarle. Così perpetuavasi la proporzionalità dei sistemi; poichè il reciproco rapporto non rimanea interotto. Quando il cubito crescevasi d' un sesto, o al cubito sostituivasi il piede, accadea bensì variazione nelle unità lineari di computo, ma le fondamentali del palmo o del digito rimanevano intatte; e quando il siclo da 20 oboli scendeva a 18, poniamo, od a 12, e riduceasi l' asse da librale ad unciale e quartunciale, scemavano bensì le spendibili unità di valore monetale, ma rimanean salvi i ponderali fondamenti dell' obolo e dell' oncia.

Immaginarsi, in seno all' antichità, un sì radicale novatore, che rompendo affatto col passato indicesse nuove misure a capriccio; intimando p. e. a' suoi « *il sasso della mia fionda sia il vostro peso; la misura della mia spada sia il vostro cubito* »; immaginarsi, dico, un tal fatto è forse sognare. È troppo duro dibarbicare e divellere sistemi invisceratì col popolo, invecchiati colla umanità; profondamente radicati in tutti gli usi della vita, in tutte le pratiche dell' arti, in tutte le valutazioni del credito e dell' avere, in tutte le estimazioni della pubblica e privata richezza. Un sì riciso taglio ha avuto a vederlo bensì l' età nostra; e ad onta de' moderni sussidi della scienza e della istruzione, e del vigor delle leggi e dell' onnipotenza de' governi, a grande stento il nuovo sistema decimale, con tutte le incontrastate perfezioni e comodità sue, ha potuto lottare coi laceri e sconnessi, e ormai impaccianti, avanzi de' vetusti sistemi, di cui appunto parliamo; e dopo tre quarti di secolo non è ancor riuscito interamente a prevalere.

E sebbene alle dianzi accennate variazioni intenzionali e metodiche, per cui i rapporti d' origine non ismarriscono, dovessero intrecciarsi, per azione del tempo ed incuria dell' uomo, le inav-

Digitized by Google

vertite e fortuite, onde quegli originarii rapporti si turbano, e svisano e obliterano; pure i perturbatori effetti di quelle accidentali e lente concause, più si risale verso la fonte, meno dovean essere sentiti; se, anche dopo millenii, pur ci riesce di riordinare in gran parte per gruppi la infinita varietà delle unità metriche odierne, e riferirle alle primitive e originarie loro famiglie. Così quando noi troviamo, ad esempio, in Modena due *braccia*, l'uno di $0^m,633$, l'altro di $0^m,523$, ripugna il buon senso a giudicarli prodotti *fortuiti*, piuttosto che riconoscervi gli antichi cubiti di Caldea e d' Egitto migrati quando che sia, dondeche sia, comunque sia, insino a noi.

E or basti delle unità lineari.

II.

PESI FARAONICI

Sommario. — 1. *Uten* e *Kat* — 2 rivelano il lor peso per la scoperta d' un campione ufficiale del Museo Harris — 3 creduto estraneo a tutti i noti sistemi. — 4 Non unità multiple dell' *Uten*, o summultiple del *Kat* nel sistema egiziano. — 5 Retrospettivo sguardo alla presumibile origine della primitiva unità ponderale, — 6 della bilancia — 7 e del divisivo sistema dei pesi. — 8 L' *Uten* è il *millesimo* del peso del primitivo cubito cubo d'acqua niliaca; — 9 in pieno accordo col decimale sistema d' Egitto, — 10 e con esatta acconcezza d' espressione geometrica; — 11 e senza cronologica incongruità di forma nel campione Harris, onde quell' *Uten* è ricavato. — 12 Il *Kat* e i suoi divisori. — 13 Il *Pak*, *centoventottesimo* d' *Uten*, — 14 forse è l' aureo equivalente del *Kat* d' argento. — 15 Faraoniche unità di conto, enea, argentea, aurea. — 16 Insussistenza d' una supposta proporzione egizia 5:3 tra oro ed argento, — 17 cui non suffragano eccezionali esempi adducibili, — 18 anzi oppongonsi biblici riscontri, — 19 e caldaici ed egizii. — 20 Induzioni sulla produzione argentifera. — 21 Forse il faraonico rapporto tra i due nobili metalli fu 1: 12 $^4/_5$; — 22 onde potrebbe riflettersi alcun lume sugl' ignoti *pezzi d' oro* e *d' argento* faraonici; — 23 de' quali il primo potrebb' essere di 5 *Pak* d' oro, l'altro di 3 *Kat* d' argento: — 24 congetturali valori non incongrui per sè, — 25 nè pe' reciproci rapporti loro, o delle presumibili loro frazioni. — 26 Altre osservazioni relative. — 27 *Uten* di bronzo, e rapporto di questo spendibile metallo cogli altri due. — 28 Una serie di pesi del Museo di Bulaq — 29 rivela un *Uten* più forte, — 30 il cui teorico valore, ricercato per via di *medie* e di *massima*, — 31 potrebbe parere riferibile a cangiato ragguaglio tra oro ed argento, — 32 ma più probabilmente ha più lontana origine, da cubatura del cubito *reale*; — 33 così che da' due cubiti, piccolo e regio, avrebbero parallela genesi i due *Uten*, debole e forte; — 34 forse l' un *sacro*, l' altro *reale*. — 35 Riepilogo.

1. Detto del cubito, il filo dell' argomento ci condurrebbe a dover discorrere delle misure di superficie, per poi passare al-

Digitized by Google

l' altre di capacità, indi ai pesi. Ma delle faraoniche misure superficiali od agrarie presso che nulla si è fin qui potuto scoprire; il poco poi che delle stereometriche ci si è fatto a sorte palese non può ricever lume che dal riscontro de' pesi. Quindi la necessità di pigliar le mosse da questi.

Non ancora son passati vent' anni da che il ponderale sistema faraonico era avvolto d' impenetrabile buio. E solo attribuendo all' Egitto, onde usciva Israele, l' ebraico sistema noto per ventura abbastanza, argomentavansi i dotti di poter supplire per induzione al difetto di più autentici dati e di più dirette prove monumentali (1). Speciose, ma infide, ipotesi ed analogie, che avean condotto lontano dal vero; e per cui l' indirizzo dei sinceri studi era fuorviato.

Mentre però confondevasi da' metrologi l' egizio sistema coll' ebraico, nuovi monumenti, che si andavan studiando, o scoprendo, vennero a spargere un' improvvisa luce sui veri ed ignorati pesi dell' antichissimo Egitto.

Due egizii nomi di pesi, di disputata lezione, *Uten*, (o *Ten*, *Tennu*), e *Kat*, (o *Ket*, *Kite*, *Kati*), faceansi notare nelle iscrizioni geroglifiche: applicati il più spesso ad oro, argento ed altri metalli, o merci di pregio. Una frequente loro menzione ricorre sulle monumentali mura del santuario di Karnak, dove sono sculte ed istoriate le guerresche gesta di Thothmes III: famoso faraone della dinastia XVIII, il cui regno che suolsi riferire al XVII secolo A. C. (2) cadde al certo, (qualunque sieno le incer-

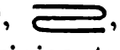
---

(1) Basti citare l' ultimo trattato di metrologia venuto in luce innanzi le nuove scoperte: l' *Essai sur les systèmes métriques et monétaires des anciens peuples*, pubblicato a Parigi nel 1859 dal Vasquez Queipo. Compito e dotto lavoro, nel quale le ultime acquisizioni della scienza d' allora possono ritenersi riassunte.

(2) Rougé, *Annal. de philos. chrét*, T. XVI. Ser. III, p. 17. Chabas, *Études sur l' antiquité historique d' après les sources égyptiennes et les monuments reputés préhistoriques*, Paris 1873 p. 16. Cf. Lepsius, *Koenigsbuch*, 1858. Bunsen, *Aegyptens Stelle in der Weltgesichte*. Piazzi-Smith, *Life and work at the great Pyramid*. Osburn, *Mon. history of Egypt. ec.*

Digitized by Google

tezze cronologiche), in pieno periodo della cattività d' Israele in Egitto. In quelli annali, illustrati dal Lepsius, dal Birch, dal Rougé, fra i bottini di guerra e i tributi de' popoli soggetti veggonsi ricordati, per citarne alcun saggio: « 100 *uten* d' argento, 100 d' oro; argento *uten* 761, *kat* 2; oro *uten* 45, *kat* $^1/_9$; ferro *uten* 2040; lapislazzoli *uten* 110; ecc. ecc. (1). »

Le figure geroglifiche di questi due pesi son riportate alle lettere Q ed R della Tavola nostra. In quel segno ,  , caratteristico dell' *uten*, pensa lo Chabas figurarsi una ripiegata verghetta metallica; che sarebbe acconcia foggia di peso primitivo, per la facilità di tagliarla a sua posta e ridurla alla voluta giustezza (2). E anche oggi in fatto pesi di questa foggia durano nel Sennaar (3); e sovente ancora, per comodità maggiore, son filiformi e ripiegati in doppio i più esigui pesetti delle dilicate nostre bilancie di precisione.

Se non che potrebbe forse anche supporsi che, a guisa dei *fish - hook coins* dell' India, (che sono addoppiate vergelle metalliche) (4), fosse a sorte rappresentata in quella figura dell' *Uten*, anzichè un peso da bilancia, una delle prische forme di spendibile metallo premonetale; ch' ebbe poi in Egitto e nell' Asia la più comoda e più comune forma anulare. Non vuol tacersi per altro che di questa lineare forma di *uten* metallico, sia come peso da bilancia, sia come valuta premonetale, non resta memoria, o riscontro nelle monumentali rappresentazioni egiziane. L' egizia valuta metallica avea forma d' anello, (Vedi Tavola lettera Z), e raramente di disco forato (5); ed è forse per ciò che anche l' anello

---

(1) Rougé, *Revue arch.* T. II, 1860, p. 298-305.

(2) *Détermination métrique de deux mesures égyptiennes de capacité.* Chalon s. S. 1867, p. 3.

(3) Wilkinson, *The Egyptians in the time of the Pharahos*, 1857.

(4) *The numismatic Chronicle*, I Ser. T. XVI, pag. 179; T. XI Tabl. X.

(5) Lepsius, *Denkmaeler* II. Taf. XXXIX, *a*. Chabas, *Recherches sur les poids, mesures el monnaies des anciens égyptiens*, 1876, p. 16.

Digitized by Google

ebbe ne' geroglifici egizii rimotissima significazione di peso (1). I faraonici pesi poi, sì sovente figurati sulle bilancie ne' monumenti, non hanno che forme d' animali: buoi, vitelli, ippopotami, gazzelle (2): al pari degli assiri pesi in figura d' oche e lioni, tornati in luce dalle rovine di Ninive (3) Pesi di figure animali li ha conservati sino ad età relativamente recenti la Scandinavia (4).

Quanto a' due faraonici pesi *uten* e *kat* scarso era per altro il profitto ricavato dalle epigrafi egizie. Aveancene tramandato i nomi, e mostravanceli l' uno multiplo dell' altro; anzi dover capire il secondo più di *nove* volte nel primo (5): ma il giusto loro rapporto e valore era tuttora un mistero.

---

(1) Rosellini, *I monumenti dell' Egitto e della Nubia. Mon. civili* T. III, p. 189. Rougé, *Revue arch.* T. II, 1860, p. 298. Probabilmente anulare o filiforme fu l'antichissimo argento corrente in commercio; δοκιμος εμποροις, secondo la frase dei Settanta, o sia *probata moneta publica* secondo la prolessi della Volgata; quali furono i sicli d' argento pagati da Abramo pel campo di Ephron (*Genes.* XXIII, 16). Niuno ignorando del resto che prima assai che il battere vera moneta avesse ne' mercati sostituito lo spiccio modo del numerario, o contante, al precedente corso dei metalli a peso, doveasi essere avvertita la necessità di agevolare i contratti e pagamenti mettendo in circolazione, (salvo la verifica della bilancia), pezzi metallici di pesi determinati: per potere, senz' uopo e perditempo di spezzamenti faticosi e importuni, proporzionare i prezzi o valori ai bisogni. Di che ci restano aperti indizii in numerosi testi biblici ed egizii; onde si fa palese che, secondo l' ordinario procedere per gradi negli umani trovati, così ebbe a essere in quello della moneta. La quale non fece che aggiugnere, a pubblica garanzia del peso e del titolo, una pubblica impronta a determinate unità metalliche di conto, in uso già prima. Che, inalterate nel peso e solo avvantaggiate nella forma e nel conio, mantennero in fatti gli anteriori e premonetali lor nomi di *sicli, dramme, stateri,* ecc.

(2) Lepsius, *Denkmaeler*, P. III, tav. 39. Chabas, *Recherches* ec. p. 4. Rosellini, *Mon. civili*, Tavole *passim*.

(3) Layard, *Discoveries in the ruins of Nineveh and Babylon* Tav. 95, 96.

(4) Holmboe, *Norske Vaegtlodder*, Christiania 1863; citato da Chabas, *Recherches* p. 4.

(5) Chabas, *Revue arch.* T. III, Ser. II, 1861, p. 13.

Digitized by Google

Al difetto però delle iscrizioni monumentali fortunatamente supplirono i papiri litterati: che ne rivelarano esser que' vetusti due pesi in semplice e primitivo rapporto decimale tra loro (1). E giova, in punto sì capitale, riferire testualmente un passo di un celebre papiro Harris, contenente gli annali di Ramses III; appena posteriore all' esodo ebraico (2).

Oro buono	*Uten*	217	*Kat.*	5
Oro di monte di *Koptos* (*Keb-ti*)	»	61	»	3
Oro di Kusch (Etiopia) . . .	»	290	»	$8\frac{1}{2}$
Totale oro buono (e) *oro di monte*	*Uten*	569	*Kat.*	$6\frac{1}{2}$

E altri testi non pochi confermano che 10 *kat* formano un *uten;* sterile notizia per altro, sin che alcun' altra fortunata scoperta non ci avesse rivelato il peso di una di dette unità. Ed anche in ciò mostrossi propizia la sorte.

2. Un rarissimo peso egizio, di serpentino del deserto, portante indicazione del suo teòrico valore, venne alle mani di arabi cercatori di salnitro fra le rovine di Tebe; e passò ad arricchire la celebre collezione Harris in Alessandria. Avutane quindi contezza l' illustre egittologo francese F. Chabas non indugiò a recarlo a pubblica notizia: e toccò a lui la ventura di segnalare al mondo erudito il monumentino prezioso (3): destinato a sconvolgere tutti gl' invalsi concetti intorno la prisca metrologia egizia, e fornire a' nostri studi un tutto nuovo e più sicuro indirizzo.

---

(1) Chabas *L. c.* p. 16. *Détermination métrique de deux mesures égyptiennes de capacité*, Paris 1867, p. 3, nota 1.

(2) Chabas, *Revue arch.* T. c., p. 16. Lepsius, *Die Metalle in den Aegyptischen Inschriften*, nelle *Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus dem Jahre* 1871. Philos. Histor. Klasse, p. 39.

(3) *Sur un poids égyptien de la collection de M. Harris d' Alexandrie: Revue arch.* T. III, Ser. II, 1861, pag. 12 seg.

Digitized by Google

Il picciol peso, d' accurato lavoro e di conservazione perfetta, ha geometrica forma d' inverso tronco di cono sormontato da calotta emisferica, come mostra la Tavola alla lettera I; e porta l' epigrafe: *Kat* 5 *del tesoro d' On* (1); o più letteralmente (come gentilmente scriveami il ch. Chabas, cui d' ogni cortese notizia sua amo di rendere grazie): *Katis* 5 *de la double demeure d' argent de On.*

E poichè quella appellazione di *doppi* era ordinario attributo degli stabilimenti reali, ne acquista importanza di officiale e accertata misura il prezioso cimelio. Que' tesori, od erarii, addetti a templi o a residenze reali, il cui egizio nome è *pa - hat*, *per - hat* (*maison de l' argent* dello Chabas (2), *Schatzkammer*, *Silberkammer* del Lepsius) (3), risalgono ad antichità rimotissima: ricordati non solo dalla Bibbia all' età di Giacobbe (4), ma da egizii monumenti della V dinastia (5), di gran lunga anteriore ad Abramo. Ed eran depositi di ricchezze d' ogni maniera, raccoltevi sotto buona custodia ed esatto conteggio: costantemente poi ragguagliate in *uten* e *kat* (6).

Quanto alla topografica appartenenza del peso, una incertezza restava; per l' omionimia di due città dell' Egitto, l' *On* del nord, e l' *On* del sud; cioè la *Ramses* biblica, o l' *Heliopolis Magna*, nel Delta e l' *Hermonthis* de' greci sull' alto Nilo (7). Se non che il dubbio dagli egittologi è sciolto a favore d' Eliopoli (8).

---

(1) Chabas, *L. c.* e *Recherches sur les poids*, ec. p. 2. Madden, *History of jewis coinage* p. 277. Lepsius, *Die Metalle* ec. p. 41.

(2) Chabas, *Recherches* ec. p, 4.

(3) *Die Metalle* ec. p. 33, 40.

(4) *Genes.* XLVII, 14.

(5) Chabas, *Recherches* ec. p. 16.

(6) *Id. L. c.* p. 4, 16.

(7) *Id. Revue arch.* 1861, T. III. p. 15. Maspero, *Revue arch.* N. Ser. Novembre 1877, p. 322. Rougé, *Monnaies des Nomes de l' Egypte*, nella *Revue numism.* N. S. T. XV, 1874, p. 9, 37.

(8) Lepsius, *Die Metalle* p. 41.

Digitized by Google

Le geroglifiche e poco dissimili designazioni topografiche delle due *On* possono vedersi presso il Rougé, chi amasse farne confronto (1).

Sulla parte sferica del nostro peso è un' altra epigrafe geroglifica, che lo Smith interpreta: *Appartenente al Sole* (2); epigrafe poco avvertita dai doti, ma che vedremo poi potere aver forse una caratteristica e tutta peculiare importanza.

Accuratamente esaminato sulla bilancia il nostro campione fu trovato, a peso inglese, di grani Troy 698; e, considerata l' ottima conservazione sua, fu giudicato dall' Harris non aver potuto esso perdere per l' attrito dell' uso che 3, o 4 grani Troy (3). Laonde l' originario suo peso fu dallo Chabas valutato in cifra tonda, grani 700; che, in ragione di $0^{gr},064798$ il grano, sono a misura metrica $45^{gr},3586$ (4). Così che il *kat* gli risultò di $9^{gr},07172$, l' *uten* di $90^{gr},7172$.

Sebbene però in quella prima pubblicazione sua del 1861, si fosse lo Chabas appigliato, per rotondità di cifre, a que' 700 grani inglesi pel mezzo *uten* (5), preferì poi per vie maggiore semplicità d' espressione, in altro dotto lavoro del 1867, la netta cifra decimale di grammi 91 per l' *uten* intero (6). Quattro anni appresso il Lepsius, nella sua memoria sui *Metalli in Egitto*, calcolava l' *uten* a $90^{gr},9561$ (7). Approssimative determinazioni del resto: non ammettendo, in sì minime frazioni di peso, quell' unico campione un assoluto e definitivo giudizio.

---

(1) *Monnaies des Nomes* pp. cc.

(2) *Proceedings Soc. Ant.* Ser. II, T. I, p. 242. Madden, *History of. jew. coin.* p. 277.

(3) Chabas, *Détermination métrique*, ec. p. 2.

(4) *Id. Revue arch*, T. III, Ser. II, 1861, p. 14. *Détermination* ec. p. 2. *Recherches* ec. p. 2. Madden, *Hist. of. jew. coin.* p. 276.

(5) *Revue arch. L, c.*

(6) *Détermination* ec. *L. c. Recherches* ec. *L. c.*

(7) *Die Metalle* ec. p. 41.

Digitized by Google

Per valutare la perdita che il pesetto tebano abbia potuto soffrire non abbiamo altro estimativo dato che il giudizio dell' Harris; che a discrezione la reputa di 3 o 4 grani. C' è d' uopo adunque non uscire da questi limiti; senza riguardo a comodità e ritondità di cifre, elemento estraneo a una determinazione scientifica. La prima estimazione del Chabas fu troppo bassa, ammettendo soli 2 grani di perdita; la seconda passò alquanto oltre i 4: ai quali non arriva quella del Lepsius. Per me erami appigliato al supposto consumo de' 3 grani, (medio fra le due supposizioni del Chabas); perchè, senza escire dalla alternativa valutazione dell' Harris, men discostavasi da quel primo valore di 90, 7172, ammesso dal Chabas, dal Poole (1), dal Brandis (2); ch' era la forma sotto la quale, son già molt' anni, parvemi l' *uten* rivelare i suoi intimi rapporti colla metrologia universa. Nè oggi ancora, fra l' avvertito oscillare di pareri e valori, parmi necessario recedere dalla mia prima opinione: poichè le oscillazioni ristringonsi fra termini sì esigui da non poter punto soffrirne i generali rapporti dell' *uten*; e perchè omai per me non è più il campione Harris l' unica fonte scientifica da cui derivare quel peso. Altra teorica via da determinare il valore dell' *uten* ci si aprirà fra breve; e il confronto de' risultati ci porterà a una determinazione del peso Harris sol d' $^1/_{50}$ di gramma diversa da quella del Lepsius. Non calcolabili divari in queste nostre ricerche.

Attenendoci adunque al supposto peso originario di 701 grani Troy nel campione Harris, che sono 45^{gr}, 423398, ne uscirebbero questi rispettivi valori: *Uten* 90^{gr}, 84679, *Kat* 9^{gr}, 084679 (3); molto prossimi al vero per certo, sebbene leggermente modificabili per altra via.

---

(1) Madden, *History of. jew. coin.* p. 277.
(2) Das *Münz - Mass* ec. p. 76.
(3) *Revue arch.* T. c. p. 16, 17.

Digitized by Google

3. La novità di questi pesi faraonici destò la sorpresa dei metrologi; i quali, non ravvisandovi somiglianze con altri pesi conosciuti, li ebbero a credere di tipo affatto originale e di sistema estraneo del tutto agli altri già noti.

Fin dalla prima pubblicazione del nostro cimelio, lo stesso Chabas, vistine emergere gl' impensati valori del *kat* e dell' *uten,* veniva notando come le speculative induzioni, ond' altri erasi fino allora provato di derivare le unità egizie dalle greche od ebraiche, non avessero condotto che all' errore. Poichè tra i pesi egizii e la mina o il siclo ebraici e la mina greca od asiatica non potea, a suo parere, essere tentata assimilazione nessuna (1): opinione non ismessa anche in seguito dal dotto egittologo (2).

Nè diversa impressione n' ebbe lo Stuart-Poole; che del *kat* e dell' *uten* s' avvisò di comporne un suo talento egiziano. E notava egli pure la mala riuscita delle precedenti ricerche, e l' inconciliabilità dello scoperto sistema cogli altri tutti: conchiudendone, che quello esser doveva un indipendente sistema, o forse il più antico e come il generatore degli altri (3). Lampo di verità indarno balenato al chiaro metrologo, che non potè coglierne abbastanza di lume da mettere una volta i nostri studi sulla dritta via del vero.

Ed altrettali sono le conclusioni del Brandis: il quale penetratosi delle profonde speculazioni sue sul metrico sistema caldaico,

---

(1) *Recherches* ec. p. 39, 40.

(2) Un' avvertenza amo qui di non pretermettere In queste e in tutte l' altre determinazioni di valori piacemi di non trascurare niuna delle decimali frazioni risultanti, anche minime; non per affettazione ridevole di micrometriche esattezze impossibili in tal fatta di computi; ma perchè mette conto avere alla mano genuini ed integri elementi di calcolo quando sia per accaderci di dover moltiplicare quei valori.

(3) *The talents of Egypt have hitherto formed a most unsatisfactory subject .... The Egyptian talent cannot be traced to any other. Either it is an indipendent system, or, perhaps, it is the oldest talent and parent of the rest.* (Madden, *Hist. of jew. coin.* p. 276, 290.)

Digitized by Google

ed uso a provarsi di riferire ad esso ogni altro sistema, pur di due è indotto a sentenziare che affatto sottraggonsene: que' delle due valli del Nilo e del Tevere (1). E chiama per conseguenza un errore il confondere i pesi di Babilonia con quelli d' Egitto; i quali, a suo credere, non hanno cogli asiatici sistemi relazione di sorta (2).

Quanto a me io considerava con meraviglia questo smarrirsi di sì prestanti ingegni dietro apparenze fallaci; e in que' novi pesi non era già la mancanza, ma sì la moltiplicità, de' lor rapporti colla metrologia universa, che mi teneva sospeso. E, tacendo delle apparenti concordie tra' pesi egizii e i romani, soprattutto m' ingeriva sospetto la stretta lor connessione coi persi. Di guisa che ebbi a restarmi lungamente dubbioso, se il celebrato pesetto Harris ci avesse rivelata davvero una prisca unità faraonica, o non piuttosto una tarda riduzione di età e di sistema persiano.

Tanto più, che la stessa configurazione del nuovo cimelio parea confermare i sospetti. Poichè, a differenza de' faraonici pesi rappresentati ne' monumenti sempre in forma di accosciati animali, non che di quelli pure d' Assiria ricordati dianzi, il campione Harris, colla sua figura di solido di rivoluzione, pareva appartenere alla nuova e più atta maniera delle forme geometriche prevalute ne' secoli appresso.

Solo la geroglifica scrittura, abbandonata ne' bassi secoli, davagli colore di vetustà. Cronologico indizio per altro non abbastanza sicuro: poichè in monumenti officiali, (qual mostravasi il nostro campione), mantennesi, non che sotto i persi, per sino sotto i greci e i romani quell' antica grafia.

Se non che più attento studio e riflessione più matura potè poi dissipare in me i concepiti sospetti: nè crederei omai di ap-

---

(1) *Das Münz - Mass - und Gewichtswesen in Vorderasien*, p. 43.

(2) *Jetzt weiss man, dass dieses Gewicht mit den asiatischen Systemen in keinen nachweisbaren Zusammenhang steht, sondern in jeder Beziehung dem Nillande eigenthümlich ist.* (*L. c.* p. 76).

Digitized by Google

pormi in fallo nell' accettare francamente, ad onta di ogni apparenza contraria, il peso Harris qual tipo non dubbio della ponderale unità faraonica.

4. Innanzi di farmi ad esporre le ragioni varie che a questa conclusione mi condussero, e prima di discutere il più giusto valore della fondamentale unità egizia di peso, desumendola dalla sua propria fonte teorica, giova non pretermettere qualche osservazione preambola intorno la semplice e primitiva compage del ponderale sistema faraonico, qual ne appare ne' monumenti.

Usi i metrologi a trovar sempre ne' sistemi greci ed asiatici la ordinata scala di *obolo*, *dramma*, *mina*, *talento*, parve a talun di essi che altrettanto avesse a riscontrarsi eziandio nel sistema egiziano. Accortosi lo Stuart-Poole che il bronzo de' Tolomei pare battuto sulla norma del *kat*, (il quale del resto nella lingua copta ha conservato la significazione di *dramma*, o *didramma*), suppose che il talento del bronzo tolemaico non fosse che la continuazione d' un antico talento de' faraoni (1). Nel quale il *kat* avrebbe avuto, a suo credere, l' ufficio di dramma, l' *uten* (detto da lui *men*, quasi *maneh*, col Birch) (2), quello di mina; formandosene poi di 6000 *kat*, o sia di 600 *uten* o *men* un supposto talento egizio di 54^{ch}, 425 28 (3). Ma il fatto è che *mina* e *talento*, asiatiche unità di conto originate sull' Eufrate e sul Tigri dal connubio de' due sistemi di numerazione sessagesimale e decadico, (sopra di che avremo forse a riparlare a suo luogo), furono ignoti in Egitto. Dove la semplice numerazione decimale forniva, nelle ordinarie sue potenze del *dieci*, acconci multipli di computo espressi in *uten* e *kat:* al modo stesso che oggi pure da noi concordemente si numera e conteggia a *decine*, *centinaia*, *migliaia*, *milioni* di *lire*, senz' uopo d' altri estranei numerali vocaboli.

---

(1) Vedi Madden, *Hist. of jew. coin.* p. 276, 278.

(2) Cf. Madden, *L. c.* p. 276, 277. *Revue arch.* T. III, Ser. II, 1861 p. 12.

(3) *The Numismatic Chronicle, New Series* T. IV, 1864, p. 52. Madden, *L. c.* p. 287.

Digitized by Google

Ne' tanti calcoli registrati sui monumenti, o papiri dell' antico Egitto non mai è menzione, non che di *mine* o *talenti*, di niun altro nominale multiplo dell' *uten*: e le ordinarie espressioni numerali applicate all' *uten* e al *kat* bastano alla significazione di qualsivoglia quantità di peso, o valore. Così, ad esempio, sopra la rappresentazione d' un cumulo grande di aurei anelli premonetali, che si stanno pesando, è scritto in geroglifici il peso dell'oro passato sulla bilancia; e la somma è questa: *Uten* 36692 (1). Che sono nulla meno che chilogrammi 3328 ½ d' oro: il fino, cioè, di 573 329 de' nostri marenghi, o sia presso a 11 ½ milioni di lire della presente moneta. Somma equivalente a più di un centinaio di talenti babilonesi, e pure espressa a computo egizio, senz' uopo di *mine* e *talenti*, per semplice numerazione decimale dell' *uten*. Anche biade e farine si troveranno registrate per un peso di presso a 400 000 *uten* (2): che sono intorno a 360 quintali, computati pur essi per semplice moltiplicazione dell' *uten* senza menzione di *talenti*.

Anzichè adunque computare all' asiatica per *sessantine* di *kat*, che sarebber le *mine*, o per *sessantine* di *sessantine*, che (salvo variazioni posteriori) sarebbero *talenti*, conteggiava l' Egitto a pretta norma decimale: con piena corrispondenza tra il sistema de' pesi e quello della numerazione. E come fra noi la grande unità di computo è, secondo casi, il *migliaio* o il *milione* di *lire*, ei pare essersi valuto l' Egitto, a questo ufficio, del *migliaio* di *uten*: corrispondente alla *miriade* di *kat*.

Sugli scaffali d' un egizio tesoro veggonsi disposti in bello ordine uniformi sacchetti ripieni d' oro, (che ricordano i sacchi dell' oro d' Isaia) (3); saccoli, accuratamente stretti e forse suggellati alla bocca, e portanti ciascuno sul ventre la geroglifica

---

(1) Lepsius, *Denkmaeler*, III Abtheilung, Taf. 39. *Die Metalle* ec. Taf. I, n. 22.

(2) Chabas, *Recherches* ec. p. 3. Pleyte, *Papyrus Rollin*, Tav. XI.

(3) *Qui confertis aurum de sacculo. Is.* XLVI, 6.

Digitized by Google

scritta del contenuto: quel netto *migliaio* di *uten.* « *Oro* 1000 *uten*; — *Oro d' acqua* (forse in fluviali arene o pagliuzze) 1000 *uten;* — *Oro d' Ombos* 1000 *uten*; ecc. (1) » Gli erano adunque come i sacchetti di *mille franchi* d' argento de' nostri cassieri: destinati a speditezza e sicurezza di computo; e gli uni e gli altri son prova d' una grande ed usuale unità numerale di conto: il *migliaio* di *lire* fra noi, il *migliaio* di *uten* nel regno de' faraoni (2).

Se non che il nostro *migliaio* di *lire* è ben lungi dall' avere nel metrico sistema decimale quella giudiziosa acconcezza di rapporti, e quella capitale e suprema importanza, che ha il *migliaio* d'*uten* nel sistema d' Egitto. Il *migliaio* di *lire*, (cinque chilogrammi d' argento), non è che un divisore qualunque dell' unità di volume; un insignificante multiplo di quella di peso. Il *migliaio* di *uten* è invece, (e il vedremo), la fondamentale unità egizia di peso; è nella sostanza, ma senz' uopo del nome, quella massima unità che negli altri men primitivi sistemi, variamente tarpata, ebbe

---

(1) Lepsius, *Die Metalle* ec. p. 35. Tav. I, n. 8.

(2) Son numerosi i ricordi, antichi e moderni, di metalliche unità di conto rinchiuse in suggellate borse o sacchetti. Un assiro riscontro di metalliche borse lo reca l' Oppert (*L' Étalon des mesures assyriennes* p. 85); e l' antico, *βαλαντιον* (borsa) dell' impero greco, non era secondo le *Glosse Nomiche* che una borsa di 125 monete, o sia *λεπτα*; equivalenti a talenti 2 ½ di rame, o sia ad oncie 2 ½ d' argento. Così in Oriente, massime in Turchia ed in Persia, perpetuossi quello stesso costume delle borse: rappresentando ivi *una borsa* 1000 monete d' oro: come le *talegas* (sacchi di tela) di Spagna, contenenti il migliaio di piastre, e i francesi *sacs* ch' erano il migliaio di franchi. Nè i nostri antichi *fiorini di suggello*, riveduti da pubblici ufficiali e suggellati in borse, o cartocci, eran d' altra maniera. Per analogo uso, benchè in proporzioni assai minori, l' antico Messico tenea in circolazione piccole quantità d' oro in polvere chiuse in trasparenti penne d' oca. Il Giappone poi avea sue scatole, d' un migliaio di scudi d' argento ciascuna, munite del suggello imperiale; ed altre di rame del valsente d' una dozzina di scudi, Monetali unità di computo e corso, che rifondon lume sull' uso ed ufficio de' ricordati sacchi faraonici: ma che, per ordine di tempo come per importanza di pregio, cedono tutte di gran lunga la mano a quelle magne unità primitive dell' antichissimo Egitto.

Digitized by Google

poi nome di *kikkar*, o *talento*. Il *migliaio* di *uten*, o *miriade* di *kat*, non è, secondo un più recente linguaggio, che un *diecimila dramme:* forti dramme per vero, a paragone delle altre, ridotte e stremate, che sino a noi arrivarono; ma per altro non senza reciproci rapporti fra loro. Quella tonda *miriade* non avea mestieri di esser detta *talento;* bastandole la sua numerale espressione. Fu invece tra altri popoli che si fece sentire il bisogno di altri vocaboli. Venute in uso, (qui non cade indagarne il quando e il perchè), unità di computo di 6000, 3600, 3000 dramme fu d' uopo distinguerle con nuovi nomi, e riparare al disaccordo introdotto fra il sistema di conteggio e quello di numerazione.

Anche i prischi greci passaronsi di *talenti* e di *mine;* valori accolti da essi in età più tarda, ma ignoti ad Omero: il cui *τάλαντον* (che al pari della latina *libra*, egualmente vale *peso* e *bilancia*), altro non era, com' ebbi altrove a mostrare, che un semplice didramma, o *statere*, o sia, all' asiatica, un *siclo* (1). È notevole per altro che Israele al suo uscire d' Egitto computava a *talenti* di sicli 3000 (2); ma non sarebbe facile l' addurne qui ragione che appaghi. Quanto all' ebraica *mina*, non fa stato; parendo essa entrata in uso non prima della babilonese cattività, o almeno non innanzi l' assiro - caldaico predominio nell' Asia occidentale.

Come poi il sistema de' pesi faraonici non ha nominali unità multiple dell' *uten*, così non ne ha di summultiple del *kat*; e per frazioni ordinarie di questo, delle quali abbiamo già incontrato il $^1/_2$ ed il $^1/_9$, si esprimono i pesi inferiori al medesimo.

Qual fosse la effettiva serie de' minuti pesetti delle frazioni del *kat*, per le più dilicate bilancette e le pesature più minute, ci è ignoto. Lo Chabas arreca bensì un esempio d' altre fra-

---

(1) *Del Talento Omerico*, nelle *Commentationes philologae in honorem Teodori Mommseni scripserunt amici. Berolini* 1877 p. 282 - 290.

(2) *Exod.* XXV, 39; XXXVII, 24; XXXVIII, 24 - 29.

Digitized by Google

zioni $^2/_3 + {}^1/_6 + {}^1/_{30} + {}^1/_{45}$ ($= {}^8/_9$); ma è incerto se in questa polinomia frazione egiziana tutti que' termini rappresentino veri pesuzzi, o non piuttosto, (al pari de'nostri *diecigrammi, centigrammi, milligrammi*), solo servano al calcolo restando ignoti alle ordinarie bilancie.

L' uso del mosaico obolo, o *gerah*, (che s' interpreta *fava*), che troviamo fra gli ebrei appena esciti d' Egitto, è prova dell' antichissimo costume di valersi di lapilli, fave, carrube, spelte, lenticchie, ecc. per l' esigue divisioni de' pesi. Spedienti, forse arbitrarii e popolari in origine, ma riconosciuti poi ed accolti anche dalle leggi in progresso: siccome utilissimi alla divisione materiale, e alla semplice e spiccia espressione delle relative frazioni. Ma è oscuro del tutto se nulla di simile avesse preso a usarsi in Egitto: e forse dell' egizio *kat* potea ripetersi ciò che della *dimidia sextula* e dello *scriptulum* latini scrivea Volusio Meciano: *Has quoque partes in quantumvis dividere possis; verum infra eas neque notas neque propria vocabula invenies* (1).

Un piccolissimo pesetto d' oro, avente proprio nome di *pak*, avremo a vederlo più innanzi; ma non è frazione del *kat*, sì bene dell' *uten*; del quale è il $^1/_{128}$. È creduto etiopico, perchè trovato insieme coll' *uten* in un monumento d' Etiopia: ma potrebb'essere null' altro che l' aureo obolo egizio.

Anche due altre spendibili unità, d' oro e d' argento, troveremo in egizii registri di prezzi; unità, che hanno il proprio loro nome, non saputo per altro dicifrare finora: come non s' è potuto determinarne il peso. Se le indagini nostre, onde ci occuperemo più innanzi, potranno accostarsi al vero, neppur quei pesi sarebbero frazioni del *kat*.

5. Premesse omai queste esposizioni di fatto che fanno strada al nostro discorso, or ne giova apprestarci a investigazioni più intime; e cercar via di risalire alle teoriche origini dell' *uten*.

---

(1) *Distributio assis* in Gronov. *De sestertiis* p. 291.

Digitized by Google

Trattandosi della più antica fra le unità ponderali conosciute, le cui origini saranno a ricercarsi probabilmente nella più lontana notte dei tempi, sarà prudente non dipartirci da' più semplici e primitivi metodi immaginabili. Quindi la opportunità di rivolgere uno sguardo retrospettivo alla verisimile genesi dei pesi.

All' illustre Mommsen venne detto, così per incidenza e di passaggio, (non già, penso io, di proposito considerato), dovere originare la romana *libra* dal peso che l' uomo col braccio steso può comodamente *librare* (1); e il Brandis, accogliendo quel concetto, lo estende a universale fondamento primitivo de' pesi. Anzi gli stessi due piatti della bilancia li crede imitati dalle due mani dell' uomo, nell' atto di bilanciare due oggetti per farne confronto del peso (2).

Se quest' anatomica genesi della prima misura de' pesi fosse veramente fondata, cadrebbe di per se tutto ciò che stiam per dire dell'*uten* egizio; anzi tutto ciò che l'*uten* medesimo, co'suoi evidenti e accuratissimi rapporti, sta per apprenderci. Ma se il braccio umano fu acconcio tipo delle unità lineari, mancava di attezza a potere direttamente fornire quelle di peso. Le quali benchè derivino pur esse da una stessa ed unica fonte metrica, (il braccio, o sia il cubito), non potean però immediatamente discenderne, ma sol mediante altre misure derivatene, di un ordine superiore.

Il supposto sistema de' libramenti brachiali non ha mestieri di confutazione. Le distese braccia dell' uomo, indipendenti fra loro e mosse da distinti fasci di muscoli elevatori, d' ineguale potenza tranne che negli ambidestri, nulla hanno di comune coll' unico e rigido e sensibilissimo giogo della bilancia. E la forza muscolare è troppo varia ne' singoli individui, a seconda dell' età, della complessione, dell' esercizio, del sesso, perchè quel tanto di peso che la mano dell' uomo libri e palleggi possa assumersi

---

(1) *Histoire romaine*: vers. di C. A. Alexandre, 1863, p 275.
(2) *Das Münz - Mass* ec. p. 3, 4.

Digitized by Google

quale comune e invariabile unità di ponderale misura. Oltrechè poi nè la *libra* latina arriva al molto maggior peso che un ordinario uomo può *librare;* nè alcuna delle altre cognite unità, *dramme, sicli, mine, talenti,* han punto quella supposta rispondenza colle forze muscolari del braccio.

Una cosa però è verissima nel sistema de' due preclari scrittori, e piacemi di metterla in vista: l'avere entrambi troppo bene compreso, che la vera origine de' pesi non ha a ripetersi da convenzione ed arbitrio, ma sì a cercarsi in un invariabile tipo fondato sulla natura.

E questo indispensabile ed invariabile tipo naturale era fornito dalle unità cubiche; e da esse doveano originare, ed originarono i pesi.

Benchè non manchi chi non ponga fede alla provenienza de' pesi da cubiche misure (1), o chi per contrario, pure ammettendola, non la stimi possibile frutto che d' una civiltà molto progredita e provetta (2); non è per questo men certa quella derivazione e la primordiale ed elementarissima semplicità sua.

In quel semplice vocabolo di *cubito* compendiasi tutta una storia: la storia dell' umano processo nella invenzione e ordinata derivazione vicendevole delle varie unità di misura. Il punto di partenza dell' uomo in questa ricerca fu il proprio *braccio;* e poichè prese le mosse da questo, non potea restar dubbio il come e il dove egli dovesse approdare.

Chi pel primo applicò il proprio *braccio* a misurare una lunghezza qualunque, (pognamo le pelli della sua tenda, o i tronchi della sua capanna), bene avrebbe potuto valersi in pari guisa d' un bastone d' arbitraria misura. Ma farsi poi di quel *bastone* uno stabile tipo e gelosamente serbarlo a tal uopo; e più poi persuaderne l'uso ad altrui, e renderlo universalmente e costantemente adot-

---

(1) Chabas, *Revue arch,* 1861, T. III, p. 17.
(2) Cf. Queipo, *Essai* ec. T. I, p. 250.

Digitized by Google

tato; era poco immaginabile, e peggio eseguibile, còmpito allora. Quanto al *braccio* invece, al primo uso accidentale potea all' opportunità seguirne un secondo, indi un terzo; naturalmente imitato, per la comodità sua, anche da altri. Tutte le utili ed essenziali qualità, (indarno desiderate in quel bastone, quale proponibile modulo lineare), erano invece dalla natura cumulate nel braccio: pronto, maneggevole, costante, comune, immanchevole. E a quale in fatti dei due desse l' uomo la preferenza, al bastone od al braccio, il dice aperto quell' antichissimo vocabolo di *cubito*.

Chi però se ne valea pel primo, imitato poi da tutte le generazioni seguenti, non potea al certo, innanzi la invenzione e l' esistenza delle misure, avere prevista tutta la futura importanza industriale, commerciale e sociale di esse. Non poteva egli, precorrendo a' semplici ed elementari concetti del tempo suo, voler imporre la misura del suo braccio, e molto meno del suo baculo, a universale fondamento di tutto un sistema avvenire. Quell' uomo non serviva che alla propria necessità del momento; valendosi, inconscio discepolo della natura, dell' ovvio strumento ond' era stato fornito da essa. Poichè in questa bisogna delle misure, la cui necessità si fa sentire fin dai primi gradi della scala sociale, è mestieri di un ovvio ed indefettibile tipo, a cui poter sempre ricorrere: irreperibile tra le caduche opere dell' uomo. E la provvida natura non avea mancato di sopperirvi, in modo proporzionato alla capacità ed al bisogno. Il braccio umano potea bastare: e in fatti bastò.

L' altre immutabili e più perfette unità fisiche, scoperte dalla scienza moderna, come gli archi o diametri terrestri od astronomici, o le costanti lunghezze del pendolo sotto latitudini determinate, erano troppo inacessibili all' uomo d' allora. E se anche, come taluno credette o sognò, avess' egli potuto levarsi a tanta altezza scientifica e di là trarne un metrico sistema, l' opera sua, necessariamente preceduta da un altro più elementare modo di misure, non sarebbe stata che una riforma, non

Digitized by Google

mai la prima invenzione, di esse. Ed è sol di questa, che qui intendiamo parlare.

Solo una cosa mancava al naturale modulo adottato: sopprimere le individuali variazioni del cubito *virile*, sostituendovi una media *meccanica* invariabile. E questo ab antichissimo fu fatto. Il cubito che regolò la costruzione delle piramidi non solo era ridotto a meccanico tipo costante, ma dalla misura sua naturale o virile già era passato a una più ampia, accresciuta per riforma di re. Se non che le piramidi, per quanto sieno i più vetusti monumenti superstiti, appartengono a un troppo avanzato periodo d' arte, di sapere e di sociale coltura e potenza; e possono dirsi moderne rispetto a' molto più remoti periodi fra cui si perdono gl' incunaboli dell' arte e della società; ai quali questa primitiva adozione e determinazione del cubito dee senza fallo arretrarsi.

Provveduto poi al capitale bisogno dell' unità lineare, era agevole il passo a quelle di superficie. Il cubito, o un qualunque suo multiplo come la *canna*, ne fornivano i necessari elementi, rannodandole anch' esse alla tipica unità naturale (1).

E dovean seguire dappresso le misure di capacità. Non appena l' arte fabbrile avrà appreso a spianare e raccozzare quattro tavole, era ovvio il concetto di tagliarle cubitali ed a squadra e insieme commetterle, a modo del latino *quadrantal*; del quale cantava Prisciano: *Quatuor e quadris medium cingatar inane* (2).

---

(1) Certe altre volgari ed elementari unità, come, nelle superficiali, il *jugero*, (*Quanto ponno* in un giorno *arar due tori.*) (Monti Odiss. VII, 150), o la *giornata di cammino*, nelle itinerarie, non son che modi succedanei e di semplice approssimazione: poichè con un naturale elemento costante e bene determinabile, il tempo, ne combinano due variabili ed indeterminabili: la ineguale forza viva impiegata, e le impari condizioni topografiche in cui essa si esercita.

(2) *De ponderibus et mens.* v. 59.

Digitized by Google

Così era trovata l' unità cubica, o del terz' ordine: nuovo ramo di misura rampollato dal medesimo ceppo (1).

E ormai non era che un passo alla scoperta e adozione anche di un sistema di pesi.

V' hanno sostanze, poniamo caso, lane e metalli, cui niuna delle premesse maniere di misure s' attaglia. Si sarà cercato di supplire ad occhio; poichè anche il semplice intuito estimativo può avere una qualche pratica sufficienza: anzi può talora acquistare dall' esercizio una squisitezza mirabile. E si troveranno occhi sì esercitati da saper stimare per segno sia i carati di un diamante, sia la quantità di frumento d' un monte di grano. Ma questi non son che modi di discrezione e proprii di pochi; mentre il bisogno era invece di una semplice ed esatta maniera appropriabile a tutti.

La varietà di peso ne' corpi non potea essere sfuggita alla osservazione; e avrebbe potuto servire a valutarli: ma rimanea sterile elemento per mancanza di un acconcio mezzo di misurazione. Palleggiarsi nelle mani due oggetti e librarli per farne confronto, non potea che grossamente manifestare una relazione di peso: e importava invece determinare esattamente il peso assoluto. Impossibile còmpito fin che non si fosse trovata un' unità fissa e invariabile di peso e un acconcio strumento con cui ragguagliarle i ponderabili corpi.

Or la natura, immutabile bensì ne' pesi *specifici*, è instabilissima negli *assoluti*. Ma qui l' arte potea venire, anzi era già venuta, in sussidio. Da che fu determinata una misura di capacità, cento e cento unità di peso assoluto eran bell' e trovate:

---

(1) Le manesche e famigliari misure di capacità, *pugno, manciata, giomella,* son troppo insufficienti ed incerte: nè meglio valgono l' altre, ad occhio, p. e. del grano o del vino bastante a giornaliero o mensile vitto dell' uomo. Proprie misure di capacità non ne offre natura: benchè qualche naturale recipiente non manchi: gusci, corna, zucche, scogli di tartaruga, nicchi o *coclee,* onde la voce *cucchiaio* e la officinale misura della *cucchiaiata.*

Digitized by Google

quanti, cioè, erano i corpi diversi che poteano misurarsi con quella. Poichè essendo fisicamente fisso il lor peso specifico e meccanicamente determinato il volume, anche il peso *assoluto* rimaneva fissato.

Come poi ne' primi rudimenti delle arti non può intendersi l' animo a raffinamenti teorici, così non è supponibile che nella prima determinazione de' pesi siasi avuto a speculare sottilmente quale più atta materia si avesse a scegliere per tipo. Innanzi che si fosse potuto proporre il metrico problema della ricerca di una acconcia norma di peso, la soluzione avea ad essersi offerta da se, nelle ovvie misure che quotidianamente doveano aversi alla mano: quelle del grano, o del vino. E son questi di fatto i naturali tipi perpetuatisi fino a memoria storica. I pesi arabi fondavansi sul grano (1); i romani sul vino (2).

Abbandonare poi que' tipi primordiali per appigliarsi al peso dell' acqua, e tra le avvertite varietà di questa preferire, come più sicuro e più stabile, il peso della fluviale o piovana, ebbe a essere perfezionamento di età posteriore e di sperienza assai più matura. Poichè, sottilizzando ognor più nella materia de' pesi, dopo conosciuta la troppo instabile gravità delle biade, (le prime forse ad essere abbandonate in questa delicata bisogna), si fu resi accorti di varietà eziandio tra i vini: *Quae campi aut colles, nuperve aut ante tulere* (3); e, preferita indi l' acqua, s' imparò a distinguere diversità di pesi anche in questa:

> *Namque nec errantes undis labentibus amnes,*
> *Nec mersi puteis latices, aut fonte perenni*
> *Manantes, par pondus habent...* (4).

---

(1) Queipo, *Essai*, ec. T. I. p. 360.
(2) Festus, *De verb. signif.* V. PUBLICA PONDERA. *Quadrantal.*
(3) Priscianus, *De pond. et mens.* v. 100.
(4) *Id. ib.* v. 97 seg.

Digitized by Google

Fin che la moderna scienza ebbe da ultimo appreso a valersi d'acqua distillata, ridotta alla sua densità maggiore, (cioè a dire alla temperatura di + 4° centigr.), e pesata nel vuoto.

6. Avuta poi la necessaria unità di peso era mestieri dell'acconcio strumento da paragonarla coi singoli corpi. E qui un chiaro scrittore, prendendo pur esso a studiare questa prima genesi de' pesi, esce nelle seguenti considerazioni, che parmi bene di testualmente riferire.

« Dans tous les systèmes métrologiques, les poids offrent une difficulté particulière. Ils sont en rapport avec les mesures du troisième degré, mais la discussion ne s'occupe plus du volume seul, elle aborde une propriété inhérente à tous les corps et différente pour chacun d'eux: la densité de la matière. De plus, l'appréciation de la pesanteur relative des différents objets n'est plus une question de calcul ou de mesurage pur et simple, elle exige des instruments d'une complication autrement grande que celle qui suffit pour l'évaluation des lignes, surfaces et corps.

« Pour arriver à comparer entre eux les poids des divers corps, il a fallu d'abord se rendre compte de l'existence même d'une pesanteur différente, ce qui ne'est pas aussi simple que cela nous pourrait paraître aujourd'hui. Puis il a fallu appliquer les notions de la mécanique naissante à l'invention d'un moyen pour comparer la pesanteur relative des corps, sans même parvenir à deviner le principe mystérieux de l'attraction. Il a fallu longtemps pour qu'un homme de génie inventât la balance, et pourtant cet instrument a dû exister avant l'invention des systèmes stathmétiques... (1). »

Questa sì lucida esposizione delle pristine condizioni e difficoltà della cosa mi dispensa dal perdervi altre mie parole. Non avrà mancato però di dar nell'occhio al lettore che la quistione par dare in un labirinto, senza via da uscirne: la bilancia

---

(1) Oppert, *L'Étalon* ec. p. 69.

Digitized by Google

bisognò immaginarla per servire al sistema dei pesi; e il sistema dei pesi non potè esistere senza bilancia. La petizione di principio non è però che apparente: colpa della troppo grande distanza del punto di vista d'onde noi affisiamo quelle rimotissime origini.

In tempi d'arte e di civiltà progredita, (se fino allora avesse potuto mancare un sistema di pesi), non sarebbe difficile immaginare che un uomo d'ingegno, fatto accorto della varia gravità de' corpi e del metrologico partito derivabile dal confronto di essi, escogitasse un meccanico ordigno da bilanciarli; fissando ad arbitrio una conveniente unità da poter servire di norma. E come tanti altri meccanici ingegni onde s'è arrichita la fisica, quella bilancia, insieme col peso associatole, avrebbe potuto fare il giro del mondo. Ma sui primi esordii della vita sociale e dell'arte vuolsi lasciar la mano, anzi che a sottili trovati e divinamenti teorici, a' più semplici e pratici insegnamenti dell'uso.

Mentre l'uomo nella misura, poniamo, del grano e nelle frazioni di essa trovavasi in possesso, quasi senza avvedersene, d'un compito e graduato sistema di pesi; pesi noti ad ognuno, e verificabili e riconoscibili da tutti; connessi per soprappiù e coordinati col generale sistema di tutte l'altre misure; gli è inutile fantasticare studiose investigazioni *a priori*, e arbitrarie determinazioni d'una fondamentale unità primitiva di peso: quasi avesse potuto davvero fissarsi ad arbitrio quella unità e scegliere a ciò il primo ciottolo in cui s'inciampasse tra via. L'uomo non ebbe mestieri d'immaginarlo e crearselo un sistema di pesi: gli bastò servirsi di quello ch'erasegli offerto da se.

Quanto allo strumento poi da far paragone dei pesi le difficoltà non ebbero a esser maggiori. Sarei di credere, che già fosse trovato prima ancora d'avere avuto a cercarlo. Mi spiego.

Fra i varii modi di trasportar pesi antichissimo e semplicissimo fu quello di portarli a braccia, o a spalla d'uomo. Fu bensì immaginata eziandio la *trazione*: e si apprese a togliere attrito allo strascico sottoponendo cilindrici tronchi; rappresentati ne' monumenti sotto i grandi monoliti d'Egitto e d'Assiria, messi in moto

Digitized by Google

da lunghe schiere di uomini: e questi mobili rulli dovettero poi suggerire il concetto di curri fissi, indi di ruote. Ma più si risale in antico, più dovettero mancare, anche per difetto di vie, i veicoli a ruote; e le umane spalle scusavan carri e carriuole. Settantamila portatori, *qui humeris onera portarent*, avea mandati Salomone, per servigio del Tempio, alle foreste del Libano ed alle cave dei marmi (1).

A meglio poi reggere i pesi e utilizzare le forze, i portatori s'avvalevan di stanghe. A trasportare una trave, poniamo, i dipinti egizii ci mostreranno una lunga pertica posare sulle spalle d'una fila d'uomini e da essa pendere le funi che sostentan la trave a poca altezza da terra (2). A trasporto invece di frumento in ispighe sarà una grande cesta, a rete, sospesa a una stanga alle cui estremità due uomini sottopongono le spalle (3). E si vedranno portantine a due stanghe e quattro uomini (4); e la sacra *Bari*, o barca, di Chnuphis posata su quattro lunghissime aste paralelle, portata in processione a spalle di 24 uomini, a quattro a quattro (5).

Al pari dei pesi portati a forze riunite anche l'unico portatore si suol vederlo valersi d'un suo, retto od arcuato, bastone; ogni qual volta il suo carico possa comodamente spartirsi e sospendersi, davanti e da tergo, ai due capi di esso. E su' monumenti figurati se n'ha esempi infiniti. Qui sarà un cacciatore che porta le provvigioni per la caccia: a un'estremità del bastone il sacco dei viveri, all'altra l'otre della bevanda (6); là il pescatore colle sporte del pesce pendenti dal suo bastone (7); altrove

---

(1) II *Paralip.* III, 18.
(2) Rosellini, *Mon. dell' Eg. Mon. Civili* Tav. XLVII, n. 5.
(3) *Id. ib.* Tav. XXXIII, n. 2.
(4) *Id. ib.* Tav. XCIII, n. 2.
(5) *Id. ib. Mon. del culto* Tav. LV, Cf. Tav. LXXXII.
(6) *Id. Mon. civili* Tav. XVI. n. 2.
(7) *Id. ib.* Tav. XXIV, n. 2.

Digitized by Google

le ceste dell' uve o altre frutta, colte allora dalla pianta (1); o le pendule stie del venditore di minuto bestiame (2); o i sospesi orci onde l' ortolano inaffia le aiuole (3); o i concavi o piani, vassoi su cui il figulo ammonticchia suoi vasi (4), o il fornaciaio i proprii mattoni (5).

Ed è poi maniera che risale a rimotissima età. Se ne troverà esempio nello speco d' Ibsambul nel grande quadro d' una campagna di Ramses III (6); e gl' israeliti, (oppressi da' precedenti faraoni *operibus duris luti et lateris*) (7), si vedranno all' opera, ritratti al vivo negli egizii dipinti, portando in quel modo, a bilancia, i lor pesanti mattoni (8). Persino premonetali cerchi d' oro, inanellati insieme, si vedranno portati in mostra, nell' etiopico trionfo di Ramses, a spalla d' uomo: pendenti in lunghe catene da orizzontali stanghe, dinanzi ed a tergo (9). E benchè quei tempi, pur sì lontani, a petto de' primitivi sieno moderni, è tuttavia soprammodo probabile che quel sì elementare modo di trasporto possa risalire a' più rimoti periodi della umanità. Poichè è modo sì ovvio che il troviamo in tutti i tempi, e per tutto: da' rustici nostri portatori d' acqua o di latte, a quelli della Cina. Ne' cui dipinti, come in quelli d' Egitto, si vede essere comunissimo quel portare a bilancia; egualmente valendosi poi e cinesi ed egizii, a migliore comodità del trasporto, di cestelle,

---

(1) Wilkinson, *A popular account of the ancient egyptians*. London 1874. T. I, p. 41. Rosellini, *Mon. civ.* Tav. XXXIX, n. 3.

(2) Wilkinson, *Op, c.* T. I, p. 215, 216, 219. Rosellini, *L. c.* T. LXXXII, n. 10.

(3) Wilkinson, *Op. c.* T. I, p. 35. Rosellini, L. *c.* Tav. XL, n. 1.

(4) Wilkinson, *Op. c.* T. II, p. 109.

(5) Rosellini, *Mon. civ.* T. XLIX, n. 1.

(6) *Id. Mon. reali* Tav. XCIX.

(7) *Exod.* I, 14.

(8) Rosellini, *Mon. civ.* T. XLIX n. 1.

(9) *Id. Mon. reali* Tav. LXXI, LXXII.

Digitized by Google

tavolette, sportole, vassoi, pendenti per funicelle, simmetriche, a guisa de' bacini d' una bilancia, dai due capi dell' asta (1).

La semplicissima arte poi di ben valersi dell' elementare strumento tutta era nel sapere spartire il carico e bilicarlo in sulla spalla: disponendo eguali pesi ne' due bacini. Tal che il meccanico principio dell' equilibrio di due eguali corpi pendenti alle due estremità d' un bastone sostenuto da un fulcro al suo mezzo, dovea essere fra le più antiche e volgari nozioni. Or quel bastone, sia sostenuto o sospeso, è la bilancia.

Come poi *facile est inventis addere* presto dovette essere perfezionata la bilancia, quale la troviamo sui monumenti egizii: appesi, cioè, al fondamentale giogo, o bastone, i due simmetrici gusci; sostituito un girevole pernio all' ansa o cappio d' appensione; applicato un saldo fulcro o piede verticale alle stabili bilancie maggiori; aggiunto un indice con piombino per avvistare la dirittura orizzontale del giogo (2).

Chi potesse dubitare delle piane e semplici origini della bilancia non ha che a vederla in atto ne' suoi rudimenti sulle

---

(1) Ferrario, *Il costume antico e moderno*, ec. *Asia* T. I Tav. 18, 19, 42.

(2) Di questo primitivo ordigno livellatore, ch'era un verticale indice, o linguetta incastrata sottesso il giogo, e la cui giusta postura segnavasi dal filo d' un prossimo piombino, pare non si fosse formato un giusto concetto il Rosellini. Il quale descrivendo una bilancia, disegnata in una delle tombe di El-Asassif presso Tebe, scambia il perpendicolo per una funicella da tirare in alto e sospendere la bilancia, ed equilibrarla (*Mon. civili*, Tom. II, p. 285). E altro abbaglio è stato preso dal Pleyte, supponendo fissato il piombino alla punta dell' indice (*Études égyptologiques* p. 137); mentr' è l' indipendeuza loro che serve a verificare l' equilibrio.

Quanto a figure di bilancie egizie Cf. Champollion-Figeac, *L' Egitto antico* vers. ital. Venezia 1840, Tav. 20. Rosellini, *Mon. civ.* Tav. LI n. 1, 3; Tav. LII, n. 1, 2; T. CX n. 1; Tav. CXXXV. Lepsius, *Denkmaeler, Abtheil.* III, Taf. 39, *a. d;* Taf. 10; Taf. 122, *g. Die Metalle* ec. Taf. I, n. 19, 22; Taf. II, n. 18. Pleyte, *Étud. égypt.* Leide 1866, Taf. VIII. Wilkinson, *Popular account*, ecc. T. II, p. 149. Madden, *Hist. of. jew. coin.* p. 4.

Digitized by Google

egizie rappresentazioni riprodotte dalle Tavole del Rosellini (1). Un nudo bastone orizzontale, munito d' una rozza ansa al suo mezzo, per la quale è sospeso a un piuolo, vedesi, per esempio, in una scena egizia servir di bilancia; benchè non abbia bacini di sorta. Due cestelle, i cui manichi stan cavalcioni alle due estremità del bastone, contengono l' una i pesi, l' altra gli oggetti che un uomo sta attentamente pesando. Più elementare bilancia non può immaginarsi; è il pretto bastone del portatore: sol che della spalla tien luogo il piuolo.

E quasi a ribadire l'identità del concetto e la parità dell' ufficio di quel bastone da someggiare e della bilancia, pare essere ritratto quello in luogo di questa in un grande bassorilievo della tomba di Ramses VI; nel modo che or va a descriversi. Nelle mistiche rappresentazioni dell' egizia *psicostasi,* o *metensomatosi*, sogliono figurarsi le anime de' trapassati salire al cospetto d' Osiride, giudice dell' Amenti; e, secondo il favorevole o contrario giudicio, volare tra gli spiriti puri, o cacciarsi in animaleschi corpi a ricominciare il giro fatale delle migrazioni. I meriti o demeriti loro si pesano nella bilancia: collocata sempre per ciò dinanzi al nume. Ora nel bassorilievo anzidetto, quasi a dar vita e sentimento a quell' istrumento ponderatore, è rappresentata, invece dell' usuale sua forma meccanica, una immobile e viva figura virile stante, sul cui omero si libra il giogo d'una bilancia co' suoi penduli bacini (2). La immobile figura che così tien luogo di fusto, o di fulcro, (e insieme di trutina, giudicando per senso proprio qual de' due gusci inclini e trabocchi), non rappresenta in sostanza che uno de' volgari portatori sopra descritti. E meglio d'ogni più elaborata dimostrazione serve a ravvicinare, anzi identificare, nel concetto degli antichi quel prisco

---

(1) Rosellini, *Mon. civ.* Tav. LII, n. 2.
(2) *Id. Mon. del culto* T. LXVI.

Digitized by Google

modo di portare a bilico col fondamentale uso ed ufficio della bilancia (1).

Così dovea naturalmente accadere che chi, in que' primissimi tempi, innanzi l' uso de' pesi, avesse per sorte portato a spalla da un capo del bastone una misura p. e. di grano, equilibrandovi dall' altro capo alcun che di non ancora misurabile allora, (come una quantità di pesci, di carni, di lane), non dovesse tardare ad accorgersi che quel confronto e pareggio delle gravità rispettive era già una misura. E bastava sol dividere e ridividere la misura del grano per avere la gradazione de' pesi. Fu facile allora alla mobile spalla dell' uomo sostituire uno stabile e centrale appiccagnolo, o appoggio: e bilancia e pesi furono tutt'insieme trovati.

7. Benchè pertanto, senza niuno sforzo d'ingegno, abbia potuto l' uomo trovarsi in possesso d'una unità tipica di peso e del necessario strumento da paragonarla a' ponderabili oggetti diversi, » la grande tache cependant, (continua l' Oppert), ne faisait que commencer par l' invention des poids. Il est facile de diviser des lignes en un nombre donné de parties égales. La division des surfaces et des corps exige déja des connaissances mathématiques

---

(1) Questo elementare concetto della bilancia, ch' è un bastoncello sospeso e bilicato al suo mezzo, dura ancora nelle portatili bilancette cinesi: che son verghettine d' ebano, o avorio sospese e librate per un filo di seta (Savary, *Dictionn. univ. de commerce*, v. *Balance*).

Ma ben più antichi esempi della lignea asticciuola ci han procurato i recenti scavi di Micene, dove ha disotterrate lo Schliemann in vetusti sepolcri argoilci auree bilancette preziose, pari alle nostre degli orafi (*Bericht über meine Forschungen und Entdeckungen in Mykene und Tiryns*. Leipzig 1878, p. 228.); e ricordan quelle poste in mano a Giove da Omero, per librare le sorti delle battaglie (*Il.* VIII, 69; XXII, 209). Son d' oro i gusci, ornati a sbalzo, e pendenti non da flessibili fila ma da auree striscioline; che li farebbero supporre d' uso, non ordinario, ma sepolcrale e simbolico: forse allusivo al mito della psicostasi. Che lignei poi fossero i gioghi, sebbene rivestiti d' aurea lamina, il mostra l' essersi strutti; restandone solo, pesto e gualcito, il metallico rivestimento esteriore. Era del resto nota arte a que' dì rivestire lavorati legnami di lamina d'oro (*Exod.* XXVI, 26, 29; XXXVII, 1, 4, 25, 26. ec.).

Digitized by Google

plus considérables. Tout cela n' approche pas de loin de la difficulté qu' a dû offrir aux inventeurs des poids la subdivision en parties équivalentes d' un poids quelconque. On avait ici à lutter contre les obstacles matériels opposés par les corps mêmes, et contre les difficultés que présentait la division mathématique des volumes qui devaient rendre les poids arithmétiquement divisés.

» Une grande obscurité enveloppe une question très-importante au point de vue mathématique. Quel est le rapport qui lie les mesures linéaires aux mesures pondérales?

» Quand même nous aurons trouvé théoriquement l'équivalence d' un poids donné avec un volume cubique développé de l' étalon des mesures linéaires, la question est de savoir quelle est la matière formant ce volume. Puis, peut-on admettre une rigueur d' exécution necéssaire pour éviter des écarts considérables quand il s' agit d' établir des cubes d' un côté calculé à la $^1/_{10000}$ partie d' un métre? (1) »

Mi è piaciuto di lasciare in questo argomento la parola al chiaro archeologo perchè meglio comprendasi l' importanza della quistione; e le difficoltà ch' essa presenta sieno esposte in tutto il loro lume per bocca d' un giudice competente e convinto. Ciò mi servirà di scusa se non so dispensarmi dall' uscire ancora in altre parole; non per puerile vaghezza d' esordire *ab ovo* e divagare in oziose ricerche, ma per non lasciare seminato d' insoluti dubbi il nostro cammino. In questa indagine della genesi d' uno de' primissimi e più originali sistemi ci è d' uopo andare alle ultime radici ; e non arrestarci alle sole difficoltà che la investigazione offra veramente per se, ma a quelle ancora che a' più esimii cultori della scienza abbia sembrato offerire.

La suddivisione d' una ponderale unità cubica lungi dal presentare malagevolezza di sorta, è il più naturale dei cómpiti; due

---

(1) *L' Etalon* ec. p. 70.

Digitized by Google

mezzi offerendosi egualmente semplici e spontanei, e che si fan riprova a vicenda: la spartizione meccanica del cubo recipiente, e la ponderale della materia in esso contenuta.

Spartire un cubo in 2, p. e., in 4, in 8 porzioni, o sia costruire un solido che sia il mezzo, il quarto, l'ottavo del primo, non è assunto che importi alte cognizioni geometriche e levisi sopra la più elementare meccanica. Similmente dividere il grano, ad esempio, contenuto in quel cubo, egualmente spartendolo sui due bacini d'una bilancia, e via via ridividerlo e suddividerlo ancora con altre spartizioni successive, non è chi non sappia immaginarlo e speditamente recarlo ad effetto. Anzi è acconcissima e spiccia maniera quest' ultima per qualsivoglia divisione più minuta. Il perchè la malagevolezza della costruzione di minimi cubi, opposta dall'Oppert, non fa stato ; potendo supplirvisi per sì facile guisa.

Ripetiamo adunque che tutto fu ovvio, tutto elementare nella invenzione dei pesi: il ritrovamento dell' unità ponderale, della bilancia, del divisivo sistema.

Per recare un classico e storico esempio della geometrica decomposizione de' cubi fondamentali, chi non vede nel romano *congio*, ottava parte dell' *anfora*, o *quadrantal*, il prodotto della binaria divisione di quest' ultimo, sia eseguita meccanicamente, sia per mezzo della bilancia? Il *congio* è il cubo del *semipes*, come il *quadrantal* lo è del *pes*: poichè ogni cubo si scompone in otto cubi minori di lato eguale alla metà del primo. E come il plebiscito Siliano bandiva *uti quadrantal vini octoginta pondo siet* (1), il congio rispondeva nell' ordine de' pesi al *decempondio*.

Questa istorica certezza della intenzionale e legale rispondenza tra le misure cubiche e i pesi nel sistema di Roma rifonde luce non poca sopra quanto siam venuti finora esponendo. Non essendosi in

---

(1) Festus, *De signif. verb. v.* PUBBLICA PONDERA.

Digitized by Google

fatto d'arti levati mai i romani al di sopra della condizione di discepoli altrui, è mestieri supporre che l'intimo accordo del loro metrico sistema sia d'imitazione straniera: conforme, cioè, alla pratica degli altri popoli e agli insegnamenti della sapiente antichità. Il perchè questo certo esempio degl'intimi rapporti del metrico sistema di Roma, (consono del tutto alle teoriche previsioni nostre, alla sentenza de' migliori metrologi e alle effettive rispondenze che offrono gli altri sistemi più celebri), può aversi quale ultimo e autorevole suggello in questo lungo nostro discorrere.

8. Esplorato in tal modo per ogni parte il terreno, or ci è sgombra e manifesta la dritta via per cui risalire alle verisimili origini del ponderale sistema d'Egitto. E se le premesse investigazioni nostre non hanno troppo malamente aberrato dal segno e punto è di vero nelle conclusioni derivatene, dovrebbe il sistema faraonico, siccome più antico e più vicino alla fonte, offerircene più piena e splendida conferma.

Se non che due preamboli dubbi si affacciano al primo por piede su questo terreno. Delle due egizie unità lineari, il *piccolo* cubito e il *reale*, quale avrà verisimilmente servito di base al sistema dei pesi? E determinata pure quella scelta, quale arido, quale liquido od altra sostanza potrà ragionevolmente supporsi aver servito a derivare dall'unità cubica quella di peso?

Quanto al primo dubbio vuolsi richiamare alla memoria ciò che fu osservato a suo luogo intorno la cronologica precedenza del *piccolo* cubito a fronte del *reale*, che ne fu solo un legale incremento (1); e qui può aggiugnersi che l'anteriorità del primo dovette essere maggiore d'assai. Ben prima che l'Egitto si fosse levato a potenza e costituito in reame, e a qualcuno degli antichissimi suoi despoti fosse venuto il talento di rinforzare la misura lineare, (che da ciò dovette averne il distintivo aggiunto di *regia*), un sistema di pesi dovea già essere in uso fra

(1) Pag. 91 - 92.

Digitized by Google

quel popolo migrato sul Nilo: sistema naturalmente desunto dall' altro cubito, naturale o volgare.

Quanto all'altra incertezza intorno la immaginabile materia, il cui volume cubico fu assunto per unità di peso, non ci sarà difficile apporci.

E innanzi tutto vuolsi escludere, in una società progredita, la misura del grano; la cui troppa varietà di peso specifico, secondo specie, terre, annate e paesi (1), non potè a lungo essere sfuggita: di guisa che, qualunque fosse il partito che sulle prime si fosse potuto trarre da esso, non dovette tardarsi a sentire il bisogno d' una migliore e meno instabile base. Che nell' antico Egitto poi si sapesse distinguere tra frumento e frumento ne son prova i registri di spesa del tempio di Medinet-Habu; dove tra le annuali provviste si tiene distinto il grano del *nord* da quello del *sud*, più parcamente usato, probabilmente perchè migliore e più caro (2). Anche Plinio concorda: *Thebaicum libras adiicit*; sopra l' alessandrino, per ogni moggio (3).

La sperienza dovette in breve far conoscere quanto, in questa bisogna della determinazione dei pesi, agli aridi sien preferibili i liquidi: fosse poi la misura del vino, o la eguale dell' acqua, non monta. Poichè sebbene questa ecceda d'alcun minimo che (4), negli usi ordinarii non si ponea in antico differenza osservabile tra la gravità dell' una e dell' altro. Così nelle antichissime dosi del sacro laboratorio del tempio d' Edfu a una stessa misura sia

---

(1) Plinio, *N. H.* XVIII, 12.

(2) Chabas, *Recherches sur les poids* ec. p. 42.

(3) *N. H.* XVIII, 12.

(4) Ecco le differenze di peso specifico trovate dalle sperienze moderne tra l' acqua distillata e alcune specie più note di vini

Acqua	1,0000
Vino di Porto	0,9970
» di Bordeaux	0,9940
» del Reno	0,9925
» di Borgogna	0,9915

Digitized by Google

d'acqua, o di vino, è attribuito il medesimo peso (1). Che è la stessa equiponderanza supposta anche da' latini metrologi, *Seu puros pendas latices, seu dona Lyaei* (2).

Siccome però un più attento studio aveva anche agli antichi insegnato a sottilizzare in fatto di pesi specifici; sì che aveano appreso ad assegnare le minime differenze di gravità fra le varie sorta d' acque e di vini, (al quale scopo ebbero anch' essi i loro areometri) (3); non andremo verisimilmente errati attribuendo cognizioni simiglianti, acquisite se non per via d'areometri almen di bilancia, agli antichi egiziani, che in fatto d' arti chimiche e di fisiche osservazioni di lunga mano precedettero gli altri popoli e furono a tutti maestri (4).

La ponderale invariabilità dell' acqua piovana, e di quella delle più limpide correnti di fiume, dovette ben presto farsi palese; nè potè negarsele la preferenza nella gelosa bisogna della determinazione dei pesi, da che si ebbe ad avere omai conosciuta la sociale e commerciale importanza della stabilità e scrupolosa esattezza di essi. E mentre i romani della repubblica, (che non stavan certo alla testa del mondiale progresso), eran tuttora al ponderale tipo del vino, gli assiro-caldei avean già per unità di peso l'acqua di fiume. Sopra di che è concorde il parere de' metrologi (5); confermato dalla rispondenza perfetta tra' calcoli indi desunti e i metrologici e numismatici monumenti che ce ne sono rimasti.

Il perchè non a torto potrà altrettanto supporsi ancor dell' Egitto. Colà, dove son come ignote le pioggie, l' acqua per

---

(1) Chabas, *Détermination métrique de deux mesures égyptiennes de capacité*, p. 7-8. *Dümichen, Recueil* ec. II, *Pl.* 82. *l.* 4; *Pl.* 83, *l.* 5, 8, 10; *Pl.* 95, *l.* 2.

(2) Priscianus, *De ponderib.* v. 93.

(3) *Id. ib.* v. 101 seg.

(4) Humboldt, *Cosmos* p. 356.

(5) Queipo, *Essai* ec. T. I, p. 32. Brandis, *Das Münz-Mass* ec. p. 37.

Digitized by Google

eccellenza è quella del Nilo: il fiume divinizzato, il quale avea sì alto predominio sulla immaginazione del popolo che ne abitava le rive e l' onorava come universale e indefettibile sorgente di ricchezza e di vita. Era l' acqua del Nilo che, misurata ne' nilometri, determinava le imposte; e probabilmente era dessa ancora che serviva di fondamento al sistema de' pesi.

Ed è in fatti fuor de' mesi delle escrescenze, in che intorbida, una purissima onda; che mantiene ancora tra i moderni l' antica fama d' esser forse la più schietta e più salubre del mondo: tanto che, vien detto, avervene avuto depositi a Costantinopoli per uso de' sultani. E di vero l' analisi dimostra poter essa nell' arti chimiche venire sostituita all' acqua distillata, non che alla piovana. Oltre di che sapean poi gli egizi, come lo Campollion racconta, vie più ancora chiarificarla ne' vasi, come praticano tuttora; e rinfrescarla all' ombra, arieggiandola e ventilandola eziandio con flabelli (1).

Esposte le nostre previsioni teoriche, or ci resta a sottoporle al cimento dei fatti.

Come s' era previsto dovere avvenire, il cubito *reale* assunto a fondamento di peso non fa buona prova. Il suo cubo d' acqua pesa $144^{ch},703$; quello di grano $113^{ch},592$; vale a dire 1592 *uten* il primo e 1203 il secondo: inverisimili entrambi per una libera e fondamentale divisione di pesi primitivi. Nè meglio quadra il supposto *piede reale*, creduto eguale a' $^2/_3$ del cubito. Il suo cubo d' acqua, pari a $42^{ch},875$, darebbe l' insignificante e inaccettabile numero di *uten* 471.

Se invece per lato dell' egizio cubo, o *quadrantal*, si assuma il *piccolo* cubito, naturale o volgare, di $0^m,450$, primitiva unità fondamentale d' Egitto, il risultato diffonde una subita luce. Quel cubo d' acqua, se fosse distillata e alla temperatura $+4°$, rappresenterebbe $91^{ch},125$; un giusto *migliaio* di *uten* di $91^{gr},125$:

---

(1) Champollion-Figeac, *L' Egitto* ec. Venezia 1840, p. 176.

Digitized by Google

vicinissimi a quello del campione Harris; e ancor più vicini se tengasi conto delle condizioni termometriche. Ed è appunto la grande unità di computo, il tondo *migliaio di uten*, o *miriade di kat*, ch'eracisi prima mostrata negli egizii sacchi dell'oro.

La temperatura del Nilo, troppo più elevata de'4 gradi sopra zero del termometro centigrado, dovea naturalmente far discendere *l'uten* al disotto dell'avvertito peso de' 91^{gr}, 125. Ne' computi del *quadrantal* assiro l'acqua de' fiumi di Mesopotamia è dal Queipo stimata della temperatura di + 15° centigradi (1); calore, la cui dilatazione, (e conseguente alleggerimento dell'acqua), egli pensa compensare all'incirca il po' d'aumento di peso attribuibile alle impurità dell'acqua piovana. Se non che egli ammette che la densità della medesima a' supposti gradi 15, non arriverebbe che a 0,999 16 (2): ch'è pure il peso del più leggero dei vini. Al Brandis invece, pel confronto delle tavole termometriche di Bagdad, paiono scarsi i 15 gradi centigradi supposti dal Queipo; che vengono quindi da lui portati a + 15° Reaumur, pari a + 18°, 75 centigradi (3). In mancanza di più dirette notizie sulla temperatura dell'acqua niliaca, attribuendo alla medesima il calore assegnato dal Brandis ai fiumi di Babilonia, il peso dell'egizio *quadrantal* scenderebbe a 90^{ch}, 9943, e quello dell'*uten* a 90^{gr}, 9943. E forse, per la più meridionale postura geografica del Nilo, potrebbe ancora elevarsi alcun che più la temperatura dell'acqua, ed abbassarsene il peso.

Or dunque fra i due valori dell'*uten*, risultati dal campione Harris e dalla cubatura del cubito, svarianti sol d'$^1/_7$ di gramma tra loro, (90^{gr}, 846 79 e 90^{gr}, 994 3), prendendo la media, di 90^{gr}, 920 545, potremo a buon diritto tenerla come fondamentale unità egizia di peso. Unità, la quale non potendo scostarsi che

---

(1) *Essai* ec. T. I, p. 322.
(2) *Essai* ec. T. II, p. 373, nota 24.
(3) *Das Münz-Mass.* ec. p. 36.

Digitized by Google

appena di qualche milligrammo dal vero, non varrà a produrre che un trascurabile divario di pochi grammi anche ne' massimi suoi multipli. Materiale e teorica esattezza, cui niuno de' tanti altri pesi antichi rimastici può neppur da lontano aspirare.

Questo teorico valore dell' *uten,* di 90^{gr}, 920545, nelle presupposte condizioni termometriche dell' acqua niliaca, corrisponde a centimetri cubici 91, 05113 , onde il migliaio di *uten* riesce di litri 91, 051 13. Or la radice cubica di quel cubo d' acqua è di 0^{m}, 449 88 : sì vicina al *piccolo* cubito egizio di 0^{m}, 450 da immedesimarsi del tutto con esso.

A questa stregua, e per mettersi in esatto rapporto col minor cubito e col sistema de' pesi, anche il cubito *reale* dovrebbe discendere dal suo teorico valore di 0^{m}, 525 a 0^{m}, 524 86: colla perdita sol d' un $1/7$ di millimetro. Ma poichè i fisici e meccanici elementi de' nostri calcoli, (acqua, cubiti e peso Harris), non possono essere fondamento bastevolmente sicuro per sì micrometriche determinazioni, non sarebbe giustificabile assunto voler sostituire, ne' due cubiti, i nuovi valori teorici emersi ai comunemente accettati : tanto più che questi, anche in quella lor tonda e sì comoda espressione decimale di millimetri 450 e 525, or vediamo esser riusciti per mirabil guisa vicinissimi al vero. Del resto variazioni sì minime, in tal fatta di calcoli, risolvonsi in mere identità.

Da tutto che risulta una splendida conferma della connessione strettissima che regna in tutto il sistema metrico d' Egitto ; e vicendevolmente si cresce fiducia alle determinazioni teoriche delle fondamentali unità lineari e di peso onde stiamo trattando.

Quanto poi all' antichità cui questo nostro *uten* di 90^{gr}, 92 possa arretrarsi non abbiamo occhio sì linceo da poterne discoprire le origini nelle profondità del passato. Esso collegasi col *piccolo* cubito naturale, di molto anteriore al *reale* usato già al tempo delle piramidi. Ciò basta a porre tra noi e la introduzione di quell' *uten* una distanza che non ci è dato di misurare. Se desso fosse stato una unità faraonica posteriore alla introduzione

Digitized by Google

del cubito *del re*, questo per fermo, e non il cubito *volgare*, sarebbesi assunto come fondamento della nuova misura di peso.

È dunque *l'uten* una unità di molto elementare e primitiva stampa; e poichè fin dagli esordii del viver sociale, anteriori assai alle monarchie e alle metriche riforme reali, il bisogno di un sistema di pesi dovette farsi sentire, forse non è incredibile che *l'uten* sia, insieme colla sua geometrica radice, il *mah* cioè il cubito, una delle primissime unità metrologiche ch' ebbe l'uomo a cercare ed apprendere dal magistero della natura.

9. E con questo carattere di vetustà estrema dell'*uten* confronta la *decimale* partizione del *quadrantal*, ond' esso deriva. Il sistema decimale, il più ovvio e primitivo di tutti, siccome postoci in sulle dita dalla stessa natura, è il solo verisimilmente presumibile in età ed istituzioni del tutto elementari. È vero che i vecchi campioni lineari rimastici appartengono al periodo duodenario; ma il duodecimale sistema, benchè immemorabile anch' esso, non è concepibile nell' originario ed elementare cubito e *quadrantal:* per la semplice ragione che non è sistema elementare.

Prescindendo da considerazioni e ragioni d' ordine superiore, alle quali non abbiamo in animo, nè ci sentiamo forze di levarci, tutto pare far credere di origine astronomica il sistema duodecimale. E sebbene nella notte dei tempi si perdano e nascondano gl' inizii di molti umani trovati, le cui origini paiono perciò confondersi insieme ed avere un punto di partenza comune, pure il lume del raziocinio può discernere fra il buio le necessarie precessioni cronologiche e scoprire il relativo ordine naturale delle cose.

Prima misura naturale del tempo fu la settimana e il mese, sì visibili nelle periodiche fasi ed eliache congiunzioni dell' astro notturno: *ostensio temporis et signum aevi*, secondo la biblica frase (1). Ma opera di ben più arduo studio e più paziente os-

(1) *Eccles.* XLIII, 6.

Digitized by Google

servazione fu il trovare un acconcio periodo di mesi che, riconducendo per ordine le varie stagioni, riportasse il sole a uno stesso punto del cielo. Quel periodo si credette d' averlo fissato in dodici mesi. Così la *dodecamenia* fu salutata come felice soluzione del grande problema; e inaugurato un *anno*, o ciclo, di 12 mesi o sia giorni 360: che, per la proporzionalità fra tempi e spazii nel giro solare, suggerì la pari divisione dell' eclittica ne' 360 gradi, non ancora smessi dagli astronomi nostri. E forse fu allora che, per uniformità di sistema, anche l' unità di spazio, il cubito, fu soggettata a divisione duodecimale (1).

E sebbene la imperfezione della deficiente *dodecamenia* primitiva avesse avuto a svelarsi in progresso pel retrogradare degli astri e delle stagioni, e si fosse cercato correggerla colla giunta de' cinque giorni epagomeni (2), (giunta anteriore alle più vetuste memorie geroglifiche d' Egitto) (3), pur durò a lungo la traccia dell'anno di prima: come nelle 360 coppe che l' una per dì empievansi di latte dinanzi la tomba d' Osiride a Philae (4). E ne restò profondamente impresso nelle menti l' alto concetto della degnità e perfezione del *dodici*: destinato a reggere il perpetuo moto degli astri e la celeste armonia del firmamento.

---

(1) Cf. Mommsen. *Hist. rom.* vers. fr. Paris 1863 T. I, p. 277. Brandis, *Das Münz - Mass.* ec. p. 17.

(2) Herod. II, 4. Biot. *Rech. sur l' année vague des Égypt.* ne' *Mémoires de l' Académie de France* T. XIII, 1831. Letronne, *Nouv. rech. sur le calendr. égypt.* Ib. T. XXIV, 1864, p. 42, seg.

(3) Champollion, *L' Egitto* ec. p. 240. Chabas, *Détermination d' une date certaine dans le règne d' un roi de l' ancien empire*, p. 134 del T. IX de' *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Inscr. et Bell. Lettr. de l' Inst. de France.* Rougé trovava menzione de' 5 dì epagomeni in monumenti della XII dinastia: ma si ritengono più antichi d'assai (Cf. *Annal de phil. chrét.* T. XX Ser. 4, 1859 p. 86).

(4) Martin, *Mémoire sur le rapport des lunaisons avec le calendrier des Égyptiens*, a p. 448 del T. VI de' *Mém. prés. à l' Acad. des Inscr. de l' Inst. de Fr.* 1874.

Digitized by Google

Indi la predilezione per quell'eletto e bene augurato numero negli ordini civili, religiosi e politici; e la più che millenaria gara, ancor viva, tra l'eliaca *dozzina* e l'anteriore ed anatomica *decina*.

Il prevalere però della prima non fu che parziale. Se il cubito, ad esempio, ebbe duodecimale divisione per egizii ed ebrei, l'unità di peso l'ebbe decimale fra i primi e vigesimale fra i secondi (1). Anzi nello stesso anno duodeno *dozzina* e *decina* si divisero le parti. Il mese, ormai non più ciclo lunare, ma semplice frazione di ciclo solare, fu ritondato in tre giuste *decadi* in Egitto (2); come fu invece ridotto nell'antico Messico alla nazionale *ventina*, riuscendone un anno di 18 mesi, co'5 epagomeni in fine (3).

A Roma stessa, dove per le influenze etrusche ed elleniche s'insinuò in alquanti riti e costumi la preferenza della *dozzina;* e dove a memoria storica il romuleo anno di 10 mesi fu recato a 12 da Numa (4); e dall'etrusco Mastarna, o vogliamo dire Servio Tullo (5), che *mensuras*, *pondera constituit* (6), forse furon ridotti a sistema duodecimale, secondo una opinione, verisimile (7), pesi e misure; se soggiacquero al nuovo sistema le frazioni delle unità metriche, *anno*, *piede*, *anfora*, *libbra*, *asse*, pur ne scamparono i multipli; come *secolo*, *lustro*, *decempeda*, *miglio*, *verso*, *decemmodio*, *culleo*, *centupondio*, *centusse*, *decusse*, *quincusse;*

---

(1) L'*uten* egizio diviso in 10 *kat:* il *sechel* ebraico diviso in 20 *gerah.*

(2) Champollion, *L' Egitto* p. 234. Martin, *L. c.* p. 445.

(3) Humboldt, *Vues des Cordillères* T. I, p. 51 seg. Warburton, *Essai sur les hyérogl. égypt.* T. I, p. 7.

(4) Liv. I, 8.

(5) Boissieu, *Inscr. de Lyon* p. 136, 138: dove si recano le Tavole di bronzo di Claudio imperatore.

(6) Aurel. Victor, *De virtis illustr.* c. VII.

(7) Lepsius, *Annal. Ist. Arch.* T. XIII, p. 3. Abeken, *Ivi* p. 115. Cf. Vergers *L' Étrurie* T. II, p. 46, 62.

Digitized by Google

con una folla seguace d' altre numerali espressioni, *decuria*, *centuria*, *decemviri*, *decime*, *vigesime*, *decimazioni*, *denarii*, *quinari*, *sesterzi*, ec. ec. che, nell' ordine politico, militare, giuridico, allo stesso anteriore principio decimale s' informano. Esempi, che non più permetteranno di far meraviglie sull' egizio screzio tra la duodecimale unità lineare e la decimale di peso.

Che poi il sistema di computo, il quale presso taluna gente fu per *cinquine*, o *ventine* (1), fosse veramente in Egitto, come per quasi tutto altrove, a *decine*, il fa palese la numerazione geroglifica, che al pari della nostra ebbe suoi proprii segni e vocaboli per le graduate potenze del *dieci* (2): sì che anche gl' ideali aritmetici si trovano di forma decimale sul Nilo. Si vedrà p. e. essere familiare a' faraoni il parlare a *miliardi*, *milioni*, *centinaia di migliaia*, *miriadi* (3); mentre invece a' monarchi

---

(1) Lascio l' antichissima numerazione *quinaria*, (il prisco πεμπάζειν, *contare a cinque a cinque*, d' Omero), durata fra' coreani e caraibi. Ricorderò la messicana, procedente per le esatte potenze del *venti*, 20, 400, 8000, ec; non senza imitazioni d' altre lingue d' America, Asia, Europa: la maya, cora, giorgiana, basca, gallese, brettone; la quale ultima computa per *venti*, *due venti*, ... *quindici venti*, ec. Anche nelle nostre campagne duran traccie della vetusta *ventina*, ne' rustici computi di fascine, ova, pecore, anni di età: congeneri al *quatre - vingt* di Francia, e al *thre score*, *four score* d' oltre Manica.

(2) Brugsch, *Grammaire hiéroglyphique*, Leipzig 1872 p. 32 - 34.

(3) Le decimali enumerazioni de' Faraoni fannosi eco a distanza di migliaia di anni. Papi, (dinastia VI), vantasi d' avere raccolto un esercito di molte *miriadi* di uomini, e d' avere abbattuto molte *decine di migliaia* di nemici (Rougé, *Mém. sur les mon. des VI prem. dynast.* p. 78. Chabas, *Étud. sur l' antiq. hist.* p. 114, 117). Nella XIX dinastia Ramses II, il Sesostri de' greci, professa di anteporre, nel mezzo delle battaglie il soccorso d' Ammone a *miliardi* di arcieri, a *milioni* di cavalieri, a *miriadi* di giovani eroi schierati a sua difesa (Rougé, *Étud. égypt.* negli *Annal. de phil. chrét.* Ser. V, T. I, 1860 p. 345). Suo figlio Menephtah, l' odioso Faraone dell' Esodo, sfida le *centinaia di migliaia* (Chabas *Op. c.* p. 193); e il successore Ramses III gloriasi di atterrare le *miriadi*, le *centinaia di migliaia*, i *milioni* (*Id. ib.* p. 275, 249, 247). Anche il demone divoratore delle anime dannate è detto, nell' egizio rituale, *divoratore dei milioni* (*Id. ib.* p. 149).

Digitized by Google

d' Assiria e Caldea, usi al nativo computo sessagesimale (1), era naturale il conteggiare a *sossi*, o sia a *sessantine* (2). Nè mancano poi anche biblici indizii del computare decimale in Egitto (3); con esempio concorde dell'eguale conteggiare degli ebrei e d' altre genti vicine, sì prima che dopo dell' esodo (4).

---

(1) Il 60 è il primo multiplo del 10, 12, 20; coll' aritmetico vantaggio per sovrappiù d' una folla di divisori: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30. Per ciò preferito al 100 da' caldei; che presero a computare per *sessantine* e *sessantine* di *sessantine*, ec. come gli altri noverano per *decine* e *decine* di *decine*, o per *ventine* e *ventine* di *ventine*.

(2) Il grande prisma epigrafico di Tuklat-pal-asar I, ad esempio, ricorda (nel XII secolo A. C.) *due sessantine* di leoni uccisi in caccia, *venti sessantine* di cavalli imposte per contribuzione ai vinti, e prede di *sessantine* di carri, di misure di ferro, di bronzo, ec. (Oppert, *Annal. de phil. chr.* Ser. V, T. XI, 1865 p. 179-180). E Nabucodonosor, che elevava un' aurea statua di una *sessantina* di cubiti d' altezza (*Proph. Daniel.* III, 1), scolpiva nella sua celebre epigrafe di Londra d' aver cinto Babilonia di mura di *due sessantine* di stadi per lato (Oppert. *Bull. de l' Athaen. Fr.* 1856 p. 33).

(3) L' egizio tributo imposto da Giuseppe sui prodotti del suolo, e durato per secoli, fu il *quinto* (*Genes.* XLVII, 24 - 26); doppio della *decima*, usata anche in Asia ai tempi di Giacobbe (*Ib.* XXVIII, 23), e d' Abramo (*Ib.* XIV, 20). Così a onorare Beniamino *cinque* stole in dono (*Ib.* XLV, 22), e porzione *quintupla* a mensa (*Ib.* XLIII, 34). E incontro a Giacobbe inviati d' Egitto *dieci* somieri e altrettante giumente (*Ib.* XLV, 23); e giunto poi il patriarca coi figli, dovendo introdursene alquanti al cospetto del faraone, *cinque* se gliene presentano (*Ib.* XLVII, 2): la mezza *decina*, non la mezza *dozzina*. Menomissimi indizii per fermo, ma che tutti insieme collimano a mostrar prevalente negli ordinarii computi il sistema decimale in Egitto.

E qui, per non divagare in troppi altri riscontri, mi cade il ricordo della grande piramide, dove la camera reale ha per misura la *decina* e la *doppia decina* di cubiti; e dove, a parere del Piazzi - Smyth, tante sono le applicazioni del *dieci* e del *cinque* che egli arriva a dichiarare *devoted to tens and fives* quella tomba di Cheops; (*Life and work at the great Pyramid* T. III, p. 115, 214, 222): sulla quale però, osserva lo Chabas, essersi immaginate teorie più meravigliose della piramide stessa (*Èludes sur l' antiq. hist* p. 326).

(4) Le mosaiche ammende son di 100, 50, 30, 20, 15, 10, 5, 3, 2 sicli (*Deuter.* XII, 19, 29. *Exod.* XXXI, 32. *Levit.* XVII, 3 - 8, 16; V, 15); pene di furti il *quintuplo*, il *quadruplo*, il *duplo* (*Exod.* XXII 1, 4); a redenzione de' primogeniti 5

Digitized by Google

Talvolta, a scopo di superlazione, le potenze decimali si triplicano: essendo solenne per tutta l' antichità, e più nella valle del Nilo, la perfezione del *trino*. Cito ad esempio le *tre centinaia* di sicli dati in dono a Beniamino da Giuseppe (1); e le *tre miriadi* di buoi immolati da Ramses II ad Ammone (2): *triplice ecatombe d' ecatombi*, che eleva il sacrificio al più sovrano grado della pienezza e della solennità (3).

---

sicli (*Numer.* XVIII, 6); a ricupera di stabili, ed emenda di danno dato, il *quinto* di giunta (*Levit.* XXVI, 15, 19, 27, 31; V, 16; VI, 5); prescritte le *decime* (*Exod.* XXII, 19. *Levit.* XXVII, 30, 32), e le *decime delle decime* (*Numer.* XVIII, 24). Eletti a giudici *tribuni, centurioni, quinquagenarii, decani* (*Exod.* XVIII, 21). Nel tabernacolo *decina* di cortine (*Ib.* XXVI, 1), *cinquantina* d' anse, d' anelli, di fibule (*Ib.* 5, 6, 11), *ventine* di tavole, di colonne (*Ib.* 18, 20; XXVII, 10), e atrio di *cento* cubiti per *cinquanta* ec. ec. (*Ib.* XXVII, 9, 12).

Così computava Mosè all' uscire d' Egitto; e così era nella casa d' Israele innanzi di entrarvi. È notevole che Abramo, nativo della Caldea (*Genes.* XI, 28, 31; XII, 1), e Giacobbe uscendo di Mesopotamia dopo 20 anni di soggiorno (*Genes.* XXVIII, 41), non computavano per *sossi*, o *sessantine*. Abramo novera i giusti di Sodoma a 10, 20, 30, 40, 45, 50 (*Genes.* XIX 24 - 32), e dà al servo mandato in cerca della sposa d' Isacco 10 cammelli, ed orecchini ed armille del peso di 2 e di 10 sicli: e anche gli agnati di lui, oriundi pur di Caldea e dimoranti in Siria, pregan Rebecca di trattenersi ancora in famiglia almeno una *decina* di giorni, e l' accomiatano augurandole discendenti *a migliaia di migliaia* (*Genes.* XXIV, 10, 22, 55, 60). Giacobbe poi inviava in dono al fratello Esaù 200 capre e 20 becchi, e altrettante pecore e arieti, e 40 vacche con 20 tori, e 20 asine con 10 loro puledri, e altrettanto di cammelle e di cammellini (*Genes.* XXXII, 14 - 15).

Parrebbon tempi anteriori all' introduzione del computo sessagesimale. Certo è che altri indizii concorrono a conferma dell' antico sistema decimale in Palestina: le *decime* di Melchisedech (*Genes.* XIV, 18), e i *mille* sicli d' Abimelech (*Ib.* XX, 16), e l' aurea verga di Gerico, tagliata a norma della *cinquantina* di sicli (*Josue* VII, 21), non della *sessantina*.

(1) *Genes.* XLV, 22.

(2) Rougé, *Annal. de phil. chrét.* Ser. V, T. I, 1860 p. 345.

(3) Anche Omero attribuisce alla regione niliaca l' *ecatombe* (*Odyss*, I, 25): grande e arcisolenne sacrificio *centenario* di buoi, che insieme col più umile de' *cento* arieti ricordato pure dal poeta sul Nilo (*Ib.*), e alla più povera lustrazione delle *cento* ova memorata da Giovenale (*Satyr.* VI. 518), rivela l' antica

Digitized by Google

Per la qual cosa non potrà quindi far meraviglia che la grande e fondamentale unità di peso, il *quadrantal* dell' acqua, fosse soggettato in Egitto a divisione decimale per ricavarne la minore ed usuale unità di computo, l'*uten*. Con che, in perfetto accordo col sistema di numerazione vigente, venivasi a far corrispondere l'acqueo cubo appunto alla cubica potenza decimale dell'*uten*, il 1000; mentre una diversa partizione, p. e. per 5, per 12, per 20, per 24, avrebbe diviso il cubo in incomodi numeri 125, 1728, 8000, 13824 di parti, troppo alieni dal decimale sistema corrente. Così per qualsivoglia novero e computo poterono per gli egizii bastare l'*uten* e il *kat*, come bastano per noi *lira* e *centesimo*. Laddove l' adozione di speciali unità di conto discordi dal sistema decimale de' numeri, come 60, 3000, 3600, 6000, portò altrove la necessità di proprii vocaboli di peso e di conto, ignoti all' Egitto, come *mina* e *talento*.

10. La meccanica divisione decimale del cubo o *quadrantal*, potea eseguirsi in due modi: sia partendolo in dieci eguali solidi, da ripartirsi in dieci altri, e in altri dieci ancora; sia dividendo per dieci i lati del cubo e, con piani paralelli alle faccie, drittamente spartendolo ne' suoi mille cubetti, o sia *uten*. La prima via, più impacciata procedendo per gradi, forse ci avrebbe lasciato, in corrispondenza degli ottenuti solidi, unità superiori di conto multiple dell'*uten*; cioè il *decuplo* e il *centuplo*. L' altra invece, più semplice, che senza gradi intermedii ci porta dal *quadrantal* all'*uten*, parrebbe avere avuto a essere senza fallo la preferita.

Per la decimale divisione del *quadrantal* riceve l'*uten* un' acconcissima forma ed espressione geometrica: un cubo d' acqua

---

preminenza della numerazione decimale. Anche Esiodo, dove parla della moltitudine dei genii benefici assegnati a custodia de' mortali, li dice τρις μυριοι (*Op.* v. 252.): *tre miriadi*, sempre nella stessa accezione di quantità tragrande e di suprema pienezza.

Digitized by Google

d' un decimo di cubito per lato (1): al modo stesso del moderno litro, ch' è il decimetro cubico.

E con questo fondamentale concetto della cubica forma dell' unità di peso confronta il vedere nella scrittura geroglifica usato il *cubo* come determinativo de' pesi in genere: e il trovarsi talora sui monumenti figurata una serie di paralellepipedi eguali a 2, 3 ed anche 5 cubi, che son 2, 3, 5 *uten*; come spiegano le leggende apposte sia a' pesi di questa specie, sia agli altri ancora in forma d' animali, designati sempre colla semplice appellazione di *uten* (2). Onde confermasi che que' multipli non aveano nomi speciali; ma solo distinguevansi per la numerale indicazione degli *uten*.

Un paralellepipedo peso di porfido è fra i pesi menfitici del museo di Bulaq (3); e due cubi di bronzo con figure di scarabei damaschinate in oro, che li mostrano d'arte egizia, furono trovati dal Layard a Ninive: dalle cui rovine anche altri oggetti egizii son tornati all' aprico (4).

I genuini caratteri delle primitivissime origini dell' *uten* dileguano quindi ogni avvertito dubbio di possibile derivazione persiana: e il seguente capitolo III potrà poi dare ampla ragione d' ogni apparenza contraria.

Altra splendida conferma di questo peso dell' *uten* avranno più innanzi a fornircela anche le misure di capacità: e vedremo a suo luogo come tra queste e il peso dell' *uten* passi un esatto rapporto. Vedremo ragguagliarsi appuntino coll' *uten* due antichi vasi portanti la data di Thothmes III e l' indicazione della loro

---

(1) Nell' egizio sistema numerico e metrico il $1/10$ di cubito corrisponde a digiti $2 + 1/3 + 1/15$.

(2) Chabas, *Recherches sur les poids* ec. p. 3.

(3) Mariette, *Monuments divers recueillis en Égypte et en Nubie*, Paris 1872 - 77, Planche 97 n. 12.

(4) Layard, *Discoveries in the ruins of Nineveh and Babylon*. London 1853 p. 196, 156, 279. Brandis, *Das Münz - Mass.* ec. p. 76.

Digitized by Google

misura: riuscendone così una irrefutabile riprova e del valore dell' *uten* e della sua appartenenza faraonica, anzi della sua certa esistenza sui principii del secondo impero: oltre un millenio innanzi quelle persiane influenze, da cui potea nascer sospetto aver forse avuto a originare quel peso.

Per tal guisa si veggono convergere in un comune risultato tre mezzi di prova affatto distinti e indipendenti tra loro: la cubatura del primitivo cubito fondamentale, l' ufficiale campione Harris, le misure di capacità ne' lor rapporti coi pesi. E la ottenutane determinazione dell' *uten* può ritenersi quindi scientificamente stabilita sopra un terreno sicuro.

11. Dopo tutto il detto sin qui perde ogni forza anche l'altro sospetto, destosi in me e da me non taciuto, per ragione della geometrica forma del campione Harris; a riscontro degli antichissimi pesi egizii figurati sempre su' monumenti sotto forma d' animali. Fosse pure di bassa età il nostro campione tebano, non sarebbe per ciò men primitivo il sistema dell' *uten*, cui appartiene.

Se non che troppo altro è a ridire intorno a questo primo sospetto. Se in appendice al presente scritto avrò agio di toccare alcun che sulla metallica valuta anulare faraonica, ch' ebbe millenario corso innanzi la moneta coniata, avremo allora a vedere che gli ammonticchiati anelli d' oro e d' argento, spendibile metallo d' allora, sì sovente rappresentati nelle bilancie equilibrarsi con que' figurati pesi, in forma di tori, vitelli, ippopotami, gazzelle, sono ingenti valori: non già semplici *uten*, o loro frazioni. E concorda il trovar sempre accoppiati que' pesi alle maggiori bilancie, di fondachi, d' erarii, di pubblici emporii; surte su alti fulcri o piedi, a statura d' uomo e più ancora; e per cui servizio quelle sculte figure d' accosciati animali non eran scomodi pesi od inatti: non avendo a passare che da' penduli bacini a' prossimi vassoi destinati a riceverli (1). Ma nelle portatili e

(1) Quanto ad egizie figure di bilancie vedi le citazioni in fine della nota 2, pag. 150.

Digitized by Google

maneggevoli bilancie minori, non ignote per certo agli egizii (1), avea a essere altra cosa ; e anche i pesi dovean essere più destri alla mano e meglio atti al trasporto.

Gli usuali pesi in fatti dagli antichi portavansi in saccoli. Agli ebrei dell' esodo, famigliarizzati da secoli cogli usi egizii, comandava Mosè: *Non habebis in sacculo diversa pondera* (ebr. *sasso e sasso*), *maius et minus* (2) ; e anche a' tempi di Salomone non era smessso il costume d'associare alla bilancia la sua borsa de' pesi, ricordandosi ne' Proverbii *pondus et statera et omnes lapides sacculi* (3); paralellamente all' altro passo di Michea: *Numquid justificabo stateram impiam et saccelli pondera dolosa* (4)? L' antonomastico nome di *pietre* derivò ai pesi dalla più comune materia onde solean formarsi ; e perpetuossi anche in qualche idioma moderno, come il tedesco *stein* e lo *stone* degl' inglesi.

Or figurati pesi marmorei, con incomode e fragili sporgenze di corna e d' orecchi, quali li vediamo su' dipinti o ne' bassorilievi, avrebbero fatto troppo mala prova insieme confusi per entro quei sacchi. E sebbene ne' pesi assiri scopertisi le stesse forme d' oche e lioni sieno egualmente applicate ai massimi e ai minimi campioni, è però dato di credere che in Egitto invece, serbate per la serie degli alti pesi le artistiche e scultorie forme animali, fosser prescelte pe' tenui, con più pratico e avveduto consiglio, le geometriche.

Ciò ne insinua il manesco e dozzinale recipiente del *sacculus*, e la generica dinominazione di *lapides* : applicabile, direbbesi, anche a ciottoli grezzi. E due in fatti di tali ciottoli egizii, ad uso di pesi, con più linee di scrittura geroglifica, li ha il Museo del Louvre (5). Nè diversi sono probabilmente tre pesi, mal

---

(1) Pleyte, *Étud. égypt.* Pl. VIII, 13.
(2) *Deuter.* XXV, 13.
(3) *Proverb.* XVI, 11.
(4) VI, 11.
(5) Queipo, *Essai* ec. T. I, p. 188, 203.

Digitized by Google

tondeggianti, che in una delle tavole del Rosellini veggonsi rappresentati sopra una delle bilancie più rozze (1). Certo è che, risalendo l'uso della bilancia alle età più semplici e rimote, tutto fa supporre che i primitivi pesi da rappresentare le varie frazioni ponderali avessero verisimilmente ad essere scelti, a risparmio di lavoro, tra' più acconci e nitidi sassi di fiume: da ricordarne i *limpidissimos lapides* (quos) *de torrente (elegit) et misit... in peram pastoralem* il giovinetto Davidde (2).

Negli umani trovati tutto procede per gradi: e a' manufatti strumenti debbono aver preceduto quelli forniti dalla natura: di che i monumenti delle età primitive potrebbero somministrarci esempi senza fine. E come nella gradazione delle arti le meccaniche dovettero precorrere le rappresentative, è ragionevole supporre che anche in fatto de' pesi la semplice regolarità della forma avesse avuto a precedere le ricercate ornature; e così a' pesi geometrici dovessero essere posteriori i figurati. Saper modellare e fondere o scolpire figure segna un grado di non leggero progresso nell' arte: per ciò gli egizii pesi in forma d' animali son probabilmente assegnabili a tempi relativamente avanzati. Nè fa prova in contrario il trovare pesi di tal foggia tra incolte e semibarbare genti del nord (3). Non fra que' popoli nacquero l' arti, e fu trovato il sistema de' pesi. All' uscire d' infanzia imitaron quelle genti le forme che l' arte avea prese per mano d' altrui.

E qui può tornare in acconcio il testimonio della scrittura geroglifica; i cui elementi, per le rimotissime origini loro, son buona fonte non di rado di cronologiche e istoriche erudizioni nascose. In fatti i geroglifici segni o determinativi de' pesi non son già figure d' animali, ma prette forme geometriche: il dado, l' anello e la mettallica verghetta (due volte sopra di sè ripie-

---

(1) Rosellini, *Mon. civ.* Tav. LII, n. 2.
(2) I. *Regum* XVII, 40.
(3) Vedasi la nota 4, pag. 128.

Digitized by Google

gata) dell'*uten*. Fra le quali tre forme più elementare e primitiva direbbesi la prima: ritraente appunto la fondamentale cubatura della unità lineare, e attenentesi alla originaria e tipica forma del peso. Tanto più che alla costruzione del dado l'arte litica basta; mentre l'altre due più elaborate maniere, l'anulare e la filiforme, suppongono lo sviluppo della metallurgica.

Il perchè quella sospetta forma di geometrico solido di rivoluzione, che davane ombra dapprima nel campione Harris, quasi fosse indizio di bassa età il non essere plasmato in forma animale, nulla toglie di pregio a quel prezioso cimelio. Il quale non perciò punto scema del prestigio dell' antichità sua e nulla perde de' caratteri della sua sincerità.

Anche una folla d' altri egizii pesi sparsi pe' musei, non hanno forma diversa dal nostro (1). La ricchissima serie poi degli antichi pesi del Museo di Bulaq, usciti da ruine del Basso Egitto, (e de' quali avremo a occuparci più innanzi), ha sole forme geometriche; e tra esse appunto predomina quella del nostro peso tebano (2).

Anzi in questo particolare è notevole il fatto, che nelle egizie raccolte non si hanno pesi faraonici di forma animale (3); che pure è l' esclusiva forma rappresentata sui monumenti. Nè si saprebbe spiegare come tanti pesi in figura d' animali siano usciti dagli scavi d' Assiria, e niuno ancora ce ne abbian ridonato gli egizii. Per singolare coincidenza poi anche la premonetale valuta anulare, sì sovente figurata sulle antiche bilancie insieme a que' pesi, indarno si cerca nelle collezioni antiche (4); se eccettuisi qualche povero anelluzzo del Museo di Leida, trovato bensì in Egitto ma che si crede non appartenere a sistema

---

(1) Lepsius, *Die Metalle* ec. p. 40.
(2) Mariette - Bey, *Monuments divers*, ec Pl. 97 - 100.
(3) Chabas, *Recherches* ec. p. 4.
(4) Chabas, *Op. c.* p. 38.

Digitized by Google

egiziano (1). Inesplicabile difetto, comune per altro anche alla più volgare suppellettile delle egizie lucerne (2); delle quali l' Egitto non dovette al certo mancare.

12. Assicuratici ormai, e per tante vie, sulla genuina manifestazione e determinazione dell' antico *uten* egizio, poche parole basteranno intorno al suo decimo, il *kat*.

Come l' *uten* è un cubo di $^1/_{10}$ del cubito per lato, la geometrica espressione del *kat* è un paralellepipedo avente il $^1/_{100}$ del cubito d' altezza e il quadrato del $^1/_{10}$ per base.

Quanto al suo peso, 9^{gr}, 0920545, potrebbe ascriversi fra gli *stateri*, secondo i concetti della metrologia meno antica: superando di poco lo statere attico, o il perso. E fors' anche, secondo i più vetusti sistemi, potrebbe dirsi una *dramma*: superiore alla dramma eginetica e al semisiclo, o dramma, degli ebrei. E in significazione di *dramma*, o *didramma* mantennesi in fatti quel vocabolo del *kat* (*kit*, *kite*) presso i copti (3).

Quanto al ponderale suo ufficio ci appare il *kat* siccome peso abbastanza minuto per le usuali pesature delle merci comuni. Equivale a un *terzo d' oncia*, o sia alla *duella latina*; mentre nelle ordinarie nostre bilancie, durate fino al nuovo sistema decimale, lo stilo segna le sole oncie, o al più le mezze oncie. Nelle dozzinali merci pesavano adunque gli egizii, col loro *kat*, più minutamente ed esattamente di noi.

Ma v' hanno merci di maggior pregio, i nobili metalli soprattutto, e per questi il *kat* non potea bastare. In fatti ne abbiamo trovato delle frazioni: $^1/_2$ *kat d' oro di Kush*, $^1/_9$ di *kat d' oro* (4). Ma qual fosse il sistema di divisione adottato ci è ignoto.

---

(1) Leemans, *Mon. eg. van Nederl. Mus.* Parte II. Tav. XLI, n. 298. Brandis, *Das Münz - Mass.* ec. p. 82.

(2) Chabas, *Recherches* ec. p. 38.

(3) Madden, *Hist. of. Jew. Coin.* p. 276, 284.

(4) Vedi sopra pag. 129, 127.

Digitized by Google

L' analogia numerale e geometrica avrebbe dovuto condurre, per decimali divisioni, sino al centesimo del *kat*, o sia al millesimo dell' *uten*; che sarebbe un minimo cubettino di $^1/_{100}$ di cubito (digiti $^1/_5 + ^1/_{25}$) per lato. Come, dividendo per 10 tutti i tre lati fondamentali del *quadrantal*, erasi ottenuta la cubica unità di conto, l' *uten*, parea naturale ridividere similmente ancor questo ed arrivare al *millesimo*, quale infimo de' suoi divisori.

Così, con perfetta rispondenza e simmetria geometrica, quel medio cubo dell' *uten* avrebbe avuto, come ponderali limiti superiore e inferiore, due altri cubi proporzionalmente da esso equidistanti, l' uno *millecuplo*, l' altro *millesimo* di esso.

Che gli egizii si fosser messi per questa via di analoga e decimale divisione dell' *uten* n' è prova quel suo *decimo*, il *kat*. Che avessero poi potuto passar oltre, sino al *centesimo* dell' *uten*, o sia al *decimo* del *kat*, parve non improbabile anche al Lepsius (1). E troviamo in fatti quel $^1/_{10}$ di *kat* tra i pesi di Bulaq; nè manca il riscontro di vetuste dramme decimali: quelle d' Egina e d' Israele, di 10 oboli o *gerah*. E il $^1/_{10}$ di *kat*, $0^{gr},90920545$, entrerebbe nel novero degli oboli: forte obolo per fermo, come il *kat* è una forte dramma.

Che poi si dovesse discendere anche al di sotto del $^1/_{10}$ di *kat*, n' è prova il pregio dell' oro. Quel *decimo* rappresenta il fino d' un tre delle nostre lire in oro; e, in tempi di tanto maggior valore de' metalli preziosi, non potea quello essere al certo il *minimo ponderabile* dell' oro. Se però si arrivasse veramente al *centesimo* del *kat* è incerto. Solo sappiamo avervi in fatti avuto oboli divisi per dieci (2); ed essere appunto stato quel *centesimo* di *kat*, $0^{gr},090920545$, l' infimo dei pesi d' oro nel sistema d' Atene

---

(1) *Die Metalle* ec. p. 42.

(2) Brandis, *Das Münz - Mass.* p. 293. Hultsch, *Griech. und röm. Metrol.* p. 114, nota 17.

Digitized by Google

il cui *calco*, od *emitetartemorio*, era di 0gr, 091 (1). Nè sono ignote le affinità tra il sistema attico e l' egizio. Certo è che questo ponderale *minimum* non potea parere troppo esiguo in materia dell' oro. I nostri moderni grani sono ancor più piccoli assai, benchè valgano meno i metalli. Citiamo ad esempio i *grani* di Venezia, di Parigi, del *pound - troy* di Londra: 0gr,051758, 0gr,053114 0gr,064798.

Quell' aureo *minimun*, quel millesimo d' *uten*, equivarrebbe all' *uten* di bronzo, chi applicasse all' Egitto l' approssimativo rapporto 1 : 1000, supposto tra bronzo e oro dal Poole (2); e la verisimiglianza di quell' infima frazione del *millesimo* parrebbe toccare il suo colmo.

Vedremo per altro nel paragrafo appresso che, forse a servire alla reciprocità de' rapporti fra i metalli preziosi, una nuova scala di minimi pesi venne introdotta; fondata non già sulla *decimale* divisione del *kat*, ma sulla *binaria* dell' *uten*: la quale se anche in Egitto fu spinta insino al punto, in che in Grecia la troviamo, avrebbe dato un finale risultato ben poco diverso dall' avvertito *millesimo* d' *uten*. Sì che sarebbero stati due differenti sistemi divisivi, procedenti per diversa via a un risultato comune. Nè sarebbe impossibile che l' uno fosse stato seguito e soppiantato dall' altro. Ma non sono che semplici speculazioni; senza possibilità di arrivare a conclusioni accertate.

Comunque sia, e fosse pure esistita la supposta divisione del *kat* per *decimi* e *centesimi*, questi non avrebbero avuto il pratico vantaggio di poter diventare frazione di conto, come i nostri *centesimi*. L' egizio metodo de' rotti non avrebbe ammesso che le due espressioni $^1/_{10}$ e $^1/_{100}$: tutti gli altri pesi superiori a questi infimi limiti avrebbe bisognato esprimerli con altre frazioni or-

---

(1) Hultsch, *Op. c.* p. 149.
(2) Madden, *Hist. of. jew. coin.* p. 285.

Digitized by Google

dinarie (1). A rendere quei *decimi*, o *centesimi*, subalterne unità di conto sarebbe stato d' uopo distinguerli con un proprio nome, (che non ebbero); il quale permettesse di computarli per numeri interi.

Nel pratico uso della bilancia, a non creare imbarazzi, la serie degli ordinarii pesetti per le frazioni del *kat* dovea essere al più possibile ristretta. Una compita serie, p. e., dal $^1/_2$ al $^1/_{16}$, come quella dei divisori del digito, avrebbe portato confusione.

Due di que' minuti pesetti ce li han fatti conoscere le iscrizioni: $^1/_2$ e $^1/_9$. Altri li troviamo fra i campioni di Bulaq, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_{10}$ (se pur non è lo stesso $^1/_9$ di dianzi); ma è incerto se questa sia divisione faraonica: non parendo d' alto evo quei pesi. Nella polinomia frazione già nota $^2/_3 + ^1/_6 + ^1/_{30} + ^1/_{45}$ ($= ^8/_9$ di *kat*), che a sorte è appunto il complemento del $^1/_9$ predetto, ignorasi se qualcuno di que' termini sia, anzichè peso effettivo, mera espressione aritmetica (2).

13. Una nominale frazione aurea di conto, (non del *kat* ma dell' *uten*), la troviamo in un monumento etiopico. Fra cinque grandi stele scoperte dal Mariette al Dijebel - Barkal, sul luogo dell' antica Napata capitale d' Etiopia e passate al museo di Bulaq, una dell' etiope re Hor-si-atef, (non bene dicifrata

---

(1) A mo' d' esempio i nostri $^4/_{10}$, $^7/_{10}$, $^{75}/_{100}$, $^{86}/_{100}$ corrispondono alle egizie frazioni polinomie $^1/_3 + ^1/_{15}$, $^2/_3 + ^1/_{45} + ^1/_{90}$, $^2/_3 + ^1/_9 + ^1/_{45}$, $^2/_3 + ^1/_{20} + ^1/_{30}$, $^2/_3 + ^1/_6 + ^1/_{60} + ^1/_{100}$.

(2) Nelle divisioni del *digito*, pognamo, che avean per infimo limite il $^1/_{16}$, i $^5/_7$ equivalevano a $^2/_3 + ^1/_{21}$: dove l' ultimo termine è semplicemente aritmetico, non avendo luogo nella scala metrica del digito. E così dovea essere nei pesi. Nella nota precedente poi vedesi in fatto come i rotti $^2/_3$, $^1/_3$, $^1/_6$ ec, inesprimibili coi decimali nostri, potessero servire a decimali espressioni egiziane. Tanto più che, siccome noi trascuriamo talora *millesimi*, *diecimillesimi* ec., anche gli antichi sopprimevano per brevità i minori termini delle loro frazioni polinomie (V. sopra Pag. 75 in nota). Così che il $^1/_9$, p. e., può essere espressione intenzionalmente esatta, ovvero anche semplicemente approssimativa di $^{11}/_{100}$; trascuratovi il complemento di $^1/_{900}$.

Digitized by Google

da prima) (1), novera fra i doni di quel monarca al tempio d' Ammone a Napata « *oro* 40 *uten, che sono* 5120 *pak* » (2). Prezioso ragguaglio, che ci svela l' esistenza d' una piccola unità di peso e di conto, il *Pak*, eguale al $^1/_{128}$ d' *uten:* evidentemente di sistema binario, corrispondendo all' *uten* diviso e ridiviso 7 volte per 2.

Il suo peso riesce quindi di 0^{gr}, 71031676. Pel Lepsius invece, che dà all' *uten* il peso di 90^{gr},9591, il *pak* risulta di 0^{gr}, 7106. Differenze di niun valore per se; ma che possono rendersi sensibili negli alti multipli. Geometricamente il *pak* corrisponde alla metà di un esiguo cubetto d'$^1/_{40}$ di cubito per lato; o sieno digiti $^1/_2 + ^1/_{10}$.

L' abbandono della divisione *decimale*, cui appartiene il *kat*, per appigliarsi alla *binaria* del *pak*, potrebb' essere dipeso dall' aver preferito la materiale suddivisione de' minuti pesi per mezzo della bilancia. Poichè, mentre la costruzione di minime misure geometriche di capacità, per derivarne i pesi, avrebbe importato una squisitezza di esecuzione poco sperabile dalla meccanica antica, l' ovvio dimezzamento per mezzo della bilancia permette di spingere con esattezza la suddivisione sino agli ultimi estremi. L' arrestarsi poi a quel *settuplo* dimezzamento dell' *uten* dovrebb' essere in relazione, non con ideali e sistematiche predilezioni pel *sette* (3), ma con qualcosa di pratico:

---

(1) Mariette, *Quattre pages des archives officielles de l'Éthiopie*, nella *Rev. arch.* T. XII 1865, p. 161, 176.

(2) Lepsius, *Die Metalle* c. p. 41. Chabas, *Recherches* p. 41. Lenormant, *La monnaye dans l' antiquité* T. I, p. 100.

(3) Anche in Egitto era invalso il vetustissimo concetto della pienezza e perfezione del *septem, septuplum, septies*. Il celebre toro sacro, il toro divino di cui secondo Manetone erasi antichissimamente introdotto il culto, sin dagli inizii della dinastia II, è nel *Rituale funebre* (c. CXLVIII) chiamato *il maschio delle sette vacche mistiche* (Rougé *Monuments des six prem. dynast. ég.* ne' *Mém. de l' Acad. des Inscr.* T. XXV, 1866, p. 243). E, in accordo con molteplici riscontri sacri e profani (*Genes.* IV, 15, 24. Homer. *Il.* VIII, 220; *Odyss.* XIV, 434, ec. ec.), qui non può non tornare al pensiero l' egizio esempio del mistico sogno del Faraone di Giuseppe, e le sue *septem spicae* e le *septem boves* (*Genes.* XLI, 17 - 24).

Digitized by Google

forse con un raggiunto rapporto da coordinare tra loro i valori delle unità metalliche di conto.

14. Il ragguaglio tra l' argento e l' oro, ch' era nel regno dei Lagidi 1 : 12 ½ (1), e nell' Asia vicina sotto i persi, caldei ed assiri credesi essere stato 1 : 13 ⅓ (2), se anche nell' Egitto faraonico fosse stato intorno a quelle misure, potrebbe dar ragione del *pak*. Che sarebbe l' aureo equivalente del *kat* d' argento, quando l' egizia proporzione fra i due metalli fosse stata 1 : 12 ⅘; contenendo il *kat* 12, 8 *pak*, posto che l' *uten* ne contiene 128.

Se non che due gravi difficoltà parranno opporsi a tale supposto: il riputarsi, cioè, dai dotti unità etiopica il *pak*, non egizia; e l' attribuirsi da essi un preteso rapporto 3 : 5 ai due metalli in Egitto.

Prima ancora che la stela d' Horsiatef fosse pubblicata nei suoi *Monuments divers* dallo scopritore Mariette (3), quell' importante ragguaglio tra l' *uten* e il *pak* era stato segnalato dal Lepsius nella sua dissertazione sui *Metalli* data in luce tra le *Memorie della R. Accademia delle scienze* a Berlino (4); dove l' illustre alemanno giudica non egizio, ma esclusivamente etiopico il *pak:* sentenza seguita poi in Francia dal Chabas (5) e dal Lenormant (6). Al parere di sì dotti e competenti scienziati ben vorrei poter soscrivere anch' io; ma mi si affaccian dubbi

---

(1) Letronne, *Papyrus grec du règne d' Évergète II, contenant l' annonce d' une récompense promise à qui ramenera deux esclaves échappés:* nel *Journal des Savants* 1833, p. 837.

(2) Brandis, *Das Münz - Mass.* ec. p. 69. Lenormant, *La monnaye dans l' antiquité* T. I p. 98.

(3) *Monuments divers recueillis en Égypte et en Nubie*, Paris 1872 pl. XXIV - XXX.

(4) *Die Metalle in den Aegyptischen Inschriften*: nelle *Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1871 p, 41.

(5) *Recherches* ec. 1876 p. 21.

(6) *La monnaye dans l' antiq.* Paris 1878, T. I, p. 100.

Digitized by Google

che non oserei di sicuramente risolvere. E nell' imperfetto stato delle cognizioni nostre intorno i più minuti pesi d' Egitto, temo che sia prematuro il fermare giudizii assoluti su questo proposito.

A me fa stato soprattutto il trovare quel peso del *pak* in possesso di popoli, che bensì dall' Egitto poterono riceverlo, non già dall' Etiopia. Sopra di che avremo a intrattenerci nel seguente capitolo. Poi dovendo fra breve vedere usuali pesi egizii d' oro e d' argento, (di nome e valore oscuri finora), aventi ufficio di unità di valuta e di conto nel minuto commercio ordinario; senza poter definire se alcun sicuro rapporto abbiano, o no, per avventura col *pak*; è prudente, tanto nell' affermare che nel negare, andare guardinghi e aspettar lume dal tempo.

Si è giudicato etiopico il *pak* della stela d' Horsiatef, ma dell' *uten,* con esso associato e da cui esso deriva, non si è avuto sospetto che potesse essere straniero. Il Lepsius, senza preoccuparsi di tale dubbio, l' ha á dirittura supposto egiziano. E pure dalla identità del nome non ne consegue quella del valore. Come v' ebbero più *dramme*, *stateri, mine*, *talenti*, vi poterono essere più *uten*; anzi vi furono, e non si chiuderà questo capitolo senza averlo veduto.

Ma per ventura questo preambolo dubbio sulla medesimezza dell' *uten* porta la soluzione con se. È appunto l' *uten* egizio, che nel suo *cenventotlesimo,* o *pak*, ci dà un notissimo e significante valore, il quale ebbe larghissimo uso e importantissima parte nell' antica metrologia. Era dunque faraonico l' *uten* d' Horsiatef; onde abbiamo la certezza che l' Etiopia avea appreso dall' Egitto anche i pesi: cioè a dire non i nudi nomi soltanto, ma ancor la loro misura. Il perchè comincia a vacillare la presunzione che quel *pak* sia etiopico davvero. Se nella tanta intimità di rapporti politici, commerciali, civili, quanta eravene fra Etiopia ed Egitto tornò bene alla prima di far suo il ponderale sistema egizio, quale pro, quale immaginabile vantaggio avrebbe ella potuto ripromettersi dall' accettare la sola unità fondamentale, rigettando le summultiple, e racconciando a sua posta la gradazione dei pesi

Digitized by Google

per averne quindi un ibrido e mal giovevole sistema nè interamente etiopico, nè interamente egiziano?

Niuno ignora gli strettissimi vincoli fra i due popoli niliaci, etiopi ed egizii. Fin dagli esordii del primo impero, e per interi sei secoli, l' Etiopia non fu che una provincia d' Egitto: dal quale apprese arti, culto, lingua ufficiale e scrittura (1). E se, al piegare della potenza faraonica, riescì a rivendicarsi in libertà, ciò non fu che per crescere in breve a tanto di forze da soggettare a sua volta l' Egitto e per interi tre regni tenerne il dominio. Periodo nel quale l' opera assimilatrice della prevalente civiltà egizia non dovette rallentare il suo corso.

La stela d' Horsiatef, nella quale il Mariette trova caratteri della decadenza, non è anteriore a quella età. Ecco come me ne scrivea cortesemente l' illustre Chabas: « La stèle de Horsiatef appartient à l' époque la plus brillante du royaume de Napata (Éthiopie). La série des rois Éthiopiens est mal connue; ceux qui ont fait graver les belles stèles publiées par M. Mariette sont dans tous les cas postérieurs à Taharaka. Horsiatef est dans ce cas. »

In questa secolare condizione di *egittizzata* provincia faraonica trova la sua naturale spiegazione l' uso dell' *uten* egizio in Etiopia; e s' insinua la persuasione che anche il *pak* non avesse a essere per avventura che egizio. Certo è che egizio ne è il nome, trovandosi usato, col determinativo del vaso, ne' monumenti egiziani quale misura di miele (2): e la sua coptica radice, (ben conveniente ad egizio vocabolo), che suona *rotto*, *porzione* (3), fa abbastanza palese che il ragguaglio avvertito tra il *pak* e l' *uten* egizio non è fortuita relazione fra eterogenei pesi stranieri, ma intimo ed intenzionale rapporto fra rotto ed intero.

---

(1) Mariette, *Quatre pages*. ec. nella *Rev. arch.* T. XII, 1865 p. 161 - 162. Maspero, *Essai sur la stèle du songe* nella *Rev. arch.* T. XVII, 1868 p. 329.

(2) Lepsius, *Die Metalle* ec. p. 41 nota 2.

(3) *Id. ib,*

Digitized by Google

Qual de' due popoli, egizio ed etiope, avesse introdotta quella divisione dell'*uten* non basta la stela d' Horsiatef a chiarirlo. Essa non vale a provare che sia *etiopico* il *pak*; come certo non prova che tale sia l' *uten*. Il non essersi trovata finora menzione espressa del *pak* in monumenti egizii, non suffraga: essendo troppo nota la debolezza de' negativi argomenti. Nè il trovarsi egizii computi d' oro pesato in *kat*, e sue frazioni ordinarie, tronca definitivamente il nodo della quistione. Come a Roma ebbe il piede due divisioni diverse, in 12 oncie e in 16 pollici, anche l'*uten* potrebbe averne avuto due in Egitto: l'una, p. e., per le merci, l' altra per la valuta. Ed avendo, secondo casi, ambe queste qualità i metalli, potrebbero corrispondentemente essere stati soggetti a due gradazioni di pesi diverse.

Converrebbe poter provare che l' egizia *unità aurea* di conto, rivelataci da' papiri, che tuttora ci nasconde il suo valore, non sia fondata sul sistema del *pak*, per potere asseverare con certezza che questo dunque sia etiopico. Finchè questa prova negativa non si abbia, non restano che le presunzioni generali: la probabilità, cioè, che nel magistero de' pesi sia a riferirsene la norma a quello de' due popoli che fu all' altro maestro; la verisimiglianza che, non avendo potuto mancare in Egitto una minuta unità di conto dell' oro, questa naturalmente abbia avuto a passare col restante sistema de' pesi in Etiopia: svanendo quindi la necessità dell' ibrido innesto d' una straniera unità diversa. Poichè una provincia, (fosse elezione o comando), adottava i pesi della metropoli, la induzione politica e commerciale persuade aversi dovuto accoglierne piuttosto tutto il sistema, di quello che riceverlo in parte e in parte falsarlo (1).

---

(1) È ne' musei troppo scarsa la messe dei pesi faraonici per potere dalla mancanza di campioni regolati sulle norma del *pak*, concluderne che questa unità fosse estranea all' Egitto. Tutti gli anepigrafi pesi che han rapporto col *pak* soglionsi attribuire ai Lagidi: ma non è attribuzione abbastanza sicura. Non è accertato che una spigolatura di essi non potesse riferirsi ad età più lontana.

Digitized by Google

Ciò che più mi fa forza, il ripeto, è il riconoscere nel *pak* una celebre e fondamentale unità passata a genti straniere, che ben poterono riceverla d'Egitto, ma che non ebbero contatti coll'Etiopia. Il perchè, fino a buona prova contraria, la più giusta e accettevole presunzione è per me che anche il *pak* appartenga al sistema faraonico.

Forse l'aurifera Etiopia, dove un'attiva circolazione dell'oro non poteva mancare, e avea a provarsi il bisogno d'una spicciola unità aurea di conto per servigio del minuto e ordinario commercio, trovò comodo il *pak* come unità di valore e di computo; mentre forse in Egitto, dove pare essere prevaluto pe' valori tenui il corso del bronzo (1), può essere rimasto il *pak* in istato di semplice frazione teorica: probabilmente però non estranea alla determinazione del mentovato pezzo incognito d'oro, che colà serviva d'aurea unità commerciale di computo.

15. Questo discorrere del *pak* naturalmente ci conduce dall'argomento delle unità di peso a quello delle unità di valore.

Dacchè al primo mercatare per bestiami (2), fu sostituito il comprare per metalli, le comuni unità di peso metalliche divennero insieme le unità di stima, di prezzo, di valore delle mercatabili cose. Così l'ebraico siclo d'argento, co' suoi multipli e colle sue frazioni, tenne luogo di moneta molti secoli innanzi l'introduzione de' metalli coniati; come in Egitto dalle età più rimote ebbe lo stesso ufficio premonetale l'*uten* di bronzo. E se un solo metallo si fosse destinato a questo commerciale servigio

---

Per esempio il ciottolo del Museo del Louvre, con sei linee di geroglifici, ricordato dal Queipo (*Essai* ec. T I, p. 188), che pesa 352^{gr},16, ossia nettamente 500 *pak*, sarà una mina tolemaica, come comunemente si crede; ma potrebbe ricevere una spiegazione anche innanzi i persiani.

(1) Chabas, *Recherches*, ec. p. 19. Lenormant, *La monn. dans l' antiq.* p. 94 seg.

(2) Cf. Homer. *Odyss.* I, 430. *Il.* XXIII, 703, 885; VI, 234. Plutarc. *Solon* 23. Plin *N. H.* XXXIII, 1. *Liv.* XXIX, 31.

Digitized by Google

di universale valuta, la cosa era semplice: e l' ordinaria scala ponderale avrebbe bastato anche per la gradazione de' valori. Ma poichè, al pari de' moderni, preferirono gli antichi di rendere egualmente spendibili i tre precipui metalli oro, argento e bronzo, tra lor diversi di pregio, fu d' uopo, (per non avere tre scale di valori diversi, con grave impaccio del commercio), introdurre comodi ragguagli tra le unità aurea, argentea ed enea, rimaneggiando così il sistema de' pesi per uniformarsi alla proporzione dei metalli.

L' Egitto faraonico era in questo caso; il premonetale servigio essendovi sostenuto da tutti tre insieme i metalli, sarà stato mestieri porne in accordo le rispettive unità; per ridurle a un comodo rapporto reciproco e conformarle a una stessa gradazione di valore. Pochi esempi, tratti da documenti faraonici, basteranno a porre fuori di dubbio l'uso contemporaneo dei tre metalli.

Ne' papiri jeratici del Museo di Leida e nelle jeratiche epigrafi del Museo Britannico, appartenenti all' epoca dei Ramessidi, abbondano i passi che pongono in evidenza il premonetale ufficio dell'*uten* di bronzo. Spigoliamone alcuni.

Un vaso di bronzo	30	*uten*
Altro vaso di bronzo	4	»
Un coltello	3	»
Una stuoia	2 ½	»
Una capra	2	»
Un rasoio di bronzo	1	»
Un paio d' anitre	¼	
Un ventaglio	¼	

E quando poi in queste registrazioni di valori tacesi per sorte la qualità del metallo, si ha l'avvertenza di dichiarare nelle somme *uten di bronzo* (1).

---

(1) Chabas, *Recherches* p. 16-19; *Cf.* p. 45-46. *Mélanges égypt.* I, serie p. 18; III. serie p. 217. Birch. *Journ. égypt. de Berlin*, 1868, p. 37. Lenormant. *La monn. dans l' antiq*, T. I, p. 95-96.

Digitized by Google

Fra queste liste di oggetti valutati in *uten di bronzo*, veggonsi in fatti computati talora altri simili *uten* metallici, aggiunti a modo di contante: p. e. 5 *uten di bronzo*, 1 *uten di bronzo* (1); che debbono essere appunto le spendibili unità del bronzo, onde parliamo.

Nè meno esplicita e indubitata è la menzione di premonetali unità d'oro e d'argento nell'ordinario commercio dell'antico Egitto.

In una importante stela istorica d'Abydos, avvertita dal Brugsch, ricordansi prezzi di campi al tempo della dinastia XXII: pagati l'uno, di 50 *sata* o misure, 5 *uten d'argento;* un'altro, di 100 *sata*, 10 *uten d'argento* (2). Ecco adunque *l'uten argenteo* in funzione di unità di conto e di prezzo.

Ma più ripetuta e particolareggiata menzione di spendibili unità aurea ed argentea ricorre in un prezioso papiro jeratico del Museo di Bulaq, pubblicato dal Mariette (3), e appartenente per epigrafici indizii alla prima età dei Ramessidi, ossia intorno all'esodo ebraico (4). Son pagine staccate di computi della più triviale mercatura; ma che hanno il merito grande d'averci conservato memoria del premonetale numerario egizio d'oro e d'argento. Son memorie, cioè, di quotidiani avanzi di carni e d'altri generi somministrati, con indicazione del prezzo, a rivenduglioli dagli amministratori di un tempio. Ma per malavventura nè il *nome*, nè il *peso* delle unità d'oro e d'argento quivi usate possono ricavarsi dal testo: il cui profitto non potrà quindi essere intero finchè altri documenti più espliciti non ci rivelino la giusta prolazione di quel vocabolo e, che più importa, il suo rapporto coll'*uten*.

---

(1) Chabas, *Recherches* ec. p. 17, 19.

(2) Chabas, *L c.* p. 20. Brugsch, *Journ. égypt. de Berlin* 1871, p. 85.

(3) *Les papyrus égyptiens du musée de Boulaq*. T. II Pl. III, IV. Cf. Chabas *L. c.* P. 22.

(4) Chabas *L. c.*

Digitized by Google

Nell' espettazione frattanto di queste sperate rivelazioni future sta pago lo Chabas di dare il generico nome di *pezzo*, pezzo d'oro, pezzo d'argento, a quelle ignote unità: la cui profferenza dubitativamente parrebbegli poter fosse essere *hiru*: che significherebbe *faccie*, *figure* (1). Il Lenormant preferirebbe di tentare la lezione *giru*, nella supponibile accezione di *gerah*, (l'obolo ebraico) (2). Se non che quel noto peso del *gerah* riesce, a più riscontri, inferiore all'uopo, (e il vedremo fra breve), chi volesse sostituirlo in quegli antichi registri all'incognito valore della disputata unità egizia di peso.

Or ecco alcuni esempi di estimazioni in *pezzi* d'argento e d'oro desunte dal nostro papiro.

Argento. « Teste di bue 3; di vitello 9; di manzo coscie 1: che fanno *pezzi* 3 ½; date per condotta, (macellazione?); che fa *pezzi* 1 ½; Totale *pezzi d'argento* 5... Carne di bue: teste 1: che fa *pezzi d'argento* ½.... Carne, che fa *pezzi d'argento* ½ » (3).

Oro. « Vino *Khet*... mine 1; che fa *pezzi d'oro* 4 ½... Carne macellata, mine 1; che fa *pezzi d'oro* 1. *Pezzi d'oro* 2 ½ per macellazione di carni... Teste di bue 2; che fa *pezzi d'oro* ½. Vino *khet*.... 1, che fa *pezzi d' oro* 3. Coscie di bue 1; che fa *pezzi d' oro* ½. Teste di vitello 5; che fa *pezzi d'oro* ½; totale *pezzi d' oro* 4... Vino *Khet*... mine 1; che fa *pezzi d'oro* 1 ½» (4).

Scarsa è, come abbiamo osservato, l' utilità ricavabile pei progressi della scienza da questi registri di prezzi, finchè le due unità dell'oro e dell'argento restano allo stato d'incognite, e non se ne scopra il ragguaglio con una quantità nota. Solo ci si pa-

---

(1) Chabas, *Recherches* p. 24.

(2) *La monn. dans l' antiq.* T. I, p. 107.

(3) Chabas, *Recherches*, ec. p. 27, lin. 2-5; p. 30, lin. 10; p. 31, lin. 4; p. 32, lin. 5; p. 33, lin. 5.

(4) Chabas, *Op. c.* p. 28 lin. 13, 14; p. 30, lin. 4; p. 32, lin. 7; p. 34, lin. 2-4; p. 35 lin. 6.

Digitized by Google

lesa il rapporto di valore che passa fra le due incognite stesse: poichè il nostro papiro là dove esprime la somma: « *Totale pezzi d'argento* 5 « aggiugne: *che sono pezzi d'oro* 3 » (1). Il *pezzo d'oro* valeva dunque 1 $^2/_3$ *pezzi d'argento*; e il *pezzo d'argento* equivaleva a $^3/_5$ di quello d'oro.

16. Da questo unico passo alcuni dotti insigni hanno creduto di poter ricavare anche la proporzione di valore fra i due nobili metalli: per la quale, con enorme divario da quelle di men lontane età, starebbe l'oro, per lor parere, all'argento come 5 : 3; o sia come 1 $^2/_3$: 1. (2).

Se non che correrebbe il preteso rapporto sol quando fosse certa la eguaglianza di peso delle due *incognite* unità d'oro e d'argento: eguaglianza però che non bastava supporre, e sarebbe stato mestieri provare. Tanto più che per la disparità di pregio de' due metalli fu ordinario partito disguagliare in antico il peso rispettivo delle spendibili unità de' metalli. Nè l'identità del nome è bastante argomento della medesimezza del peso fra' due faraonici *pezzi* d'oro e d'argento; come non basterebbe a provare l'equiponderanza fra *statere* d'oro e *statere* d'argento, che a comune notizia furon diversi. Chi fra un tre altri millenii, ad esempio, venisse a scoprire in alcun registro del secolo scorso il ragguaglio di 6 *ducati d'argento eguali a* 3 *ducati d'oro*, mal s'argomenterebbe di dedurne la proporzione 1 : 2 fra quei metalli.

Non si vuol perdere di vista, che il nostro papiro è attribuito in circa al tempo dell'esodo. A' giorni di Salomone l'abbondanza avea reso vile a Gerusalemme l'argento: *abundantia argenti in Jerusalem quanta et lapidum* (3); e tra le dovizie dell'aureo vasellame reale l'argento era sdegnato e bandito: *non erat argentum, nec alicuius pretii putabatur in diebus Salomonis* (4).

---

(1) Chabas, *L. c.* p. 27 lin. 5.
(2) Chabas, *L. c.* p. 37. Lenormant, *La monn. dans l'antiq.* T. I p. 98.
(3) III Reg. X, 27.
(4) *Ib.* X, 21.

Digitized by Google

Par duro a credere, a soli quattro secoli di distanza, sì meraviglioso sbilancio nel pregio di questo metallo.

Donde aveane a essere sgorgata tal copia da far quasi tenerlo a vile? Forse che appunto in quel torno eransi dischiuse al commercio le argentifere miniere dell' Attica (1) e della Spagna? Concessa pure l' ipotesi, a non impigliarci in disputazioni di cronologia metallurgica, gli effetti non sarebbero meno incredibili. Fosse una California che avesse improvvisamente versati tutti i suoi nascosi tesori l' effetto non poteva essere tanto. La scoperta delle Americhe, la cui annuale produzione stimavasi dall' Humboldt 17000 chilogrammi d' oro e 800, 000 d' argento (2), non riescì ad elevare, in cifre tonde, il rapporto dei due metalli che da 1 : 10 ad 1 : 15.

La discesa dell'argento per le miniere d' America non fu quindi che da 10 a 15 gradi d'inferiorità a fronte dell' oro; o sia da 1 a 1 $^1/_2$: dove la differenza non è che la metà del valore di prima. Laddove nel periodo corso da Mosè a Davidde bisognerebbe supporre avvenuti fenomeni di metallurgica e d' economia politica di una relativa importanza e potenza decupla di quella della moderna scoperta delle due Americhe. Sol che suppongasi all'età di Davidde un medio rapporto 1 : 10 fra i due metalli, sarebbe precipitato l' argento dal preteso rapporto faraonico 3 : 5 al davidico 1 : 10, o sia 3 : 30; vale a dire da 5 a 30, cioè da 1 a 6. Dove la differenza, 5, è *quintupla* del valore di prima, e però *decupla* di quella portata dalle miniere del Messico e del Perù. Risultato inammissibile affatto: qualunque voglia supporsi la disparità di commerciali circostanze ne' due periodi.

---

(1) Gli accurati studi del Letronne hanno fatta del resto palese la mediocre importanza delle attiche miniere del Laurium (*Mémoire sur la population de l' Attique;* ne' *Mémoires de l' Institut Royal de France: Académie des Inscr. et Bell. Lettr.* T. VI, 1822 p. 206 seg.

(2) Say, *Cours complet d' économie politique.* Bruxelles 1845 p. 122.

Digitized by Google

L' impossibilità della conseguenza rifondesi sulle premesse: dee adunque nascondersi errore nel supposto rapporto faraonico 3 : 5 fra l' argento e l' oro.

Vero è che l' ovvia ricerca dell' oro nativo, splendente a fior di terra, tra le sabbie de' fiumi, e allettante la facile industria di chi il raccolga e dilavi, dovette aver fatto precedere la scoperta e l' uso di esso a quella dell' argento: che conviene sprigionar dalla roccia e penosamente estrarre di profondo. Onde spiegasi il perchè dessero a questo gli egizii il nome d' *oro bianco*, (che così suona il geroglifico suo): quasi non fosse che una nuova specie d' oro d' altro colore. E consuona anche la sua greca radice *ἀργός*, *ἄργυρος*: desunta dalla sua abbagliante bianchezza. Onde non sarebbe inverisimile, che sui primissimi tempi dell' uso de' due metalli assai minore ne fosse il disguaglio; o fors' anche ne fossero momentaneamente invertite le parti: sin che il prestigio della novità e rarità fosse sfatato, e al prevalente merito ed utile dell' oro fosse fatta ragione. Ma l' età di Mosè era troppo lontana da que' remoti principii: preceduta da secoli e secoli d' arti e commerci, d' opulenza e splendore.

Le sacre tradizioni dei popoli arretrano a' più lontani confini l' uso de' metalli preziosi; e gl' incunaboli della metallurgica son da esse riferiti al primo stadio della umana famiglia. Segno che quei principii erano ormai fuori d' ogni memoria dell' uomo. La caldaica narrazione del diluvio, più antica del *Genesi*, e raccolta dallo Smith tra' cuneiformi apografi delle vetuste tavole di Erech, registra *argento e oro* tra i beni cumulati nell' arca (1); il racconto biblico poi riporta assai oltre la grande catastrofe la nascente industria de' primi malleatori del ferro e del rame, e ricorda per sino oro nativo lungo i fiumi dell' Eden (2). Era

---

(1) In mancanza dell' originale libro dello Smith, cito una rivista di giornale. *Civiltà catt.* Ser. X, vol. VII 1878, p. 535.

(2) *Genes.* IV, 22; II, 12.

Digitized by Google

adunque l'età mosaica lontana d' assai da ogni rimembranza della prima introduzione de' metalli preziosi.

Si è creduto che il vedere talvolta in monumenti egizii registrato l' argento innanzi all' oro possa essere indizio di poziorità di valore (1); ma è indizio fallace. Poichè quell' anteposizione come ricorre nelle or citate tavole di Erech per l' età noetica, così ripetesi dalla Bibbia per quella di Salomone: quando la copia soverchia avea, per così dire, vilificato l' argento (2). Anche nell'egizio romanzo di *Setnau*, in scrittura demotica, (indizio notissimo d' età non molto lontana dall' era volgare), tra' doni offerti a una giovine sposa la menzione degli argentei è premessa a quella degli aurei (3): benchè a que' tempi non potesse cader dubbio sulla precedenza di pregio tra i due metalli. Anzi nel romanzo medesimo narrandosi di un misterioso volume, gelosamente custodito entro sei scatole concentriche l' una più preziosa dell'altra, l'ordine delle materie onde ciascuna scatola componeasi è questo: ferro, rame, bronzo, ebano e avorio, argento, oro; e in quest'ultima chiudevasi il libro (4).

Eziandio ne' presenti del sevro d' Abramo a Rebecca va per sorte innanzi l' argento: *prolatisque vasis argenteis et aureis... dedit.... Rebeccae* (5). Mere inversioni d' ordine, insufficienti a provare l'inversione di pregio. Non sempre gli antichi narratori dovettero credersi vincolati alla stretta osservanza delle precedenze metalliche. Talvolta, nella enumerazione di donativi, potè preferirsi l' ordine crescente *a minori ad maius:* tal' altra potè aversi in vista non la relativa nobiltà de' metalli, ma il rispettivo importare dei doni. Là dove narrasi essere uscito Abramo d' Egitto

---

(1) Lepsius, *Die Metalle* ec. p. 5I.

(2) III Reg. X, 25, 27.

(3) Brugsch, *Le roman de Setnau;* nelle *Rev. arch.* T. XVI, 1867 p. 162 lin. 6, 8.

(4) *Ib.* lin. 19.

(5) *Genes.* XXIV, 53.

Digitized by Google

dives valde in possessione auri et argenti (1), a ragione l'oro, (l'oro egizio, si noti), va avanti d'ordine, come di merito: trattandosi di mera relazione tra metallo e metallo. Mentre nel prezioso vasellame offerto alla nuora ben potrebbe l'abbondare appunto degli argenti aver vinto d'importanza e valore gli ori, più nobili sì, ma per avventura più scarsi.

17. Certo che improvvisi sbalzi e locali ristagni non dovettero mancare, allo scoprirsi di qualche nuova miniera, (come fu di quelle dei taurischi) (2), o al primo esser dischiusa e sfruttata qualche aurifera od argentifera regione segregata dianzi dal commerciale consorzio. Come nella moderna età è stato del Messico e del Perù, dove sui primi istanti barattossi oro per ferro; o come fu, nell'antica, in qualche angolo di Arabia ricordato da Diodoro, dove parimenti si diè oro per rame e per ferro, più utili e ricercati metalli (3). Ma dovettero essere passeggieri disequilibrii; poichè la ravvivata circolazione e la universale incetta avean ben presto a ravvicinare i livelli: e l'economico fenomeno quanto acquistava di superficie tanto dovea perdere di intensità.

Per difetto di opportune fonti a cui ricorrere non saprei quanto potessero essere attribuibili per sorte a simili casi e periodi eccezionali certi insoliti rapporti tra' due metalli ricordati talvolta dagli scrittori; come il valore dell'oro duplo di quello dell'argento e triplo di quello del bronzo tra' Sabei, per testimonio di Strabone (4), o l'indica proporzione $2\,{}^1/_2 : 1$ tra oro ed argento al tempo di Manu, (meno antico che non si pensi), per fede del Burnouf (5). Non è disdetto per altro di diffidare

---

(1) *Genes.* XIII, 2.
(2) Mommsen, *Hist. rom.* vers. di C. A. Alexandre, T. V, p. 131.
(3) Diodor. Sicul. III, 47; II, 50.
(4) Geogr. XVI, 778.
(5) Cf. Lenormant, *La monn. dans l'antiq.* T. I, p. 98.

Digitized by Google

della esattezza di que' singolari rapporti, mentre in questa età di lumi e di scienza economica veggonsi equivocare talora, nell' ancipite materia, i più prestanti ingegni.

Da un passo di Omero, per esempio, si è preteso dedurre un rapporto di circa 11 : 1 tra oro e rame; ma è deduzione da non poter reggere alla critica. L' illustre Curtius, al vedere apprezzate nell' Iliade *cento* buoi le auree armi di Glauco e *nove* quelle di rame di Diomede (1), stima aver dovuto trovarsi all' età omerica oro e rame in un *costante rapporto* 100 : 9 (2); vale a dire come 11 $\frac{1}{9}$: 1. La quale proporzione, se fosse vera, renderebbe plausibile l' altro supposto ragguaglio egizio 5 : 3 tra oro ed argento, che or stiam discutendo.

Se non che quel preteso rapporto omerico non fondasi in fatto che sopra tre supposti egualmente gratuiti: vo' dire sulla supposizione di una triplice parità, di dimensioni, di peso, di lavoro, fra le due armature. Data pure, per poco probabile ipotesi, una perfetta parità di arte, se Glauco non vestiva ed impugnava armi di pigmeo, l' armatura di lui dovea pesare assai più di quella dell' emulo; poichè i pesi specifici dell' oro e del bronzo stanno come 19,4 : 8,9: cioè, per lata approssimazione, come 20 : 9. Il perchè l' unità del peso del bronzo avrebbe avuto il valore d' *un* bue, quella dell' oro di *cinque*: riuscendone così la proporzione metallica non più 11 $\frac{1}{9}$: 1 ma 5 : 1 all' incirca.

Ma il fatto è, che niuna delle supposte tre parità è gratuitamente ammissibile; e verisimilmente le armi di Glauco non eran tutt' oro: tali, cioè, da avere, con inutile spreco, più aggravato e meno difeso il guerriero. Se quelle armi fossero state rivestite sol d' aurea lamina, o semplicemente inaurate, o rabbellite d' aurei fregi, il poeta potea egualmente dirle *armi d' oro*. Se Omero avesse avuto a cantare il superbo pugnale della

---

(1) *Il.* VI, 234.

(2) *Storia greca* vers. ital. di Müller e Oliva; Torino 1876 T. I, p. 145.

Digitized by Google

regina Aah-hotep, trovato dal Mariette, avente impugatura d' oro con lama aurea solo nel taglio, e nel resto formata d' una bruna e forte lega metallica ornata di damaschinature (1), ben avrebbe potuto chiamarlo *aureo pugnale.* Questo esempio può darci un più esatto concetto delle antiche armi di lusso, come quelle di Glauco; escludendo quindi la possibilità di esatti confronti di peso e valore con quelle di Diomede. Ma rimettiamoci a filo.

È sperabile che il progredire degli studi e delle scoperte nell' inesauribile campo delle egizie antichità finisca di svelarci tutto intero il sistema faraonico, e con esso eziandio la egizia proporzione di valore fra i tre spendibili metalli, oro, argento e bronzo. Ma frattanto ci è forza star paghi di congetture e divinazioni probabili, e tenere premuroso conto d' ogni minimo indizio che appaia, anche indiretto.

18. Le frequenti enumerazioni di somme d' oro e d' argento che ricorrono ne' monumenti faraonici non sono tali, a mia notizia, da fornirci un accertato parallello tra i due metalli. Siaci lecito adunque di riferircene in alcun modo ad altra fonte, che sebbene non egizia è però d' indubbia vena e scaturigine niliaca.

L' Egitto faraonico, che a' tempi di cui parliamo era alla testa della civiltà, dovea abbondare d' oro e d' argento; non per miniere ch' esso ne contenesse, ma perchè per naturale forza delle cose colà affluiscono i metalli preziosi dove commercio ed industria, e privata e pubblica ricchezza, e civile e politica preponderanza li attraggono. E come Abramo era uscito d' Egitto *ricco assai in avere d' oro e d' argento* (2), così mezzo millenio appresso (3) ne escivano egualmente arricchiti i discendenti di

---

(1) Chabas, *Études sur l' antiq. hist.* p. 43.

(2) *Genes.* XIII, 2.

(3) *Exod.* XII, 40. Cf. Rougé, Rivista dell' opera del Bunsen *Die Aegypten stelle in der Weltgesichte,* negli *Annat de phil. chrêt.* Ser, III, T. XIII, 1846 p. 453 - 457.

Digitized by Google

lui: ai quali, sul porsi in via, erasi fatto il comando *ut postulet vir ab amico suo et mulier a vicina sua vasa argentea et aurea*; sì che ne fu spogliato l' Egitto (1). E qui pure è a notarsi di passo la stessa precedenza dell' argento; non certo per ragione di rarità, ma probabilmente di relativa abbondanza.

Scampati i profughi in libertà fabbricarono nel deserto un tabernacolo a Dio; e le sacre carte per ventura ricordano quanto essi v' impiegassero d' oro e quanto d' argento. Di questo secondo metallo bastò la prima annata del sacro testatico: mezzo siclo per ciascun uomo maggiore d' anni venti (2). E furono, per 603550 armati, sicli 301775; o sia 100 talenti e sicli 1775: adoperati i talenti nelle basi di altrettante colonne, e quell' avanzo di sicli a ornamento de' capitelli di esse (3). Quanto all' oro invece fu fatto appello alla generosità del popolo: richiesto di spontanee offerte, o *primizie*, pel tabernacolo santo (4). E uomini e donne offerirono a gara, *mente promptissima atque devota .... armillas et inaures, annulos et dextralia : omne vas aureum in donaria domini separatum est* (5): che fu un ricavato di 29 talenti e 730 sicli d'oro (6).

Or se una semplice tassa, d' uomini soli, e tanto modica da non gravar le fortune anche più povere, *(pauper nihil minuet,... dives nihil addet)* (7), fruttò più che il triplo d'argento di tutti gli ori offerti a Dio per concorde slancio di tutto intero il popolo, che sarebbe stato se anche gli argenti e tutto l' argenteo vasellame portato d'Egitto si fosse versato del pari? Qui l'immaginazione ricorre, non già al preteso rapporto 5: 3 fra i due metalli,

---

(1) *Exod* XI, 2; XII, 35, 36.
(2) Ib, XXX, 13, 14.
(3) Ib, XXXVIII, 25 - 28.
(4) Ib. XXV, 2; XXXV, 5.
(5) Ib. XXXV, 21, 22.
(6) Ib. XXXVIII, 24.
(7) Ib. XXX, 15.

Digitized by Google

(che pur qui erano quelli appunto d'Egitto), ma ad altri famosi e più congrui ragguagli; per esempio, a' tesori da Davidde ammassati per la fabbrica del tempio: cento mila talenti d'oro e dieci tanti d'argento (1). Ch'è la proporzione stessa de' molto maggiori tesori accatastati sulla pira di Sardanapalo, secondo le persiane leggende arrivate a noi per l'eco di Ctesia: un milione di talenti d'oro e dieci milioni d'argento. Dove però, per la disparità de' talenti cui i persiani novellatori dovean riferirsi, l'apparente ragguaglio 1 : 10 convertesi nell'altro notissimo degli Achemenidi 1 : 13 $^1/_3$.

19. Questo ragguaglio stimano i metrologi dover nell'Asia riportarsi oltre l'esodo ebraico. Poichè le asiatiche prede e contribuzioni d'oro e d'argento, ragguagliate in *uten* egizii da Thothmes III ne' marmorei suoi annali di Karnak, corrisponderebbero, per computo del Brandis, a esatte somme di sistema babilonese; nel quale le unità dell'oro e dell'argento eran tra loro proporzionate a norma di quell'avvertito ragguaglio 13 $^1/_3$: 1 (2). E il Lenormant, (a fianco al supposto suo rapporto egizio 5:3), ammette al di là dell'istmo quel babilonese ragguaglio, durato ab immemorabili per tutta l'Asia anteriore e mediterranea insino al Tigri (3).

Ma tale disequilibrio di valori in tanta vicinanza di luoghi, e nelle politiche e commerciali condizioni d'allora, è un economico fenomeno difficilmente ammissibile. Una somma d'argento, necessaria all'acquisto di una data quantità d'oro nell'Asia, avrebbe potuto acquistarne otto tanti in Egitto; e l'oro egizio, e converso, avrebbe ottuplato di prezzo nell'incetta dell'argento dell'Asia. Due contrarie e irresistibili correnti sarebbonsi quindi determinate: l'uscita dell'oro e l'entrata dell'argento in Egitto; finchè

---

(1) I *Paralip.* XXII, 14.
(2) *Das Münz - Mass.* ec. p. 91 seg.
(3) *La monn. dans l'antiq.* T. I p. 98, 146.

Digitized by Google

se ne fossero, almeno prossimamente, livellati i rapporti. Niuna barriera avrebbe valuto a interrompere quel flusso e riflusso: perchè la forza delle cose prevale a ogni umano ordinamento contrario. « Nulle marchandise, (scrivea uno degli economisti più esperti), ne brave plus aisement les efforts que l' on tente pour arrêter sa marche... Nulle contrebande n' était plus constante, ni plus facile, que celle qui faisait passer autrefois des piastres d' Espagne en France » (1).

Avesse pur voluto l' Egitto segregarsi dagli altri popoli, come fino a' dì nostri avealo fatto la Cina, l' argento asiatico ciò non dimeno sarebbesi versato sul Nilo; come buona parte di quello d' America si è sempre aperta la via del celeste impero, povero di quel metallo. Ma tutt' altro che sequestrato ed interdetto paese era l'Egitto all'età onde parliamo; e colle fonti egizie concordano le bibliche e le greche nel mostrarcelo aperto al libero commercio delle nazioni.

Omero, il quale magnifica le proverbiali ricchezze ch' entravano per le cento porte di Tebe (2), fa veleggiare fin colà, anzi sino in Etiopia, greci navigatori; e in quella metropoli de' faraoni adduce Elena e Menelao, accoltivi con onore e donati di ricchi presenti d' oro e d' argento (3). E molti secoli innanzi la Bibbia ci mostra liberamente peregrinare Abramo e Lot in Egitto, con numerosi famigli e greggi ed armenti (4); e carovane di madianiti convenirvi per lor commerci (5); e iteratamente recarvisi per incetta di grano i figliuoli di Giacobbe, colla turba famelica degli asiatici compratori (6), accorrenti a quel-

---

(1) Say, *Cours complet d' économie polit.* p. 270.
(2) *Il.* IX, 383.
(3) *Odyss.* IV, 125 - 131.
(4) *Genes.* XII, 10, 16.
(5) *Ib.* XXXVII, 28: XXXIX, 1.
(6) *Ib.* XLII, I, 2, 5; XLIII, 15.

Digitized by Google

l' universale mercato di cereali aperto a ogni gente (1); ed emigrarvi poi e stabilirvisi tutto il nascente popolo ebreo (2); indi scamparne il giovine Mosè, amichevolmente accolto, sebbene egizio (3), nella terra di Madian (4); poi francamente tornarvi con straniera moglie e figliuoli (5).

Questi ellenici ed israelitici episodi armonizzano in tutto col quadro che dell' Egitto d' allora dipingono i monumenti geroglifici.

Situato fra due mari e corso dal massimo fiume allora noto, era dalla natura predisposto l' Egitto a divenire l' emporio universale: e bene avea saputo profittare di quella fortunata posizione. Egizie flotte, da guerra e da carico, solcavano ambi i mari, altresì a' tempi del primo impero (6); e fin d'allora sepolcrali dipinti della dinastia XII mostrano la conoscenza dagli egizii acquisita de' proprii tipi e costumi delle varie razze umane, e le relazioni contratte, pel commercio, soprattutto colle genti dell' Asia (7). Relazioni ognora più ristrettesi quando per più secoli l' Egitto dovette accogliere asiatici signori, gl' *Hyksos;* e vie più ancora quando, riscossosi al fine, ed invertite le parti, di dominato seppe rendersi dominatore.

Durante l' egizia supremazia sull' Asia contermine, sino all'Eufrate ed al Tigri, (che fu per tutte le dinastie XVIII e XIX e parte della XX), in che appunto cadde il periodo onde parliamo, mostrano gli annali faraonici come a piene mani si attingesse da' metallici tesori di quelle contrade (8): sotto forma di tributi,

---

(1) *Ib.* XLI, 57.
(2) *Ib.* XLVI, 6.
(3) *Exod.* II, 19.
(4) *Ib.* II, 15.
(5) *Ib.* IV, 20.
(6) Rougé, *État actuel de toutes le découvertes faites en Égypte dans leurs rapports avec la Bible;* negli *Annal. de phil. chrét.* T. XII. 1855, p. 258 Chabas, *Études sur l' antiquité hist.* p. 123, 151, 213, 309, 422,
(7) Rougé, *Op. c.* p. 254.
(8) Rougé, *Études égyptiennes:* negli *Annal. de phil. chrét.* Ser. V, T. I, 1860, p. 344.

Digitized by Google

di contribuzioni guerresche, di prede (1). E non che veder chiusa la valle del Nilo alla libera circolazione di merci e persone, vedrannosi egizii viaggiare e stanziare nell' Asia per ragione di milizia o d' ufficio, e nativi dell' Asia frequentare per lor traffici l' Egitto (2). Anzi perfino alleanze di famiglia fra' principi d' Asia e i despoti d' Egitto venivano a suggellare i nazionali rapporti; come le nozze di Ramses II colla figliuola del capo dei Cheta (3): con che si chiuse la vittoriosa campagna del re contro quell' indomita nazione, costretta a segnare, (in lamina d' argento), un trattato di pace arrivato insino a noi (4). Nuziali alleanze, cui fan riscontro altri men remoti connubii; quello, ad esempio, della figlia reale d' Egitto condotta sposa da Salomone (5); e l' altro dell' idumeo Adad, scampato al ferro israelita, e divenuto a Tebe cognato di Faraone (6).

In queste condizioni di cose non è per verun modo credibile che i metalli preziosi trovassero intoppo e patissero ristagno alle porte d' Egitto. Iscrizioni monumentali eternarono anzi la memoria del loro affluire nel regno. La geroglifica epigrafe della facciata del tempio d' Abydos, in un lungo discorso di Seti I, (padre di Ramses II), ricorda il prezioso carico di una nave del *Gran Mare*, il Mediterraneo, da lui offerto al nume; oltre ai tesori apportati dal *To - Nuter*, (Arabia ed ultimo Oriente) (7), e da' *mercatanti che mercanteggiano d' oro, d' argento, e di bronzo* (8). Anche la grande iscrizione di Medinet - Habu magnifica l' arrivo

---

(1) Birch, *Observations on the statistical Tablet of Karnak*: nelle *Transactions of the Royal Society of Literature*, New Ser. T. II. Rougé, *Inscr. de Karnak* nella *Rev. arch.* T. II 1860, p. 287 seg.

(2) Rougé, *État actuel* ec. *T. c.* p. 258.

(3) *Id. Op. c.* p. 259.

(4) *Rev. arch.* T. XIII, 1866, p. 268-75.

(5) III *Reg.* III, 1.

(6) *Ib.* XI, 19.

(7) Chabas, *Études sur l' antiquité hist.* p. 143 seg.

(8) *Id. Recherches* ec. p. 25.

Digitized by Google

di popoli asiatici offerenti a Ramses III lor pieni forzieri d'oro e d'argento (1).

20. Se veramente la proporzione $13\frac{1}{3}$: 1 tra i due metalli così ab immemorabili durava nell'Asia come reputa il Brandis e con esso il Lenormant: proporzione sotto la quale mai nell'antichità non discese l'argento, (mantenutosi anzi alquanto più elevato per tutto altrove, come al $12\frac{1}{2}$: 1 nell'Egitto tolemaico, al 12 : 1 ricordato da Platone nell'*Ipparco*, al 10 : 1 ritenuto dal Mommsen come il più comune degli antichi rapporti) (2), parrebbe sommamente credibile che anche gli argentiferi strati d'Europa, vo' dire gli attici e soprattutto gl'iberici, sin da quei tempi rimoti avessero già avuto ad influire nella circolazione generale. Senza di che al primo disserrarsi di quelle nuove sorgenti un sensibile ribasso dell'argento avrebbe dovuto avverarsi; del quale però dopo i tempi di cui parliamo non è rimasta memoria.

Fatto è che nuovi nomi di arditi navigatori di Occidente, sardi, tirreni, siculi, pelasgi, aveano già cominciato ad apparire sin d'allora ne' monumenti e negli annali d'Egitto. Fin dagli esordii del suo lunghissimo regno Ramses II, (morto poco prima dell'esodo), aveva avuto i primi per nemici; poscia per ausiliari (3). E il figlio di lui Menephtah I, e il successore Ramses III, ebbero a difendersi da leghe di que' popoli: cresciuti a tanto di forze e di ardimento da tentare la conquista dell'Egitto (4). E siccome il venir crescendo a potenza di quelle genti, fornite già di marine militari nel secolo XV A. C. (5), non poteva datare dal jeri; e avea a essere stato preceduto da secoli di progressivo incremento e sviluppo; non è inverosimile che i metalliferi terreni occidentali avessero impreso a sfruttarsi

---

(1) Chabas, *Études sur l'antiq. hist.* p. 115.
(2) *Hist. de la monn. rom.* vers. Blacas. T. I, p. 15.
(3) Chabas, *Études* ec. p. 186, 187.
(4) *Id. Op. c.* p. 187 seg; p. 227 seg.
(5) *Id. Op. c.* p. 187.

Digitized by Google

da vetuste genti di mare e di traffico, innanzi ancora che i fenici fossero da quelle richezze allettati a popolare di lor colonie i lidi mediterranei, e oltre Calpe, gli atlantici.

E altro indizio che sin dall' età d' Abramo dovesse l' argento relativamente abbondare nell' Asia, è il vedervelo tenere fin d'allora ufficio di ordinario valsente (1); come continuò ad avervelo a' tempi di Giacobbe (2), non che a quelli di Mosè, dal quale ogni legale estimazione di valore, tributi, multe, ammende, rendenzioni, espiazioni, era prescritta in argento (3).

Ma checchè più veramente sia a credersi, e donde che si voglia far provenire quell' asiatico argento; e avesse pur potuto effondere da sola tanta dovizia la pontica Alibe, *ricca dell' argentea vena*, cantata da Omero (4); questo è indubitabile almeno che non avrebbe potuto l'argento raggiungere la proporzione 1 : 13 1/3 coll'oro nell'Asia, senza averla eguale, o prossima assai, nel contermine Egitto.

21. Il perchè spontaneamente rinasce, e vie più s' insinua nell' animo, l'avvertito sospetto che l'etiopico *pak*, rivelatoci dalla stela d' Hor-si-atef, non sia davvero, al pari dell' *uten*, che un peso egizio adottato in Etiopia: un egizio prodotto della proporzione raggiunta da' due nobili metalli sul Nilo. Quell' aureo *pak* contenuto 12, 8 volte nel *kat* sarebbe l' aureo equivalente del *kat* d' argento, quando la proporzione fra i due metalli fosse stata 12 4/5 : 1 in Egitto. Rapporto sì prossimo a quello dell' Asia vicina, da ingerirsene una urgente presunzione che abbia a essere il vero.

Il poco divario tra 12 4/5 e 13 1/3 da paese a paese non può fare difficoltà. È un semplice 4 p. %; attribuibile alle ordinarie variazioni da luogo a luogo nel valore dell' argento: variazioni, che anche oggidì il diverso corso del cambio nelle singole piazze fa

(1) *Genes.* XXIII, 15, 16; XX, 16.
(2) *Ib.* XXXVII, 20; XLIII, 22; XLV, 22.
(3) *Exod.* XXI. 32; XXX, 13, 23. *Levit.* V, 15: XXVII, 3, 5, 25, ec.
(4) *Il.* II, 857.

Digitized by Google

manifeste. Son molteplici e tutt' altro che incognite le cause di questi locali divarii; come non men note, e multiformi del pari, son le economiche difficoltà che ne impediscono la totale eliminazione: spese di trasporto dei metalli preziosi, divieti di esportazione, rischi di viaggio ed altrettali (1).

Altra cagione di differenze esser doveva il vario apprezzamento legale del relativo pregio dei metalli quando ne' diversi paesi se ne venne stabilendo il rispettivo ragguaglio. Dovunque si volle far servire ad uso di valsente più di un metallo, oro, argento, rame, fu indispensabile eliminare le incertezze sul reciproco loro rapporto; e per pubblica autorità si dovette determinarne il valore legale. Economico errore per fermo; ma non isradicato ancora sin qui. Per quanto sia scrupolosamente determinato quel *legale* rapporto tra gli spendibili metalli in un dato momento, l' immobilità sua il condanna a dispaiarsi in breve dal *reale*; oscillante a seconda della varia ricerca e produzione metallica. E non sarebbe quindi impossibile che mentre nell' epoca da noi discorsa, ci si mostrano due legali rapporti, l' asiatico di $13\ ^1/_3 : 1$ e il supposto egizio di $12\ ^4/_5 : 1$, entrambi si fossero a sorte scostati, l'uno in più l'altro in meno, dal vero; e l'effettivo e reale rapporto comune fosse frammezzo a tutti due. Condizione di cose però, che avrebbe dovuto far preferire i pagamenti in oro nell' Asia, e in argento in Egitto: sopra di che non abbiam lume di sorta da poter trarne buon partito.

22. Or se dovesse ammettersi, per non inverosimile supposto, che l' Egitto faraonico si fosse veramente creato quell'aurea unità del *pak* per equivalenza del *kat* d'argento, è chiaro che gl' ignoti *pezzi d' oro e d' argento*, che abbiam visti servire a prezzo di carni e di vini nel ricordato papiro di Bulaq, dovrebbero essere adunque regolati sopra quelle due rispettive unità del *pak* e del *kat*.

Verisimilmente però il pezzo d' argento non avrebbe a essere il giusto *kat*; parendo che in tal caso non avrebbe dovuto perderne

(1) Cf. Say, *Cours complet d' économ. polit.* p. 270.

Digitized by Google

il nome. Nè probabilmente dovrebb' esserne un divisore; perchè il ragguaglio de'3 *pezzi d' oro* coi 5 *d' argento*, portato dal papiro, renderebbe *l' aureo* di una esiguità incomoda nella circolazione. Di guisa che parrebbe forse più supponibile che l'*argenteo* avesse a essere un multiplo del *kat.* Ma quale?

Ecco fin dove ci avrebbe passo passo guidati l' attento e minuzioso esame de' documenti e dei fatti. Ma a questo termine l' usata scorta ci abbandona; e al di là di esso non appare che il buio.

Bello però sarebbe tra queste folte, e veramente palpabili, tenebre egizie poter aprire alcun fortunato spiraglio: da poter riceverne un raggio, se non di piena luce diurna, almeno d'incerto barlume. Rischiar la prova non nuoce: proviamci.

Tento la stessa via per cui in altro mio precedente lavoro mi riescì di chiarire che il disputato *Talento Omerico* non potea essere che un siclo (1): un orientale *shekel*, letteralmente espresso dai greci pel corrispondente loro *τάλαντον* innanzi che questo nome fosse dalla piccola unità di peso (che si prese a dire *στατήρ*) trasferito alla massima del *kikkar*: ignota alla prisca Ellade e provenuta, in più tarda età, essa pure da Oriente.

Vediamo pertanto se fra i prezzi delle varie parti di bue registrati nel nostro papiro si ascondesse per gran ventura il bandolo che noi cerchiamo.

Non parlo de' preziosi vini, valutati per *mine* nel papiro, essendoci ignota questa misura e mancandoci d' altronde utili punti di confronto. Nè meglio giovano i prezzi vitellini; perchè l' incertezza dell' età introduce un' incognita, che vizia i fondamentali elementi del calcolo. Ne' bovini prezzi poi è aperta l'inutilità di quelli applicati a mal determinabili quarti di bue; e di quelli pure delle *teste*, che anche lo Chabas meravigliava di veder

---

(1) *Del Talento Omerico*: nelle *Commentationes philologae in honorem Theodori Mommseni scripserunt amici:* Berolini 1877, p. 282 - 290.

Digitized by Google

elevate di pregio in Egitto, mentre son parte di rifiuto per noi, abbandonata ai consumatori più abietti (1).

Buon giuoco potrebbe fare la *mina* di carne macellata se, come s'è detto, la contenenza di quella misura non ci fosse nascosta. Il Lenormant ha creduto di riconoscervi una *mina peso* (2); se non che in tutto il papiro non si ha menzione di carni a peso; ma solo a pezzi o a misura. E anche poco innanzi son ricordati piramidali vasi ripieni di carni trinciate (3). Del resto un *aureo* per una sola *mina* di carne, come porta il papiro, sarebbe enormissimo ed incredibile prezzo. Se un coscio di bue, che peserà 50 a 60 delle *mine* più forti, valeva *mezzo* aureo, come potrebbe l' unica *mina* valere l' *intero*?

Fortunatamente però, mentre ogni altro punto di appoggio ci sfugge, ci resta un dato che può compensare l' inconcludenza degli altri. Nota il papiro una coscia di bue del valore di *mezzo aureo*; e la coscia è per sorte una bovina aliquota esatta abbastanza. Così ho appreso da uno de' più esperti nostri capi di macello, alle cui tecniche cognizioni ho dovuto fare ricorso; come a sua volta avrà avuto a fare pur esso, a dichiarazione del singolare papiro, l' illustre Chabas.

Negli ordinarii nostri buoi macellati, del medio peso di chilogrammi 320 — 340, la coscia si calcola chilogrammi 60: pognamo, per tonda approssimazione, $\frac{1}{6}$ dell' intero animale. Ora poichè il papiro assegna alla coscia di bue il valore di $\frac{1}{2}$ *pezzo d' oro*, il prezzo del bue sarà di 3 *aurei*. Preziosa notizia; tanto più che ne abbiamo anche il ragguaglio in argento: 3 *aurei* eguali a 5 *argentei*, come il papiro ne insegna (4).

---

(1) *Recherches*, ec. p. 26 nota 2.

(2) *La monn. dans l' antiq.* T. I, p. 107.

(3) *Obelischi pieni di minuzzoli di carne* (Chabas, *Recherches* p. 28 lin. 16). Ed eran vasi in forma d' obelischi, destinati a contenere incensi, vivande, ec.

(4) È vero che altrove il papiro registra *una coscia* del valore di *mezzo pezzo d' argento* (p. 30, lin. 11); ma non esprime se sia di vitello o di bue;

Digitized by Google

Onde fin d'ora siamo in grado di accertare che il *pezzo aureo* non poteva essere il *pak*. Se lo fosse, il prezzo d'un bue sarebbe 3 *pak* d'oro; e siccome troveremo più innanzi il prezzo d'un bue in *uten di bronzo* 119 + x, che sono *pak* di bronzo 15232 + x, il rapporto tra bronzo e oro sarebbe 1 : 5074 + $x/3$. Impossibile rapporto: quadruplo, o quintuplo del vero, per quanto può fondatamente arguirsi dai noti ragguagli antichi fra que' due metalli (1). Dovea quindi essere il *pezzo d'oro* quattro o cinque volte più forte del *pak*.

23. Prendere la cosa a ritroso e da quel bovino prezzo di bronzo ricavare il valore del *pak* d'oro non può approdare a buon termine: per l'incertezza sull'esatto rapporto metallico, e per l'impossibilità di eliminare la incognita x. C'è dunque d'uopo attenerci alla via battuta nella ricerca del talento d'Omero.

E per non ripetere qui tutto il discorso già altrove, siane lecito assumere senz'altro il congetturale valore a peso d'argento, che in quella mia memoria risulta aver potuto avere il *bue* tra l'esodo ebraico e l'Iliade omerica. Presi a base (in quella memoria) i rapporti istituiti dal poeta fra' suoi *bovi* di conto (2) e i suoi *talenti* dell'oro (3); e messili a riscontro da un lato col mosaico ariete valutato 2 sicli d'argento (4), e dall'altro

---

oltrechè, resta incerto quale possibile difetto di freschezza, di nutrizione, d'integrità possa aver scemato quel prezzo. Carni flaccide per avventura e stantie possono discendere sino al valore di zero.

Se quel ½ argenteo fosse veramente prezzo d'un giusto e sano coscio di bue avremmo un altro prezzo bovino di 3 *argentei* in luogo di 5; e converrebbe dire che il papiro ci avesse, per raro caso, conservato appunto il *minimum* e il *maximum* del prezzo bovino: che oggi pure oscilla fra quegli estremi termini 3 - 5, da un 300 a un 500 lire.

In tale supposto il prezzo *medio* d'Egitto sarebbe di 4 argentei: ma è media, per intimo vizio di origine, mal fida.

(1) Madden, *Hist. of jew. coin.* p. 285.

(2) *Il.* XXIII, 741, 703, 269, 885; VI, 234. *Odyss.* I, 430.

(3) Cf. *Il.* IX, 122; XXIV, 232. *Odyss.* IV, 526.

(4) *Levit.* V, 15.

Digitized by Google

col romano rapporto decimale tra l'*ovis* e il *bos* (1); l'argenteo equivalente di un *bue*, per quanto in tanta distanza di tempi e povertà di memorie potea divinarsi, erami congetturalmente riescito intorno a grammi 130-140 (2).

Che se la buona fortuna, in quella approssimativa estimazione, m'abbia portato a cogliere non molto lontano dal segno, avrebbe fra que' due limiti 130-140^{gr} a trovarsi il peso de' *cinque pezzi* egizii d'argento; peso, che dovrebbe essere espresso in un *esatto numero* d'*uten* o *kat*, per soprappiù *esattamente divisibile per* 5: non essendo supponibile che per l'unità d'argento si fosse scelta una frazione. E se il conto batta, sarà come una prima caparra che le congetture nostre non s'appongano in fallo.

Ed ecco in fatti che fra i previsti limiti tutto da se e naturalmente intermezzasi l'egizio peso di 15 *kat*, che son grammi 136,38: colla richiesta condizione della esatta divisibilità per 5. Talchè ciascun de' 5 *pezzi d'argento*, prezzo del bue, riescirebbe di netti 3 *kat*, o sia 27^{gr}, 276: la pretta *uncia* romana, (ravvicinamento impensato), la *piccola unità* latina di peso (3), il cui duodecuplo, od *unità maggiore*, fu l'*as*. Ma su questi latenti contatti fra il metrico sistema egizio e gli esterni non anticipiamo parole riserbate al vegnente capitolo.

Siccome il papiro novera anche $^1/_2$ pezzo d'argento, che sarebbe *kat* 1 $^1/_2$, ciò non fa stato; essendo il $^1/_2$ *kat* frazione già nota.

Or l'aureo equivalente di quel prezzo d'argento dee comporsi di tre esatte, e probabilmente note, unità; o almeno d'un congruo numero di elementi minori *divisibile esattamente per* 3. E di fatto, per la supposta equivalenza tra *pak* d'oro e *kat* d'argento, i 5 pezzi argentei sarebbero 15 *pak*; i quali corrispondendo a tre pezzi d'oro darebbero 5 *pak* per ogni *aureo*, che sono 3^{gr}, 55:

---

(1) Aul. Gell. XI, 1.

(2) *Del Talento Omerico* ec. p. 285.

(3) Varro, *De Ling. Lat.* 170. 169. Mommsen, *Hist. de la monn. rom.* vers. Blacas, T. I, p. 200. Hultsch, *Griech. und röm. Metrol.* p. 110.

Digitized by Google

la giusta dramma serbataci dalla moneta de' Tolomei, che tutti ben sanno quanto avveduta cura ponessero nel mantenere i nazionali usi de' nuovi lor sudditi (1).

Qui pure il papiro ricorda il $^1/_2$ *pezzo d' oro;* che sarebbero *pak* $2\,^1/_2$, vale a dire $1^{gr}, 775$; e forse l' analogia potrà indurre ad ammettere anche il $^1/_4$ del *pezzo d' oro*, sebbene non se ne abbia ancora notizia; che sarebbe *pak* $1\,^1/_4$, o sia $0^{gr}, 8875$. E quel $^1/_2$ poi e quel $^1/_4$ di *pak*, vale a dire $0^{gr}, 355$ e $0^{gr}, 1775$, offrirebbero un intero paralellismo fra l' egizio sistema ed il greco; nel quale l' *obolo* dividevasi egualmente in *mezzi* ed in *quarti*, cioè in due *emioboli* e in quattro *tetartemorii* (2). Nè l' egizio *pak* è altra cosa che un *obolo* appunto; come il *pezzo d' oro* sarebbe un *pentobolo*.

24. La commerciale e geometrica acconcezza poi di queste inaspettate unità apparseci non potrebb' essere maggiore.

Che que' *pezzi d' oro e d' argento* faraonici sien comode porzioni metalliche, atte alla circolazione monetale, non ve ne ha dubbio: quasi a cappello confrontando con quelle che anche la moderna età ha trovato preferibili. Salvo il commerciale valore de' metalli, che dagli antichi tempi agli odierni ha variato di troppo, i nostri *ducati d' oro* e *d' argento* sono, quanto a peso e titolo, presso che esatti equivalenti di que' divisati *aurei* ed *argentei* egiziani. Il veneto zecchino, o ducato, ch' ebbe vanto secolare nella moderna moneta, co' suoi $3^{gr}, 491$ d'oro di ventiquattro, s' identifica, può dirsi, coll' ipotetico aureo egizio. Ne è rispondenza fortuita: benchè qui non accada rivangarne le ascose e rimote cagioni. Intorno all' *argenteo pezzo* egiziano si vedranno oscillare gli unciali nostri ducati d'argento: poniamo il modenese

---

(1) La dramma tolemaica è stimata di $3^{gr}, 54$ dal Queipo (*Essai* ec. T. II, p. 439), e di $3^{gr}, 57$ dall' Hultsch (*Op. c.* p. 285): e vedremo a suo luogo che il suo più giusto valore teorico è appunto di que' precisi $3^{gr}, 55$.

(2) Hultsch *Op. c.* p. 149.

Digitized by Google

(d' Ercole III) di 27^{gr}, 693, il toscano *(Pisis)* di 27^{gr}, 234, il veneto *(Giustina)* di 27^{gr}, 846. Fortuite rispondenze per certo, ma che almeno confermano la materiale attezza del pezzo. Chi tenesse conto della lega nell' argento moderno vedrebbe l' argenteo faraonico bilanciarsi collo scudo di Francia da 6 lire tornesi: 29^{gr}, 478, al titolo 906.

Come poi la valuta faraonica era probabilmente di forma anulare è facile formarsi il concetto di anelli d' argento del peso di un ducato, d' un mezzo, d' un quarto, o sia di oncie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; e di minori anelletti d' oro del peso d' uno zecchino, e della sua metà e del suo quarto, vale a dire di $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ d' oncia. Gli aurei anellini del Museo di Leida, trovati in Egitto ma che si credono asiatici o almeno d' asiatico sistema, variano di peso da 1^{gr}, 35 a 0^{gr}, 40 (1).

Quanto a' rapporti geometrici in fine tra le misure di capacità e i nuovi pesetti in discorso, ciò è a dire tra questi e il fondamentale cubo del cubito, onde tutti i pesi derivano, la reciproca corrispondenza continua. È inutile avvertire che essendo i due *pezzi d'argento* e *d'oro* semplici multipli del *kat* e del *pak*, unità ponderali le cui geometriche espressioni son già chiarite, qui non resterebbe a notare che i valori geometrici del $\frac{1}{2}$ e del $\frac{1}{4}$ di *pak* ipoteticamente mostraticisi.

Fu detto a suo luogo che il *pak* è la metà di un cubetto d' acqua di $\frac{1}{40}$ di cubito per lato. E poichè la divisione binaria, onde origina il *pak*, prendeva le mosse dal cubo dell' *uten*, (che ha il $\frac{1}{10}$ del cubito per lato), parea poco verisimile che la gradazione geometrica si arrestasse al *mezzo* di un cubo minore; e non procedesse oltre per altri due gradi, (spartendo, cioè, in due, poi in quattro quel mezzo cubetto), per arrivare a un cubettino finale: con intero riscontro geometrico tra questo punto di arrivo e quello di partenza, ch' è il maggior cubo dell' *uten*. Ed ecco,

---

(1) Brandis, *Das Münz - Mass.* p. 83.

Digitized by Google

per le due avvertite frazioni del *pak*, il $^1/_2$ ed il $^1/_4$, compirsi la prevista serie geometrica coll' acquisto degli ultimi due termini, o solidi mancanti. L' ultimo de' quali è un infimo cubetto di $^1/_{80}$ di cubito (digiti $^1/_5 + ^1/_{10}$) di lato: l' altro n' è il doppio.

25. Resta ora a vedere quale pratica comodità di rapporti avrebbero tra loro avuto le immaginate due unità premonetali, un *pezzo d' argento di* 3 *kat*, *uno d' oro di* 5 *pak*.

È manifesto, che per la supposta equivalenza dell' aureo *pak* al *kat* d' argento, l' aureo pezzo da 5 *pak* corrisponderebbe al mezzo *uten* d'argento: al pesetto Harris appunto del tesoro d'On, argomento del nostro discorso. Sarebbe, per usare de' vocaboli d' altra età, una *dramma* d' oro eguale a un *pentadramma* d' argento: comodissimo ragguaglio per fermo.

Così l' aureo *didramma* sarebbesi ragguagliato all' *uten*, o *decadramma* argenteo; e il *tetradramma* e *l' ottodramma* d' oro avrebbero equivaluto al duplo e al quadruplo di quel *decadramma*, od *uten* d' argento. Auree unità del resto tutt' altro che immaginarie; poichè tutte appartengono alla moneta de' Tolomei (1): della cui politica conservatrice, e del cui geloso rispetto per le antiche costumanze locali d'ogni maniera, abbiamo già fatto cenno.

Che se poi nel *kat* si preferisse di ravvisare un *didramma*, (superiore di poco a quello di Atene) si avrebbe la equivalenza della *dramma* d'oro al *decadramma* d'argento; ch'è appunto il babilonese ragguaglio della moneta: l' aurea *dramma* (od *emistatere*) eguale a 10 dramme d' argento, il talento aureo eguale a 10 d' argento. Come poi sotto i Lagidi la proporzione metallica (sia reale, sia legale) divenne $12\,^1/_2 : 1$, si spiegherebbe il perchè la unità argentea si confondesse coll' aurea, e l' antica unità di peso, *uten* o *kat*, esclusa dai nobili metalli, non avesse omai più altro campo che il bronzo. Pel nuovo rapporto metallico l' *ottodramma* d' oro equivaleva alle 100 dramme, o sia alla *mina* d' argento; e con

(1) Queipo, *Essai* ec. T. III, p. 13 - 16.

Digitized by Google

lievissima diminuzione della vecchia *dramma*, o *semikat*, d'argento era aggiustato il ragguaglio della nuova moneta.

Qui però non è da pretermettersi una osservazione. Non è suppponibile che l' Egitto faraonico non avesse altro argento più spicciolo del *pezzo d'argento* e della sua *metà*, rivelatici dal papiro di Bulaq, quando essi fossero davvero di circa un' oncia, e mezz' oncia, come i nostri ducati e mezzi ducati: nè in alcun altro sistema occorre esempio di sì forte *minimum* d' argento. E poichè il monetale vantaggio dell' argento è quello appunto di permettere, siccome meno prezioso dell' oro, una più minuta suddivisione di valori, da servire ai minori bisogni, non sarebbe ammissibile, come infimo pezzo d' argento, quel *kat* 1 $^1/_2$, che d' una metà eccede il *pak* d' oro. È dunque forza supporre una congrua suddivisione dell' argento: ma qui ogni diretta o indiretta notizia ci manca, e non resta che il troppo scarso sussidio delle verisimili divinazioni.

Fra i molti possibili modi di suddivisione dell' *uten* e del *kat* d' argento, due parrebbero disputarsi le apparenze della maggiore probabilità.

Può supporsi che, progredendo nella decimale divisione del *kat* analogamente a quella dell' *uten*, si fosse ottenuto un minimo peso d' argento di 0^{gr}, 90920 545 ; già previsto da Lepsius, e da noi accennato più sopra (1). In tal caso il pezzo d' argento da 3 *kat* conterrebbe 30 di dette frazioni, e il *pezzo d' oro* ne varrebbe 50, il *mezzo* 25, il *pak* d' oro 10, il $^1/_2$ *pak* 5, il $^1/_4$ di *pak* 2 $^1/_2$.

Oppure, per analogia col sistema d' Atene, (non estraneo alle egizie influenze), la cui dramma di 4^{gr}, 366 (2) dividevasi in 6 oboli, potrebbe immaginarsi che il *kat* considerato quale didramma si dividesse in 12 oboli o *pak* d' argento. Così l' uten d' argento

---

(1) Pag. 174.

(2) Hultsch, *Greich. und röm. Metrol.* p. 149.

Digitized by Google

dividerebbesi in 120 parti, quello d' oro in 128; il *pezzo d' oro* equivarrebbe a 60 oboli, d' argento, la sua metà a 30, il quarto a 15; il *pak* d' oro a 12, e il suo mezzo ed il quarto a 6 ed a 3.

Le rispondenze battono nell' uno e nell' altro sistema: ma è spiacevole il non poter accertare se alcun dei due meriti fede.

È inutile avvertire che in entrambi gl' immaginati sistemi l' obolo d' argento avrebbe avuto conveniente dimensione e valore. Il *decimale*, cioè, conterrebbe il giusto fino di metallo dell' infimo pezzo d' argento moderno, il $^1/_5$ di lira: il *duodecimale*, di 0^{gr}, 7576, corrisponderebbe al fino d' argento di un $^{18}/_{100}$ di lira.

Fra questi due congetturali *oboli*, o *pak* argentei, $^1/_{10}$ e $^1/_{12}$ di *kat*, le verisimiglianze paiono preponderare per l' ultimo. Poichè fra la ponderale serie di Bulaq, benchè abbiasi un incerto ed unico $^1/_{10}$ di *kat*, (che potrebbe anche essere intenzionalmente $^1/_9$, o $^1/_{12}$), trovansi le duodecimali frazioni $^1/_3$ ed $^1/_6$, che colla divisione decimale non possono confarsi. E con questo valore del $^1/_{12}$ di *kat*, o sia 0^{gr}, 7576, parrebbe accordarsi un minuto pezzetto metallico non monetato, del peso di 0^{gr}, 764, avente corso tuttora nell' interno dell'Affrica (1), e che potrebbe avere radice ne' premonetali costumi d' una remota antichità (2).

---

(1) *Numismatic Chronicle* T. VI, p. 15 seg. T. VIII, p. 215. Lenormant, *La monn. dans l' antiq.* p. 100.

(2) A questo stesso sistema potrebbero riferirsi gli argentei pezzi, spendibili a peso, in che i malgasci dividono i nostri scudi da 5 franchi; spartendoli sino alla frazione del $^1/_{72}$, (circa un 7 centesimi d' argento), cui dan nome d' *iranambatry* (Chabas, *Recherches* p. 21). Se in luogo degli scarsi pezzi moderni da 5 lire avessero que' barbari a spartire vecchi ducati veneti, modenesi, toscani, pari a 3 *kat*, avremmo ancor viva in quegli spezzati malgasci la immaginata divisione del premonetale argento d' Egitto. Poichè i 3 *Kat* divisi ciascuno in 12 oboli, danno 36 oboli per l'argenteo intero: onde il malgascio *settantaduesimo* sarebbe l' *emiobolo*. Ma nulla è dato accertare; ignorandosi la vera origine di quella duodecimale divisione dell' oncia; che nel $^1/_{72}$ ci dà lo *scriptulum* latino ridiviso per 3.

Digitized by Google

Una ragione poi di preferenza della supposta duodecimale divisione del *kat*, sopra la decimale, potrebbe credersi di ravvisarla in una più acconcia commensurabilità de' conseguenti spezzati d' argento colle unità de' due altri metalli. Poichè, oltre alle esatte rispondenze avvertite nell' oro, anche il bronzo parrebbe mostrarne altre esatte non meno. Se il faraonico rapporto tra bronzo e argento fosse stato come sotto i Lagidi 1 : 120, o 1 : 60, il *duodecimo* di *kat*, o sia il supposto *obolo* d'argento, esattamente risponderebbe all' *uten* di bronzo, od al *mezzo:* avendosi $120 \times 0^{gr}, 7576 = 90^{gr}, 9120$.

26. Poche parole ancora innanzi di abbandonare il campo di queste nostre esercitazioni sulla ipotetica determinazione de' faraonici *pezzi d' oro* e *d' argento*.

L'eguaglianza de' 3 *pezzi d'oro* a 5 *pezzi d'argento*, manifestataci dal papiro di Bulaq, mostra aperto che gli egizii non ebbero l' avvedutezza, o non trovarono l' opportunità, di stabilire un rapporto multiplo tra le due unità metalliche, (sì utile alla semplicità ed agevolezza del computo), come altri popoli seppero fare. L' equivalenza da essi fissata fra oro ed argento spendibili fu questa: 3, 6, 12, 60 *aurei*, poniamo, eguali a 5, 10, 20, 100 argentei. Scelsero adunque, qualunque ne fosse la ragione, il reciproco rapporto tra *dozzina* e *ventina*: capitali numeri, che negli antichi sistemi, e ancora ne' moderni, hanno avuto un predominio frequente; onde si videro dramme di 6 oboli e di 10, stateri di 12 e altri di 20, mine di 60 dramme od anche di 100; senza parlare d' una lira di 20 soldi, di 12 denari ciascuno, durata per oltre un millenio.

Nell'equivalenza ipotetica tra l'aureo *pak* e il *kat* dell' argento, e nella supposta misura de' 5 *pak* pel pezzo dell' oro, acconcissima misura del pezzo d'argento sarebbe stato tagliarlo di *kat* $2\,1/2$, anzichè di 3; onde sarebbesi avuto tra oro ed argento il comodissimo cambio e rapporto del *duplo*; cioè i pezzi d' oro eguali a un doppio numero di pezzi d'argento. Ma perchè invece

Digitized by Google

di fare 3 *aurei* eguali a 6 *argentei*, si preferisse il ragguaglio 3: 5 non è dato chiarirlo (1).

Questa indubitata incomodità di ragguaglio, accertata dal papiro di Bulaq, rende meno sospette altre inopportunità di rapporti, a cui condurrebbero le congetturali nostre divinazioni. Poichè fra l' *uten* d'argento e d' oro e i rispettivi pezzi spendibili non si avrebbero esatti rapporti; equivalendo il primo ad *argentei* $3\,\frac{1}{3}$, il secondo ad aurei $25\,\frac{3}{5}$. E solo si ritonda il ragguaglio, quanto all' *uten* d' argento, ne' suoi multipli del 3; quanto a quello d'oro, ne' multipli del 5: vale a dire *uten argentei* 3, 6, 9, 12 ec. eguali a 10, 20, 30, 40 pezzi d'argento; ed *uten aurei* 5, 10, 15, 20 ec. eguali a pezzi d'oro 128, 256, 384, 512, ec. In tutti gli altri numeri intermedii riescirebbe frazionario il rapporto. Così nel pratico uso l'*uten* d'argento avrebbe equivaluto a 3 pezzi d' argento più un *kat*; quello d'oro a 25 pezzi d'oro più uno d' argento. Questa poca felicità di ragguagli, a rispetto della tanta maggiore venuta in uso dappoi, sarà difetto di primitiva imperfezione di metodo, (paragonabile all'altra del rispettivo ragguaglio tra aureo ed argenteo), ovvero sarà segno di occulto vizio delle fondamentali supposizioni nostre, onde emanano que' ragguagli? Pago d' aver messa lealmente in vista la difficoltà, lascio volentieri il non agevole giudizio ad altri.

---

(1) É osservabile però come antichi e moderni abbiano usato evitare nella scala decimale il secondo grado della divisione binaria del dieci. Come nelle prescrizioni mosaiche troviamo, p. e., sicli 100, 50, 30, 20, 15, 10, 5, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, (fra cui il rotto $2\,\frac{1}{2}$ non appare), così nel rame italiano si son trovati comodi i centesimi 10, 5, 3, 1, ovvero i 10, 5, 2, 1, esclusi i $2\,\frac{1}{2}$. È vero che nel $\frac{1}{4}$ dell' *uten* di bronzo potrebbe parere nascondersi quell' evitato valore dei *kat* $2\,\frac{1}{2}$; ma vedremo che nel bronzo era abbandonata la divisione per *kat*. Piuttosto potrebbe citarsi, a conferma, la scala del bronzo tolemaico, fissata dal Poole in *kat* 10, 5, 2, 1, $\frac{1}{2}$ (*Weights*, nella *Hist. of jew. coin.* del Madden p. 278): ma è scala che forse esige qualche osservazione ulteriore. Anche l' antico bronzo decimale etrusco, che avea pezzi da 100 (centesimi d' asse sestantario), 50, 30, 25, 20, $12\,\frac{1}{2}$, 10, 5, qui arrestavasi; evitando il $2\,\frac{1}{2}$ (Kluegmann, *Bull. dell' Ist. di Corr. Arch.* 1877 p. 147).

Digitized by Google

Di molte parole è stato mestieri di spendere per provar pure, se fosse possibile, di diradare le tenebre ond' è avvolto lo spendibile oro ed argento faraonico. Ardua era la meta; nè niuna vana fiducia ci prende d' aver saputo raggiugnerla. Nel tentare ogni via che dal noto potesse guidare all' ignoto, prima cura abbiam posto di guardarci dalle facili illusioni, che faccian velo al giudicio sulla vera importanza de' successi ottenuti (1).

L' argomento ha sembrato mostrare aspetti nuovi e impensati, e svelare intimi accordi che par duro attribuire a mero giuoco del caso. Tuttavia anche qualche difficoltà non s' è dissimulata: fra le quali è capitalissima quella d' aver dovuto procedere per congettura; e con troppo raro sussidio de' positivi dati che pur sarebbero stati desiderabili.

I risultamenti nostri pertanto, in questa parte importante della egizia metrologia, non potean raggiugnere che il grado di più o meno probabili, o verisimili, ipotesi: vo' dire di scientifiche previsioni non ancora ben ferme, che dal tempo, dallo studio e da future scoperte aspettano la lor conferma, o disdetta. E quand' anche l' avvenire le dilegui, come apparenze vane, non nuocerà il non aver voluto perderle intanto di vista: pur di non essersene lasciati incautamente sedurre.

27. Detto dell' *oro* e dell' *argento* premonetali, resterebbe a toccare del *bronzo* ne' suoi rapporti con essi: ma qui versiamo in una povertà ancor maggiore di documenti opportuni.

Nell' uso premonetale dell' *uten* di bronzo ne abbiam trovato l' *intero*, il *mezzo*, il *quarto:* ond' è che vi pare abbandonata la decimale divisione per *kat*, propria del comune *uten* peso (2).

---

(1) « L' étude des origines, (scrivea un illustre egittologo), est toujours séduisante, quoiqu' elle produise ordinairement plus de suppositions, que de notions véritables » (Rougé, *Revue arch.* Ser. III, T. XIV, 1846, p. 355). È però giusto convenire che nel campo scientifico sovente l' ipotesi spiana la via alla tesi. Solo importa di non scambiare incautamente quella per questa.

(2) Chabas, *Recherches* ec. p. 19.

Digitized by Google

Certo che anche il bronzo spendibile sarà stato mestieri armonizzarlo coll'argento; e come nell'*uten* dell'oro il *kat* pare aver ceduto le veci al *pak*, così anche nel bronzo il *kat* può essere stato lasciato in disparte. Vero è che que'soli due esempi di frazioni dell'*uten* a noi cognite, il $^1/_2$ ed il $^1/_4$, non bastano ad escludere il dubbio che quelle non potessero essere per avventura che mere breviazioni di computo: essendo più semplici e spiccie espressioni *uten* 1 $^1/_2$, 1 $^1/_4$, che le corrispondenti *uten* 1 *Kat* 5, *uten* 1 *Kat* 2 $^1/_2$. Se però il supposto ragguaglio, dianzi dubitativamente previsto, tra l'*uten* di bronzo e *l'obolo* d'argento fosse fondato, potrebbe pensarsi che la probabile divisione binaria di questo fosse parimente applicata anche a quello. Come l'*obolo* attico dividevasi in *emiobolo*, *tetartemorio*, e *calco* (o *emitetartemorio*), o sia $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, così non sarebbe impossibile che fosse avvenuto altrettanto dell'*obolo* egizio e, per analogia, anche dell'*uten* di bronzo. Nel qual caso però, corrispondendo l'$^1/_8$ d'*uten* a 11^{gr}, 365 di bronzo, difficilmente questo potrebbe supporsi l'infimo tra i pezzi del bronzo; che probabilmente avrà ammesso altre suddivisioni ulteriori, come il $^1/_{16}$ e il $^1/_{32}$ d'*uten*: che sarebbero 5^{gr}, 682 e 2^{gr}, 841, cioè a dire cira $^1/_5$, o $^1/_{10}$ d'oncia: poco più della *sextula* e della *dimidia sextula* latine. Ma non avendo fil di lume che ci guidi, gli è un inutile brancicare al buio.

Anche sul rapporto di valore, nell'Egitto faraonico, fra il bronzo e i due metalli preziosi siamo in un'assoluta incertezza.

Antichissimamente l'Egitto dovette abbondare di bronzo. Il più vetusto monumento di data certa, (un bassorilievo di *Snefru*, faraone della dinastia III), si collega appunto colla escavazione di quel metallo: riferendosi alla conquista della penisola del Sinai (1), le cui ricchissime miniere di rame furono poi sempre, fin da quelle rimotissime età, sfruttate dagli egiziani. Le anti-

---

(1) Rougé, *État actuel de toutes les découvertes faites en Égypte*, negli *Annal. de phil. chrét.* T. XII, 1855, p. 252.

Digitized by Google

chissime cave sinaitiche di Wady-Magharah e di Wady-Nasb veggonsi lavorate con scalpelli e martelli di selce (1): economici strumenti, che anche solo per se accennano a tempi e metodi assai primitivi, anche senza abbandonarsi a sogni d'immaginarii periodi della pietra.

Oltre a' prodotti di quelle miniere, lavorate ancora per certo all'età cui ci riferiamo (2), altro rame affluiva in Egitto pel commercio esterno e per l'asiatico tributo (3). E v'ha chi pensa, per quella copia del bronzo, essere stato desso il metallo tipo, o di conto, negli usi premonetali dell'Egitto faraonico (4). Checchè siane di questa opinione, certo non ancora chiarita abbastanza, (e insinuata forse dalla supposta preziosità dell'argento, e dal preteso suo rapporto 3: 5 coll'oro), è però verisimile che assai elevato esser dovesse il ragguaglio dell'argento con quell'abbondante metallo; e probabilmente non sarà stato inferiore a quello che disputano i dotti doversi attribuire al regno dei Lagidi.

Lasciando a parte l'abbandonata opinione di Amedeo Peyron, che stabiliva quel rapporto in 1 : 30 (5), niuno ignora dividersi ora il parere de' metrologi fra la proporzione 1 : 60 proposta dal Letronne (6), seguito dal Boeckh (7), dall' Hultsch (8), dal Brandis (9), dal Revillout (10), e il doppio rapporto 1: 120, fissato dal Queipo (11), da Bernardino Peyron (12), dal Lum-

---

(1) Chabas, *Études sur l' antiq. hist.* p. 348 - 354.
(2) *Id. Op. c.* p. 261.
(3) Lepsius, *Die Metalle* ec. p. 101.
(4) Lenormant, *La monn. dans l' ant.* T. 1, p. 97 - 98.
(5) *Commentario sul terzo papiro di Torino,* 1827.
(6) *Papyrus grec du règne d'Évergète* II, ec. nel *Journal des Savants* 1833, p. 338.
(7) *Metrol. Untersch.* p. 142.
(8) *Griech. und röm. Metrol.* p. 285.
(9) *Das Münz - Mass.* ec. p. 289.
(10) *Chrestomathie démotique* p. LXXI.
(11) *Essai,* ec. T. I, p. 176, 179.
(12) Cf. Chabas, *Recherches* p. 39. Lumbroso, *Recherches sur l' économie polit. de l' Égypte sous les Lagides* p. 39.

Digitized by Google

broso (1): il quale ultimo pende anzi incerto fra i due rapporti 1 : 120, e 1 : 125. Il Mommsen, che attribuisce all'Egitto romano quest'ultima proporzione 1 : 125, mantiene poi l'altra 1 : 60 pel tolemaico (2).

Se tale disparità di sentenze divide i dotti fra la tanta luce onde risplende il regno dei Lagidi, chi potrà sperare d'apporsi tra la caligine che occupa il precedente evo faraonico?

Un papiro jeratico del Museo di Leida pubblicato fin dal 1862 dallo Chabas nelle sue *Mélanges égyptologiques* (3), ci ha conservato il prezzo di un toro in *uten* di bronzo, di che abbiam toccato più sopra: ma sfortunatamente non è integro quel prezzo. Non potendo consultare quella dotta pubblicazione egittologica, mi feci ardito di chiederne contezza all'illustre autore; il quale con una cortese bontà, di cui non gli so render grazie bastanti, così rispondevami: « Le compte du Taureau n'est pas entier dans le texte. Il semble qu'il ait été donné 119 outens de bronze en numéraire et en objets dont la valeur est indiquée, mais dont l'identification n'est pas certaine, plus 42 autres objets dont la valeur n'est pas spécifiée. » La parte data in metallo, o come diremo noi in contante, non è che di 5 *uten:* gli altri 114 *uten* son l'importare di 8 oggetti diversi. Per quanto possa essere tenue il pregio de' 42 oggetti residui, non estimati, è probabile che l'intero valore del toro debba considerabilmente elevarsi al disopra dei 119 *uten* distintamente specificati. Ma quella non eliminabile incognita, uten $119 + x$, introdotta in questo prezzo taurino troppo ne scema la metrologica importanza

Chi supponesse per raro caso, eguali di prezzo il toro del papiro di Leida e il bue di quello di Bulaq; e alcun grado di

---

(1) *Op. c.* p. 40 - 41.

(2) *Hist. de la monn. rom.* T. I, p. 54, 56.

(3) I.re *Série* p. 18. Cf. *Recherches* ec. p. 16. Lenormant, *La monnaie dans l'antiq.* T. I, p. 95.

Digitized by Google

fiducia volesse riporre nel congetturale prezzo d'oro e d'argento da noi attribuito a quest'ultimo; potrebbe proporsi il quesito, qual dei due rapporti 1:60, ovvero 1:120, tra bronzo ed argento, che fra' dotti si disputano il campo pel regno dei Lagidi, sarebbe più verosimilmente applicabile a quello dei faraoni?

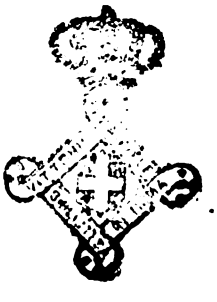
Al primo di detti rapporti i 15 *kat*, o sia i 5 *pezzi d'argento*, prezzo del bue, si ragguaglierebbero a 900 *kat*, cioè a 90 *uten di bronzo*: troppo inferiori alla nostra somma di *uten* 119 + x. Al secondo rapporto, i 5 *pezzi d'argento* risponderebbero a 1800 *kat*, o sia 180 *uten di bronzo*. Di che il valore dell'x nella nostra somma riescirebbe di *uten* 61. Chi poi fra' que' due estremi rapporti 1:60 e 1:120 volesse immaginarne uno intermedio, come 1:80, supposto dal Poole per l'Egitto tolemaico (1), oppure 1:90, 1:100, ragguaglierebbe i 5 *argentei* ad *uten di bronzo* 120, 135, 150, coi conseguenti valori dell'x in *uten* 1, 16, 31. Ma chi potrebbe appagarsi di conclusioni derivate da simili catene di supposti?

28. Qui il lungo nostro discorrere sul campione Harris e sui primitivi pesi faraonici avrebbe potuto far fine, se una numerosa serie d'altri pesi egizii tornati ultimamente all'aprico e da noi ricordati già prima (2), non fosse venuta ad esautorare nell'opinione di taluno quel raro cimelio e l'*uten* derivato da esso, per sostituirvene uno più forte.

Se non che non sono ancor maturi, (anzi, a notizia mia, neppur son cominciati), gli studi per una definitiva determinazione scientifica della teorica unità ponderale derivabile dalla nuova serie predetta. Esploriamo adunque, per quanto ci è dato, il nuovo terreno; e le pazienti nostre indagini possano fornire alla scienza qualche non ispregevole, nè inutile contribuzione.

---

(1) Madden, *Hist. of jew. coin.* p. 284.
(2) Pag. 172.



Digitized by Google

Nel 1876-77 il celebre egittologo Mariette pubblicava, nelle ultime tre Tavole (97-100) de' suoi *Monuments divers recueillis en Égypte et en Nubie*, una ricca serie di antichi pesi provenuti da scavi del Basso Egitto; indicandone le materie e dandone i disegni, le dimensioni e le pesature. Ben sarebbe stata desiderabile anche la indicazione del rispettivo loro stato di conservazione ed integrità; ma forse il chiaro archeologo riserbasi a magistralmente illustrare egli stesso la preziosa collezione sua e fornire ogni ulteriore chiarimento che dai lumi e dalla locale esperienza di lui a ragione possono ripromettersi i dotti.

Rechiamo adunque nella Tavola seguente le indicazioni fornite intanto dal Mariette, per farne materia d' esame: salvo le modificazioni che la futura notizia della conservazione rispettiva potrà suggerire.

I dati del Mariette occupano le colonne *A*, *B*, *C*; e sono il suo *numero* d' ordine, (tranne qualche necessaria inversione per serbare la serie decrescente dei pesi), e la menzione delle *materie* e dei *pesi*. L' uso delle altre colonne sarà chiarito in seguito.

Quanto alla forma dei pesi la figura in essi dominante è quella del campione Harris, più o meno negletta, più o meno depressa; e qui basterà accennare le varianti. Forma Harris ansata, N. 10; forma Harris inversa, (cioè tronco di cono retto a base minore convessa), N. 26; tronco di cono retto a basi piane, N. 40; doppio tronco di cono a base maggiore comune, N. 56, 57; paralellepipedo, N. 12; campanula, N. 20; sferoide, più o meno informe, a base spianata, N. 13, 14, 16, 19, 27, 31, 34, 41, 46, 47, 54, 51.

Le breviature *K P* e *K G* significheranno nella Tavola *Kat piccolo* e *Kat grande*: vale a dire quello del peso Harris, e il più forte desumibile dai pesi Mariette. Nella Tavola il computo è a soli *Kat*, non ad *Uten*, per evitare una duplicazione di colonne.

Digitized by Google

N. prog.	MATERIA	Peso	Numeri		Peso	SUPPONIBILI PESI TEORICI					
						1.° KG = 9,470		2.° KG = 9,544		3.° KG = 9,633	
			di KP	di KG	dal KG	Totale	Differ.	Totale	Differ.	Totale	Differ.
A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
1	Granito	9650,000	1061,36	1000	9,650	9470,880	+189,126	9544,700	+105,300	9633,038	+16,962
2	»	1908,000	209,85	200	9,540	1894,176	+ 13,824	1908,940	— 0,940	1926,607	—18,607
3	»	1710,000	188,07	180	9,500	1704,758	+ 5,242	1718,046	— 8,046	1733,946	—23,946
4	»	534,450	58,78	60	8,907	568,252	— 33,802	572,682	— 38,232	577,982	—43,532
5	»	526,750	57,93	—	8,779	—	— 41,502	—	— 45,932	—	—51,232
6	Gres	188,538	20,73	20	9,427	189,417	— 0,879	190,894	— 2,356	192,660	— 4,122
7	Alabastro	138,508	15,23	15	9,233	142,063	— 3,555	143,168	— 4,660	144,495	— 5,987
8	Bronzo	95,362	10,48	10	9,536	94,708	+ 0,654	95,447	— 0,085	96,330	— 0,968
9	»	92,217	10,14	—	9,222	—	— 3,145	—	— 3,230	—	— 4,113
10	»	85,407	9,39	—	8,541	—	— 9,955	—	— 10,040	—	—10,923
11	»	50,520	5,55	5	10,105	47,355	+ 3,165	47,723	+ 2,797	48,165	+ 2,355
12	Porfido	50,420	5,54	—	10,084	—	+ 3,065	—	+ 2,697	—	+ 2,255
13	Ferro	48,738	5,36	—	9,747	—	+ 1,383	—	+ 1,015	—	+ 0,573
14	Alabastro	48,409	5,32	—	9,682	—	+ 1,054	—	+ 0,686	—	+ 0,244
15	Porfido	48,345	5,31	—	9,669	—	+ 0,990	—	+ 0,622	—	+ 0,180
17	Bronzo	46,098	5,07	—	9,219	—	— 1,257	—	— 1,625	—	— 2,067
16	»	46,040	5,06	—	9,208	—	— 1,315	—	— 1,683	—	— 2,125
18	Porfido	43,131	4,74	—	8,626	—	— 4,224	—	— 4,592	—	— 5,034
56	Bronzo	28,626	3,14	3	9,542	28,412	+ 0,214	28.634	— 0,008	28,899	— 0,273
19	Ematite	23,140	2,54	2 1/2	9,256	23,677	— 0,537	23,861	— 0,721	24,082	— 0,942
20	Porfido	20,542	2,25	2	10,271	18,941	+ 1,601	19,089	+ 1,453	19,266	+ 1,276
21	Serpentino	19,592	2,15	—	9,796	—	+ 0,651	—	+ 0,503	—	+ 0,326
22	Porfido	19,300	2,12	—	9,650	—	+ 0,359	—	+ 0,211	—	+ 0,034
23	Bronzo	19,126	2,10	—	9,563	—	+ 0,185	—	+ 0,037	—	— 0,140
24	Alabastro	19,091	2,09	—	9,545	—	+ 0,150	—	+ 0,002	—	— 0,175
25	Porfido	18,825	2,07	—	9,413	—	— 0,116	—	— 0,264	—	— 0,441
26	Marmo	18,769	2,06	—	9,384	—	— 0,172	—	— 0,320	—	— 0,497
27	Bronzo	17,925	1,97	—	8,962	—	— 1,016	—	— 1,164	—	— 1,341
29	Diaspro	17,677	1,94	—	8,838	—	— 1,264	—	— 1,412	—	— 1,589
28	Porfido	17,662	1,94	—	8,831	—	— 1,279	—	— 1,427	—	— 1,604
57	Bronzo	13,608	1,49	1 1/2	9,072	14,206	— 0,598	14,317	— 0,709	14,449	— 0,841
30	»	10,572	1,16	1	10,572	9,470	+ 1,102	9,544	+ 1,028	9,633	+ 0,939
31	Ematite	10,110	1,11	—	10,110	—	+ 0,640	—	+ 0,566	—	+ 0,477
32	Porfido	9,768	1,07	—	9,768	—	+ 0,298	—	+ 0,224	—	+ 0,135
33	Cornalina	9,731	1,07	—	9,731	—	+ 0,261	—	+ 0,187	—	+ 0,098
34	Ematite	9,719	1,06	—	9,719	—	+ 0,249	—	+ 0,175	—	+ 0,086
35	Porfido	9,561	1,05	—	9,561	—	+ 0,091	—	+ 0,017	—	— 0,072
36	Alabastro	9,466	1,04	—	9,466	—	— 0,004	—	— 0,078	—	— 0,167
37	Bronzo	9,438	1,03	—	9,438	—	— 0,032	—	— 0,106	—	— 0,195
38	Alabastro	9,103	1,01	—	9,103	—	— 0,367	—	— 0,441	—	— 0,530
40	Bronzo	9,090	0,99	—	9,090	—	— 0,380	—	— 0,454	—	— 0,543
39	»	9,048	0,99	—	9,048	—	— 0,422	—	— 0,496	—	— 0,585
41	Alabastro	8,839	0,97	—	8,839	—	— 0,631	—	— 0,705	—	— 0,794
42	»	8,779	0,96	—	8,779	—	— 0,691	—	— 0,765	—	— 0,854
43	»	8,415	0,92	—	8,415	—	— 1,055	—	— 1,129	—	— 1,218
44	Porfido	5,127	0,56	1/2	10,254	4,735	+ 0,392	4,772	+ 0,355	4,816	+ 0,311
45	Diaspro	4,732	0,52	—	9,464	—	— 0,003	—	— 0,040	—	— 0,084
46	Bronzo	3,214	0,35	1/3	9,642	3,156	+ 0,058	3,181	+ 0,033	3,211	+ 0,003
47	»	3,140	0,34	—	9,420	—	— 0,016	—	— 0,041	—	— 0,071
48	Alabastro	3,140	0,34	—	9,420	—	— 0,016	—	— 0,041	—	— 0,071
49	Serpentino	2,982	0,32	—	8,946	—	— 0,174	—	— 0,199	—	— 0,229
50	Bronzo	2,805	0,30	—	8,415	—	— 0,351	—	— 0,379	—	— 0,406
51	»	1,507	0,16	1/6	9,042	1,578	— 0,071	1,590	— 0,083	1,605	— 0,098
53	Porfido	1,453	0,15	—	8,718	—	— 0,125	—	— 0,137	—	— 0,152
52	»	1,428	0,15	—	8,568	—	— 0,150	—	— 0,162	—	— 0,177
54	Serpentino	1,345	0,14	—	8,070	—	— 0,233	—	— 0,245	—	— 0,260
55	Porfido	0,968	0,11	1/10 ? (1/9)?	9,680 ? (8,712)?	0,947 1,052	+ 0,021 — 0,084	0,954 1,066	+ 0,014 — 0,092	0,963 1,070	+ 0,005 — 0,102
56	V. dopo il n. 18										
57	V. dopo il n. 28										
		15728,296		1649 12/50	532,066 ?						

Digitized by Google

L' ordinata serie di pesi della colonna *C* mostra a colpo d'occhio avere noi dinanzi un sistema di *Uten* e *Kat*. Se non che il ragguaglio soggiuntovi in *Kat* Harris, nella vicina colonna *D*, palesa cogl'irregolari suoi numeri trattarvisi di un *Kat* più forte; e fa strada a determinare, salvo poche incertezze, nell'altra colonna *E*, il numero delle unità teoriche di ciascuno de' pesi di Bulaq.

Così è fatto luogo a ricavare da ognuno di que' pesi l'unità teorica da esso rappresentata: e la serie di esse, apposta di contro nella colonna *F*, ci offre in 57 valori 56 espressioni diverse: varianti tra i limiti $10^{gr},572$ e $8^{gr},070$ (N. 30, 54). Limiti, fra i quali il fissare il giusto punto dell' unità teorica è tutto altro che agevole còmpito.

29. Il ch. F. Lenormant nell' erudita storia universale della numismatica, *La monnaye dans l' antiquité*, che ora sta pubblicando, si propone esso pure il quesito della determinazione dell'*uten* faraonico; e abbandonata l'estimazione fattane sul campione Harris dal ch. Chabas, dà la palma alla serie di Bulaq, fissando l' *uten* derivabile da essa « *entre* 94 *et* 96 *grammes*; » confini, fra' quali avrebbe esso, a suo giudizio, « *varié suivant les époques* » (1). Spero venia dall' illustre orientalista se non so indurmi a soscrivere a tali sentenze.

La fiducia che ispira il nostro campione tebano è troppo saldamente e profondamente fondata per poter essere scossa da' nuovi pesi scoperti. Qualunque sia l'autorità attribuibile a questi, e qual si sia l' unità teorica da cui essi derivino, ben potrà aversi una seconda unità egizia di peso, sia succeduta, sia coesistente all' *uten* tebano, ma non si riuscirà nè a scalzare le radici, nè a cancellare il primato, di questo.

Ciò che assicura il vanto al prezioso nostro cimelio, non è l' accuratissima esecuzione sua, e la conservazione perfetta, e la

---

(1) T. I, p. 94.

Digitized by Google

geroglifica indicazione del peso, e la fede dovuta all'avere appartenuto a un pubblico tesoro; è l'intimo suo nesso colla primitiva unità lineare, e l'esatta rispondenza a cubiche misure faraoniche del principio del secondo impero; è soprattutto l' addentellato strettissimo colla metrologia universa; la quale nell'*uten* tebano dee riconoscere il vero stipite, il comune prototipo, d' ogni altro sistema di peso: assiro, ebraico, greco, alessandrino, romano. Capitali pregi, rivendicati a quell'*uten* in questo e nel seguente capitolo; ma ne'quali i nuovi campioni arrivati son troppo lungi dal potere entrare in gara con esso.

Questi campioni, de' quali taccio la negletta e dozzinale fattura, (per quanto almeno può dai disegni arguirsi), han tutte le apparenze di bassa età. Il ch. Mariette, cui l' amore della scienza fecemi ardito d' importunare per lettera, e cui rendo ora le grazie dovute, così umanamente scriveami. « Les poids de la collection de Boulaq viennent de Tanis, d' Athribis, de Bubastis, surtout de Memphis. Autant que ma mémoire me sert, il n'y en a pas qui aient la Haute Égypte pour provenance. Comme ils sont tous trouvés dans de ruines d' époque ptolémaique et même romaine, je les considère comme de bas temps. L'un d' eux porte d'ailleurs une inscription en écriture démotique, ce qui nous reporte aux mêmes époques. Je dois ajouter qu' il ne serait pas impossible que le poids du « tresor de On » pubblié par M. Chabas fut de temps pharaonique, bien que le preuves manquent. »

Se il cortese egittologo avrà mai a gittare un' occhiata su queste mie pagine, forse potrà apparirgli non più sì destituita di prove, come dovea prima sembrare, la faraonica appartenenza del peso Chabas.

Quanto ai campioni di Bulaq, e all' oscura unità teorica a cui essi s' informano, la determinazione fattane dal Lenormant in grammi 94-96 è troppo lata per poter riescire di metrologico profitto. L' opinione poi che quella unità abbia ad avere variato (e oscillato in così angusto arco), fra que' valori 94-96 lungo il corso del tempo, se posso esporre, salvo il rispetto al chiarissimo

Digitized by Google

Autore, il mio sommesso giudicio, non mi parrebbe punto ammissibile. Il supposto, poco verisimile in sè, di successive modificazioni dell' unità teorica, in misure sì leggermente varianti tra loro, non ha l' appoggio di verun diretto argomento. I campioni di Bulaq non mostrano tali sbalzi da escludere la possibilità di un unico tipo comune; e da dover qunidi riferirli a teorici tipi diversi. Tutto il loro svariare non esce dagli ordinarii confini attribuibili alle ovvie cause notissime, onde per ragione di fabbrica, di consumo, di fratture, di frodi, o che altro, gli usuali pesi da bilancia sogliono discordare fra loro.

Attenendoci adunque all' unico supposto che si presenti accettabile, l' esistenza, cioè, d' un altro *uten* maggiore, o più forte, a cui si riferiscano que' pesi di Bulaq, il nodo dell' ardua quistione tutto sta nel tentarne la determinazione del valore.

30. Tentiamo la trita via delle *medie;* benchè in fatto di pesi non possa riporvisi così cieca fiducia come in quello delle monete. Le quali, allorchè sieno in numero grande e di buona conservazione, e conoscasi il *taglio*, o sia quante ne vadano per un peso determinato, debbono certamente rivelare la ponderale unità da cui son ricavate. Laddove ne' pesi, indipendenti per fabbrica, esposti a deteriorazioni, e abbandonati all' incuria e soprattutto alla frode, collimano troppi elementi arbitrarii e fortuiti per poter sperarne una esatta compensazione.

Due *medie* può fornire la Tavola nostra, secondo che preferiscasi la somma de' singoli valori del *kat* ricavati da ciascuno de' pesi, (colonna E), ovvero quella de' pesi totali, (colonna C). La prima via, più comunemente seguita benchè non certo la migliore (1), dà al *kat* il valore di $9^{gr}, 3345$; l' altra il porta

(1) Per esempio il Boeckh da nove lunghezze architettoniche deriva altrettanti valori del piede olimpico, e la media di questi egli assume per teorico valore di quel piede (*Metrol. Untersch.* p. 198 - 199): ma se avesse tratta la media dalla somma delle lunghezze totali il risultato sarebbe stato diverso.

Digitized by Google

a 9^{gr}, 5355. Disparità di risultato dipendente dal vario numero di unità rappresentate da ciascuno de' campioni.

Siccome l' aumento manifestatosi nella media della colonna *C* palesa il prevalere de'più alti valori del *kat* appunto ne'campioni più forti, ne abbiamo indizio sicuro che l' altra media è al di sotto del vero. E siccome inutile possiamo adunque lasciarla in disparte.

Piuttosto fra le due medie potrebbe tentarsi la mezzana via, o sia la *media delle medie*: 9^{gr}, 4350. Della quale adunque avremo a tener conto insieme coll' altra de' 9^{gr}, 5355: benchè non dissimuli che un serio dubbio m'ispirano tanto l' una che l' altra.

La cagione del mio sospetto è l'elevato valore del *kat* ne' tre più alti campioni della serie, e soprattutto nel primo. In questo genere di ricerche i forti pesi hanno l' indicativo ed utilissimo ufficio, cui servono nelle fisiche sperienze gl'ingegnosi apparecchi condensatori, o moltiplicatori. Le differenze minime della unità teorica, che ne' tenui pesi o mezzani riescono, per l' esiguità loro, o impercettibili o male apprezzabili, moltiplicate invece ne' pesi massimi ingrandiscono e si fanno a dovere estimare.

Il rilevante eccesso rispettivo di 215^{gr} e 115^{gr} nel 1.° campione sulle dette medie, è poco favorevole argomento della giustezza di queste. È vero che molto maggiori eccessi troverannosi, in altri pesi, p. e., ne' romani di Ercolano (1); poichè appunto l'accre-

---

(1) Alle romane leggi che ricordano le *falsa pondera*, le *iniqua pondera*, vale a dire le *pondera maiora*, o *minora* (*Digest*, Lib. IV, Tit. III, Leg. 19; Lib. XIX, Tit. I, Leg. 33), per frodare sulla merce secondo che si compri o si venda, possono servire di commento i tanti pesi romani che ci restano maggiori o minori del giusto. Basti, al caso nostro, ricordarne alcuni degli eccedenti; trovati ad Ercolano e registrati dal Boeckh. Mentre il primo campione di Bulaq presenta sulle due medie i rispettivi eccessi di 115^{gr} e 215^{gr}, che son circa 1 $\frac{1}{4}$, 2 $\frac{1}{4}$ per cento, troveremo invece in un *centupondio e un quarto* un eccesso di 1809^{gr}; altro eccesso di 1851^{gr} in un *centupondio;* altri di 275^{gr}, 457^{gr} in due *decempondii*: che sono aumenti di circa 4 $\frac{1}{2}$, 5 $\frac{1}{2}$, 8 $\frac{1}{2}$, 14 per cento. Anzi in alcun altro campione ercolanese l' aumento va sino al 29 $\frac{1}{2}$ e al 37 $\frac{1}{2}$ per cento (Cf. *Metrol. Untersch* p. 180, 183. Hultsch, *Die griech. und röm. Metrol.* p. 115).

Digitized by Google

scere i pesi era una delle male arti più note; ricordata ancor dalla Bibbia: *imminuamus mensuram et augeamus siclum* (1). E anche l' antico Egitto, dove i falsatori di pesi e misure avean mozze le mani (2), non era esente da questa lebbra; dacchè tra le giustificazioni dell'anima, nel *Libro de' morti*, le si fa dire: *Non ho accorciato il cubito; non ho fatto forza all' indice della bilancia,.... non ho falsificato i pesi della bilancia* (3). Tuttavia nel nostro dubbio, se sien false le proposte *medie*, o falso il *peso* che tanto discorda da esse, la presunzione è a favore dell' ultimo: imperocchè, mentre su quelle regna un'assoluta incertezza, ne' pesi invece la giustezza è di regola, e la falsità è solo per eccezione.

Per la qual cosa, ricadendo il dubbio sulle *medie* anzidette, sorge il quesito se non fosse per avventura a preferire la *massima*; come in qualche analoga ricerca da dotti uomini fu praticato (4).

Di guisa che i congetturali valori del maggior *kat*, che di preferenza si offrono alla investigazione scientifica, sarebbero due *medie* e una *massima;* vale a dire 9^{gr}, 4350, 9^{gr}, 5350, 9^{gr}, 6500. E non sarà grave al paziente lettore che li passiamo per singolo in diligente esame e rassegna.

E porta il caso, che nell' ordine de' tempi cui la serie ponderale di Bulaq è riferibile, una varia coincidenza di metrologiche circostanze si presenti, cui ciascuno di que' tre proposti valori ha sembiante d' attagliarsi, e di potere riceverne conferma. Li dichiareremo adunque partitamente; sottoponendoli, senza prevenzioni

---

(1) *Amos*, VIII, 5.

(2) Diodor. Sicul. Lib. I, §. 78.

(3) Piazzi - Smyth, *Life and work at the great Pyramid*, T. III, p. 430. Pleyte, *Études égypt.* 1866 p. 123, 136. Quanto a quel *forzare l' indice della bilancia*, radicatissimo vizio anche oggidì, son notevoli le minuziose prescrizioni delle romane leggi per estirparlo: *Duobus digitis summitas lini retineatur* (nel pesare), *tres reliqui liberi ad susceptoren emineant, nec pondera deprimant, nullo examinis libramento servato* (*Cod. Theod.* Lib. XII, T. VII §. I).

(4) Brandis, *Das Münz - Mass.* ec, p. 52.

Digitized by Google

e in tutto il loro lume possibile, all' occhio e al discernimento del giudizioso lettore: riserbandoci a non dissimulare in ultimo, nell' incerta materia e nell' ancipite giudicio, a qual parte preferibilmente inclini la nostra opinione.

31. Veniamo tosto alla prima *media* proposta, di 9gr, 4350. È verisimile assai che venuto l' Egitto in potere dei persiani il legale loro rapporto 1: 13 1/3 fra argento ed oro avesse a essere esteso alla nuova provincia: nella quale ci si era per congettura mostrata la possibile preesistenza del poco diverso rapporto 1:12 4/5. Il passaggio dall' una all'altra proporzione nel reciproco rapporto della valuta metallica avrebbe potuto effettuarsi in due modi: sia scemando il *pak* d' oro, sia crescendo il *kat* d' argento. Ma veggendo il *pak* essere durato intatto fin sotto i Lagidi, direbbesi che la variazione avesse dovuto avvenire nel *kat*. Il cui nuovo valore sarebbe dato dalla proporzione 12 4/5: 13 1/3 :: 9gr, 0920545: x = 9gr, 470 88, vicinissimo all'avvertita media di 9gr, 435.

Confronterebbe colla elevazione dell' argenteo *kat* il sapere che il tributo persiano pagavasi appunto in argento. L' Egitto, coll' Affrica contermine, era gravato di 700 talenti annui d'argento; oltre ad altrettanto in grano e al prodotto della pesca del lago di Meride (1).

Nè farebbe difficoltà la recente istituzione della moneta: quasi che il nuovo numerario persiano avesse potuto soppiantare di tratto l' egizio metallo spendibile a peso. Fra la prima introduzione della moneta e il suo intero ed esclusivo trionfo lunga età dovette passare, di trasformazione e come a dire di trapasso: finchè penetrasse e prevalesse in ogni angolo la nuova valuta, e le rade ed esordienti zecche avessero potuto versare in commercio l' enorme quantità di metallo coniato necessaria alla universale circolazione. E sappiamo in fatti che i tributi di Dario fondevansi in forme d' argilla; per spezzarle poi e dividerle a misura

(1) Herod. III, 91.

Digitized by Google

del futuro bisogno (1): segno che ancora versavansi metalli a peso. Nè sarebbe supponibile del resto che il *gran re* rifondesse i propri conii, o quelli de' satrapi e delle soggette città; struggesse, cioè, la nuova specie che si voleva introdurre. Quasi la moneta fin da' suoi inizii avesse potuto essere di tanto scaduta, come lo fu poi nel basso impero di Roma: quando, per disperazione di poter sceverare ne' tributi la falsa moneta, condannavano gl' imperatori al crogiuolo tutt' insieme la vera (2). Ed anche dopo altri due secoli trovava Alessandro parte metallo coniato, parte in natura, ne' tesori di Persia (3).

Nè d' altronde il sapere che l' egizio tributo d' argento, al pari di tutti gli altri del regno, pagavasi a Dario *al peso di Babilonia* (4), basterebbe a far prova che il vinto paese, non che pensare a riforme de' proprii pesi, avesse dovuto accettare quelli del vincitore. Taccio la tenacissima vitalità degli antichi sistemi di misure e di pesi, e la loro restia natura nel cedere il posto ai novelli; se pure gli Achemenidi posero mano a riforme di questa fatta in Egitto. Ma il vedere tanto del vecchio sistema faraonico essere mantenuto dai Lagidi, è certo indizio che non dovesse aver fatto intero naufragio sotto il giogo persiano. Anzi è di ciò riprova il celebre argento *ariandico*, che costò la vita al suo autore (5): battuto sotto Dario in Egitto non a sistema persiano, ma egizio: segno, che questo non erasi adunque officialmente soppiantato dall' altro.

Per l'avvertita variazione di rapporti fra i due metalli il supposto *pezzo d' argento* faraonico di 3 *kat*, (risultatoci per congettura), sarebbe salito dai *pak* 38 $^2/_5$ ai 40; convertendosi in pretto ottodramma, e fondandosi così non più sul primitivo *kat*,

(1) Herod. III, 96.
(2) *Cod. Theod.* Lib. XII, Tit. VI, Leg. 12, 13; Tit. VII, Leg. 3.
(3) Curtius V, 2; ec.
(4) Herod. III, 89.
(5) *Id.* IV, 166. Queipo, *Essai.* ec. T. I p. 541, 586.

Digitized by Google

ma sul *pak* al pari dell' oro. Ed è notevole che il ricordato argento egizio, attribuito ad Ariande, co' vari suoi pesi di 28^{gr}, 03, 13^{gr}, 64, 3^{gr}, 50, visibilmente riportasi, con più o meno d'esattezza, a questo sistema; e le divisioni sue paiono appunto tagliate sull' ovvia partizione binaria di quel supposto nazionale pezzo d'argento di 40 *pak* in 20, (10), 5 *pak;* dandoci così l' *ottodramma*, il *tetradramma*, la *dramma:* la notissima dramma egizia d'argento, durata ancora sotto i Lagidi.

Vero, od apparente che sia questo complesso di coincidenze ed accordi non può negarsi che non ne sia seducente l' aspetto. Però nella tavola nostra registriamo, nella colonna *G*, i valori teorici de' singoli campioni al ragguaglio della *media* or discussa; e nella prossima colonna *H* segue per debita materia di studio, la serie delle differenze fra i pesi teorici e i reali.

Esaminata la prima delle due *medie*, passiamo alla seconda di 9^{gr}, 5355.

Ha immaginato l'Oppert che, oltre a' pesi derivati da misure d'acqua o di vino, possano avere avuto gli antichi anche ponderali unità d' oro e d' argento ricavate da rispondenti cubi di que' metalli, in esatto rapporto colle unità lineari (1). Benchè questo concetto dell'Oppert non paia aver ricevuto nella esposizione di lui un bastante grado di evidenza e di pratica applicazione, avremo ad incontrare nel capitolo seguente un celebre talento aureo in esatto rapporto con un metallico cubo di oro: talento riferibile appunto al periodo, cui sembrano riportarsi i pesi di Bulaq.

Non abbiamo per verità nessun fumo d' indizio che ci porti a supporre aver potuto introdursi alcun che di simile ancora in Egitto. Ma se, (per ragioni qualsiensi, non assegnabili da noi), si fosse colà sostituito, per la determinazione dell' argentea unità ponderale, al cubito cubo dell' acqua quello d'argento, questo per la specifica gravità del metallo, che è di 10, 4743, avrebbe dato,

---

(1) *L' Étalon* p. 76, 77, 82.

Digitized by Google

in luogo del *migliaio* del primitivo *uten* di 90^{gr}, 920545, una *miriade* di nuovi *uten* di 95^{gr}, 447: vicini molto alla media 95^{gr}, 355 onde parliamo.

La poca probabiliia però che sembra presentare questa supposta sostituzione dell'argento all' acqua a fondamento degli argentei pesi d' Egitto, mi dispensa dal trattenere il lettore in più lungo esame di questa ipotesi. I pesi teorici che ne deriverebbero pei campioni di Bulaq, e le rispettive differenze loro dai reali, veggonsi nelle colonne *I*, *L* della tavola.

32. Detto così delle due *medie* resta a far sperimento ancor della *massima:* non dell'assoluta per altro, di 10^{gr}, 572, quale viene fornita da un de' pesi minori (N. 30), sì bene di quella che risulta dai maggiori (N. 1 - 3); i quali in questa bisogna hanno maggior importanza ed autorità; sia perchè più indicativi per sè, come già fu spiegato; sia perchè proporzionalmente meno esposti al consumo, crescendo in essi i volumi in ragione dei cubi, le superficie solo in ragione de' quadrati.

La *massima* offerta dagli alti pesi di Bulaq è appunto quella di 9^{gr}, 650: che verificasi nel primo di essi.

Un' anomalia, di cui non si avrebbe saputo dare ragione, pare in fatto offerire il vecchio sistema faraonico; poichè avendo *doppia* unità lineare, l' una minore fondata in natura, l'altra maggiore e reale, cioè accresciuta dal re, non avrebbe poi avuto ne' pesi che una *semplice* unità, derivata dalla naturale unità lineare, non dalla regia.

Quel regio rinforzo della popolare unità di lunghezza verisimilmente non dovea avere avuto in mira uno sterile ideale teorico ed aritmetico; ma piuttosto, come già avemmo a notare (1), ebbe a proporsi alcun che di pratico e sostanziale, in vantaggio delle finanze del re. E se veramente si agognò a un lucro sulle misure di lunghezza, come poi si trascurarono quelle di peso, che

---

(1) Pag. 91 - 92.

Digitized by Google

pur son norma di tante e sì importanti contribuzioni, soprattutto metalliche? Al postutto, fosse speculazione finanziaria o semplicemente teorica quel regio aumento del cubito, perchè arrestavasi la riforma alla unità di lunghezza e non discendeva a quella di peso? Perchè, come vi avean due cubiti, *piccolo* e *grande*, volgare e reale, non aveansi ancora due *uten*, maggiore e minore?

L'apparente unicità, monumentale ed epigrafica, del primitivo *uten* conosciuto fin qui, parea troncar la via a potere acconciamente rispondere. Or la comparsa della nuova serie di Bulaq, col suo *uten* più forte, mentre ridesta tutte quelle insolute dimande, sembra portare la cercata risposta con sè.

Innanzi l'apparizione de' nuovi campioni, e la chiara manifestazione del loro *uten* o *kat* più elevato, sarebbe stato difficile il divinare quale, (per analogia colla genesi del *kat* Harris dal cubito volgare), avesse potuto essere la congrua unità di peso derivabile e derivata dal cubito reale. Il cubo d'acqua del piccolo cubito rende la netta *miriade* di *kat* Harris; l'acqueo cubo, e converso, del cubito maggiore soggettato a divisione per 10000, 6000, 3600, 3000, ordinarii divisori degli antichi ne' fondamentali lor cubi o talenti, produce queste varie unità 14^{gr}, 4495, 24^{gr}, 0825, 40^{gr}, 137, 48^{gr}, 165: tutte egualmente senza pratici riscontri. Se non che, in presenza allora di quell'unico *kat* tebano, che parea tenere il campo da solo, gli era inutile cercare geometrici riscontri d'una immaginaria unità regale di peso, della cui esistenza non appariva ombra d'indizio.

Or le apparenze sono diametralmente mutate. A lato del piccolo *kat* Harris è venuto a collocarsi l'altro maggiore di Bulaq: e c'è d'uopo appurare la misura e la provenienza ancora di questo.

Poichè la propria generazione delle unità di peso c'insegna a ricorrere alle unità di lunghezza mediante quelle di capacità, rimettiamo adunque a cimento il cubo del cubito reale; dal quale par ragionevole di doversi aspettare la rinforzata unità del terz'ordine, come ne abbiamo quella del primo.

Digitized by Google

Il peso dell' acqua contenuta in questo cubo sarebbe di 144 703^{gr}, 125 se fosse distillata e alla temperatura di + 4° centigradi: ma la termometrica variante dell' acqua niliaca, già avvertita da noi (1), ridurrebbe quel peso a 144 495^{gr}, 782. E come, per semplicissima e primitiva divisione decimale, il cubo del minor cubito ci dà il netto *migliaio*, la netta *miriade* de' suoi *uten* e *kat* Harris, così è buona presunzione che abbia a ricavarsi lo sperato costrutto dal cubico cubito maggiore suggettandolo, ad altri decimali divisori: a preferenza de' sessagesimali, o duodecimali, od altri, come 12000, 6000, 3600, 3000, che altrove ebbero voga nella suddivisione dei talenti.

Ed ecco in fatti che ad imitazione e riscontro del *migliaio* e della *miriade* che dividendo il cubo minore ne danno i piccioli *uten* e *kat* di 90^{gr}, 920545, e 9^{gr}, 0920545, naturalmente presentansi il *migliaio e mezzo* e la *miriade e mezza* quali ovvii divisori del maggior cubo; onde ricavansi i maggiori *uten* e *kat* di 96^{gr}, 330385 e 9^{gr}, 6330385: vicinissimi, più di quanto mai si fosse potuto aspettare, alla avvertita *massima* di 96^{gr}, 50, o sia 9^{gr}, 650, che ci ha servito di guida.

Il tondo *migliaio* di questo *kat*, o sia 9633^{gr}, 0385 differisce non bene di 17 grammi dal 1.° campione di Bulaq; che probabilmente tiene il grado più elevato negli ordinali numeri di computo del sistema reale, come abbiam veduto lo stesso *migliaio* essere a capo e a fondamento del sistema volgare. Di guisa che questo nuovo sistema di *uten* e *kat* si mostra fedelmente imitativo dell' altro: riuscendo ad esserne come un mero rincaro o rinforzo.

So che anche il semplice azzardo può a volte produrre seducenti rispondenze di date unità cubiche con altre di peso (2); ma troppi indizii paiono in questo caso concorrere ad avvalorare

---

(1) Pag. 159.

(2) Cf. Queipo, *Essai* ec. T. I, p. 572 nota 94.

Digitized by Google

la fiducia di non esser traviati da pericolose illusioni. La ragione analogica, che ne dovea far prevedere l'esistenza di un più forte *uten,* o *kat*, ci scorge a discoprire la genesi di esso, colmando insieme un'avvertita lacuna del sistema egiziano. Uno stretto paralellismo domina in tutto il sistema: la stessa *duplicità* che conoscevamo nelle unità lineari, ed or ci appare nelle ponderali, dovrà svelarcisi poi ancor nelle cubiche in esatto rapporto con quelle. Tanta connessione induce quindi a fidanza che la buona fortuna ci abbia, in questa ricerca importante, posto tra mano il vero filo di guida; e che il nuovo valore del *kat*, 9^{gr}, 633, possa essere proposto alla scienza come accettevole espressione ipotetica della ponderale unità de' campioni di Bulaq: fino almeno a che altri sappia addurre di meglio, o arrecchi prove in contrario.

33. Che i due teorici *kat*, minore e maggiore, emersi da questi studi fossero per sorte, (e contro tutte le previsioni sopra avvertite), riducibili a un solo, non pare per guisa alcuna ammissibile. La serie di Bulaq è del tutto irreduttibile alla troppo debole misura del *kat* Harris: questo poi non meno assolutamente rifiutasi a lasciarsi attrarre nel sistema di quella. È inverosimile affatto, che un sì accurato e conservato campione officiale, che stimasi non aver potuto perdere per l'uso più di 4 grani Troy, ne avesse invece perduti più di 40 per frode: ma più poi è incredibile, che tutte le molteplici e sì strette connessioni sue colla universa metrologia, egizia e straniera, non sien davvero che un mero giuoco del caso.

Questa duplicità per altro di *kat* suscita dubbi e quesiti che, nell'imperfetto stato della scienza, aspetteranno indarno adeguata risoluzione o risposta.

Innanzi tutto può far meraviglia la diversa proporzione dell'aumento nei due sistemi lineare e ponderale. Il *grande* cubito s'accresce d'$^1/_6$ sul *piccolo;* il *maggior kat* invece s'aumenta di soli $^6/_{100}$: i due incrementi stanno fra loro come 50 : 18. La ragione di questa disparità ci è ignota; ma la semplice inesplicabilità dei fatti non li rende men veri. Forse quel minor crescere

Digitized by Google

del *kat*, a paragone del cubito, fu per rotondità di decimale divisione del cubo fondamentale. A ricavarne un *kat* che avesse un $^1/_6$ più del precedente avrebbe bisognato dividere il cubo dell'acqua per 1362: disadattissimo divisore nel sistema egiziano. Poi, in fatto di pesi e di valori, era già un aggio abbastanza considerevole quel 6 per cento: superiore alla romana *vigesima*, ch' era il 5 p. %. A ogni modo a poter scernere le vere cagioni converrebbe essere molto addentro nella politica economia de' faraoni primitivi: e noi non siamo neppure col piè sulla soglia.

La coesistenza di due *kat* suppone che essi si dividessero il campo fra loro. Ma in qual modo? Forse appartennero l' uno all' Alto, l' altro al Basso Egitto? O pure ebbero in entrambi promiscuo uso, uno per alcune merci, l'altro per altre? O forse anche sarebbero stati mai l' uno la misura con cui si riscuotesse dai faraoni, l' altro quella con cui si pagasse da essi; a modo di certe camerali monete di conto de' tempi moderni? Tutto è incertissimo: e lascio ad altri la speranza di apporsi.

La supposta appartenenza del *kat* Harris a Eliopoli, nel Delta, e il suo ritrovamento a Tebe, sull' alto Nilo, potrebbe far crederlo d' uso comune in tutto l' Egitto. Se non che il trovare poi a Menfi l' altro *kat* più forte, ingerisce il sospetto che questo esser potesse per avventura menfitico, l' altro tebano. Nel qual caso il *tesoro* del peso Harris, non apparterebbe più alla On settentrionale, ma alla meridionale; cioè non più ad *Heliopolis*, sì bene ad *Hermonthis:* nella quale si ricorda appunto una pubblica trapeza al tempo dei Lagidi (1). Nè una diversità di misure fra i due reami farebbe meraviglia: è la supposizione, cui hanno a volte ricorso i metrologi per dar ragione dei due cubiti (2). Anche Strabone ricorda la diversità della lega (*schoene*) egizia, che era doppia da Menfi a Tebe, che da Tebe a Siene (3); ma non è di-

(1) Revillout, *Chrestomathie démotique* 1878 p. LXIV.
(2) Queipo, *Essai* T. I, p. 63. Lepsius, *Die Altaegyptische Elle* ec. p. 83.
(3) *Geogr.* Lib. XVII.

Digitized by Google

versità spiegabile per la diversità del reame; poichè l'alto Egitto avrebbe dunque avuto ambe quelle itinerarie misure, l'una a tramontana, l'altra a mezzoggiorno di Tebe.

Con tutto ciò la geografica disgiunzione dei due *kat* è tutt'altro che certa: non essendo punto sicuro che tutti que' campioni di Bulaq appartengano al maggiore dei due *kat*. Se ambi i *kat* avessero avuto promiscuo uso a Menfi, i pesi di Bulaq potrebbero appartenere a due serie, compenetrate o sia confuse in una. Sceverarle ora, stante la poca lor differenza, sarebbe impossibile: sol potrebbe supporsi che i più forti eccessi nell'espressione del *kat* appartenessero alla serie *alta*, i più gravi diffetti alla *bassa*. Nè l'irreconoscibilità attuale de' campioni, per mancanza di distintive note o leggende, basta ad escludere la possibilità del doppio tipo ponderale in antico: quasi non avesse potuto praticamente distinguersi l'uno dall'altro campione. Anche il numero dei *kat* non è segnato su que' campioni; e dovea dunque riconoscersi ad occhio. Oggidì pure, dove usan libbre diverse, ciascuno si tiene e riconosce la serie che importa al suo commercio; e chi avesse fra noi a confondere anepigrafi campioni di *libbre*, *oncie*, ec. de' nostri due modenesi sistemi, della libbra comune e di quella da argentiere, verrebbe in apparenza a formare, per la poca differenza dei tipi, di due serie una sola.

Anche l'assoluta assenza ne' testi egizii di qualunque epiteto del *kat*, che valesse a distinguere tra debole o forte: a somiglianza de' discretivi aggiunti della mina assira, *mina bianca*, *mina nera*, *mina di Karkemis*, *mina del paese*, *mina del re* (1); non è bastevole indizio dell'unicità del *kat*, o dell'esclusiva appartenenza di ciascun dei due a un solo de' due reami. Dovunque, secondo la varietà delle merci, ha luogo un vario sistema di pesi e misure, basta nell'uso comune l'enunciazione della merce a far distinguere, senz'altri epiteti, la qualità della misura e del peso.

---

(1) Oppert, *L'Étalon* ec. p. 83.

Digitized by Google

Quando p. e. in Modena si nomina *una libbra di carne*, *una libbra d' argento*, *un braccio di stoffa*, *un braccio di legname*, ognuno sa che la prima libbra è di 340^{gr}, 456, la seconda di 361^{gr}, 850, che l' un braccio è di millimetri 523, l' altro di 633. E avrebbe torto quel metrologo dell' avvenire che dalla identità del vocabolo, e dall' assenza di epiteti distintivi, volesse argomentare l' identità del peso e della misura.

Tutto è qui pertanto incertezza: anzi un altro dubbio ancora si aggiugne. Se il maggiore dei due *uten* veramente origina dal cubito reale, esso adunque parrebbe aver a essere il peso regio: or come spiegasi che da un tesoro del re veggasi invece uscire l' altro *uten* minore?

34. Fra la tanta penuria di opportune notizie in che versiamo io son tutt' altro che in grado di avventurare risposte; e più volentieri vorrei a mia volta indirizzare dimande agli eruditi egittologi.

È egli ben certo che il *tesoro d' On*, onde il pesetto Harris proviene, fosse davvero l' *aerarium regis* (1), o non piuttosto per sorte un sacro tesoro d' un tempio? Vo' dire del famoso tempio d' Eliopoli appunto, o sia d'On, ricordato sin dall'età di Giacobbe in un biblico passo che ne rivela tutta la preminente importanza (2)? Non sarebbe egli probabile che il tesoro della città

---

(1) *Genes.* XLVII, 14.

(2) Un celebre matrimonio, maneggiato dal Faraone, può darci un giusto concetto dell' importanza del tempio d' Eliopoli; e della dignità che dovea derivarne al suo sacerdote supremo. A Giuseppe, proclamato arbitro di tutto l' Egitto, vestito di porpora, munito del suggello reale, montato sul carro del re, *uno tantum regni solio* inferiore al monarca, Faraone destina una degna sposa: *Aseneth filiam Putiphare, sacerdotis Heliopoleos* (*Genes.* XLI, 41 - 45); che dovea essere l' ἀρχιερεὺς ricordato da Diodoro (*Bibl. Hist.* Lib. I, §. 70). E a quel passo biblico può servire di commento la testimonianza dell' istorico siculo: che, cioè, nell' antico Egitto teneva il sacerdozio il primato di onore e di autorità dopo del re (*Ib.* 73). La preferenza poi, che in quel passo del Genesi pare accor-

Digitized by Google

sacra del *Sole*, anzichè essere quello del re, fosse quello del nume? E l' altra poco avvertita epigrafe, (riportata dal Madden, e interpretata dallo Smith), che sull'alto del nostro cimelio par tenervi il posto di onore: « beloging to the Sun; » *appartenente al Sole* (1); non potrebb' ella avere un esplicito rapporto col premesso supposto?

Se così fosse, ch' io non so, l' *uten* Harris non sarebbe già il *regio*, ma il *sacro*; cioè, non la civile unità, rifatta a balìa dell' autocrate, ma la nazionale primitiva: tramandata dall' antichità e custodita negl' inviolati penetrali del tempio sotto la salvaguardia del nume. E bene starebbe all'ombra del santuario quella vetusta e indipendente misura; quasi ad affermazione e suggello di quell' assoluta immunità da ogni regio diritto e tributo, onde fu sempre privilegiato il sacerdozio nell' antichissimo Egitto (2). Oltre di che anche nella sacra liturgia avean luogo pesi e misure, come nel rituale ebraico (3), cosi nell' egizio: poniamo nelle manipolazioni di preziosi timiami, nelle prescrizioni di offerte o di prestazioni, nelle confezioni di sacre vivande, di che ci hanno serbato memoria i ricettarii della sacra officina del santuario di Edfu, e i registri di spesa e consumo del tempio di Medinet-Habu (4). Per le quali bisogne la scrupolosa religiosità ed immobilità egizia avrà certo accolte e sancite le più vetuste misure, consacrate dall' uso della veneranda antichità.

---

darsi al jerarca d' Eliopoli, (la città sacra di *Phre*), dovea dipendere dalla preminenza e supremazia del tempio e del suo sacerdotale collegio. In fatti vediamo questa sacra città avere la precedenza sulle stesse metropoli nell' inviare, insieme con Tebe e con Menfi, gli elettissimi dei giudici per l' areopago egiziano (Diod. Sic. Lib. I, §. 75).

(1) *Hist. of jew, coin* p. 277.

(2) Diod. Sic. Lib. I, § 73. Cf. *Genes.* XLVII, 22.

(3) *Exod.* XXX. 23, 24, 34. *Levit.* VI, 20; VII, 10; XIV, 10; ec.

(4) Dümichen, *Recueil de textes*, II, Pl. 82, 83, 88. *Altaegyptische Kalenderinschriften* Pl. II. Chabas, *Détermination métrique* ec. p. 78. *Recherches* p. 7 seg.

Digitized by Google

Poichè era sacro e solenne nelle religioni prische il culto dell' antico, e la immutabile osservanza degl' immemorabili riti degli avi; come, ad esempio, il rifiuto del ferro e la preferenza del bronzo; il mantenuto uso di strumenti di selce (1); la prelezione di rozze pietre impolite nell' erezione di altari (2).

E a proposito di questa, vera o apparente, qualificazione di *sacro* nel minore e più antico dei due *uten* egizii, è notevole che il siclo mosaico derivato appunto da esso, fu dal profeta similmente qualificato di *sacro*, e affidato alla custodia e tutela del santuario (3).

Qual fosse poi la pratica distinzione, nell' uso ordinario, dei due *uten* egizii non ci è meglio nota, (giova ripeterlo), di quel che lo sia quella dei due cubiti: e resterà fra i cento altri quesiti che la metrologia faraonica riserba agli studi e alle riflessioni dell' avvenire.

35. Quanto è riuscito insopportabilmente prolisso questo interminabile capitolo *de' pesi faraonici*, per la necessità di considerare e discutere il non facile argomento in ogni sua parte e in tutti i suoi molteplici aspetti, altrettanto sarà breve pur troppo l' epilogo dei risultati ottenuti. De' quali, pochi raggiungono il grado della certezza scientifica; gli altri non escon dall' ordine delle congetture prababili. Ed eccoli.

I.° Due pesi, *uten* e *kat*, rispettivamente decuplo e decimo, ebbe l' Egitto faraonico; senz' altre nominali unità multiple del primo, o summultiple del secondo; e senz' uopo di computare per *mine* o *talenti*.

II.° Il peso dell' *uten*, manifestato da un prezioso campione del Museo Harris, è il *millesimo* d' un cubo d' acqua avente il piccolo, o naturale cubito per lato.

---

(1) Cf. *Exod.* IV, 25. *Josue.* V, 2.
(2) Cf. *Deuter.* XXVII, 5, 6.
(3) *Exod.* XXX, I3. *Levit.* V, 15; XXVII, 3, 25; ec.

Digitized by Google

III.° Onde il peso teorico dell' *uten* riesce di 90^{gr}, 920545; quello del *kat* di 9^{gr}, 0920545.

IV.° Nell' ordine de' pesi le quantità inferiori al *kat* si esprimono in frazioni ordinarie di questo. Ne abbiam trovato, in pesature d' oro, il $^1/_2$ ed il $^1/_9$.

V.° È diversa la partizione ponderale nell'ordine della valuta metallica; ch'ebbe unità non coniate, di bronzo, d'argento e d'oro.

VI.° La spendibile unità di computo del bronzo fu l' *uten*; non più diviso in *kat*, per quanto pare, ma in altre frazioni diverse, delle quali conosciamo il $^1/_2$ e il $^1/_4$.

VII.° Nella valuta d' argento trovasi usato come unità di conto, pe' maggiori prezzi, l' *uten*; e pe' minori, un *pezzo d' argento*, del quale non si sa nè dicifrare il nome, nè determinare il valore. Nelle frazioni del *pezzo d' argento* conosciamo il $^1/_2$: quelle dell' *uten d' argento* ci sono ignote.

VIII.° Nella valuta d' oro non ci è occorso, come unità di computo, l' *uten*; ma solo un *pezzo d' oro*, egualmente ignoto, di nome e valore, che il *pezzo d' argento*; e colla stessa frazione del $^1/_2$.

IX.° Sol ci è noto il ragguaglio tra i *pezzi d' oro* e quelli *d' argento*: poichè 3 di quelli equivalgono a 5 di questi.

X.° Un piccolo peso dell' oro, *centoventottesimo* d' *uten*, si è rivelato, sotto nome di *pak*, in un monumento d' Etiopia.

XI.° Una numerosa serie di pesi egizii del Museo di Bulaq, di bassa età, manifesta l' esistenza d' un *uten* più forte.

XII.° Non vacilla però la coesistenza, anzi la precedenza dell' *uten* più debole, rivelato dal campione Harris in accordo colla primitiva unità lineare.

A questi pochi punti acquisiti alla scienza possono aggiungnersene alcuni altri di men solido acquisto; perchè fondati, in mancanza di dati migliori, su congetture verisimili e induzioni probabili, le quali aspettano più sicuro lume dal tempo.

a) Benchè manifestatosi in una epigrafe etiopica, il *pak* potrebbe forse essere un *obolo* egizio.

Digitized by Google

b) E potrebb'essere indizio d'un faraonico rapporto 1 : 12 $^4/_5$ tra l'argento e l'oro. Di che conseguirebbe essere il *pak* l'aureo equivalente del *kat* d'argento.

c) Quanto ai due *pezzi d'oro* e *d'argento* una non dispregevole divinazione parrebbe assegnare al primo il peso di 5 *pak,* pari alla dramma tolemaica; al secondo quello di 3 *kat,* eguali per singolare coincidenza all'oncia romana.

d) Quanto al più forte *uten*, manifestato dai pesi di Bulaq, la più verisimile supposizione è, che per ventura derivi dal cubito *reale;* come il primitivo *uten* più debole deriva dal primitivo cubito *volgare.* Il $^1/_{1000}$ del cubo d'acqua del piccolo cubito è l'*uten* piccolo; il $^1/_{1500}$ del cubo d'acqua del maggior cubito sarebbe l'*uten* maggiore. Quindi il suo peso teorico riuscirebbe di 96^{gr}, 330 38.

e) La pratica distinzione dei due *uten* negli usi ordinarii è ignota; come lo è quella dei due cubiti. Forse il minore e più antico dei due *uten* potrebb' essere il peso *sacro;* l'altro il peso *reale.*

Continua (*) PIETRO BORTOLOTTI.

(*) Vedi l' *Indice* alla pagina seguente e la nota appostavi in calce.

936,183

Digitized by Google

INDICE

PREAMBOLO (pag. 3).

I. Cubito. — **1** Origine e antichità del cubito (pag. 4). — **2** Scoperta di cubiti faraonici (pag. 5), — **3** giudicati dal Lepsius imitazioni sepolcrali (pag. 9). — **4** Loro forma e divisione (pag. 11); — **5** e ingegnosa suddivisione del digito (pag. 12). — **6** Digito, palmo, spanna, (pag. 16), — **7** *ser*, *remen*, (pag. 19), — **8** sono subalterne misure desunte dalla mano e dal braccio (pag. 21). — **9** Cubiti *piccolo* e *reale* (pag. 24); — **10** irregolari lor partizioni intruse (pag. 26). — **11** Qual dei due sia il primitivo (pag, 29); — **12** derivazione del *reale* dal *piccolo* (pag. 31); — **13** contraria opinione del Lepsius (pag. 32); — **14** e conseguente sua ricostruzione del cubito (pag. 34) — **15** irta di difficoltà (pag. 34) — **16** e contraddetta da un cubito originale (pag. 37), — **17** diviso per palmi isometri (pag. 38). — **18** Altri cubiti posteriori ai faraoni (pag. 40). — **19** Rapporto de' cubiti egizii con quelli di Babilonia (pag. 42), — **20** e d'Assiria (pag. 43), — **21** e coll' olimpico, confuso a torto col *piccolo* egizio (pag. 51); — **22** ma che parrebb' essere piuttosto il *piccolo* assiro (pag. 53), — **23** ad onta di apparenze contrarie (pag. 54), — **24** il cui tentato chiarimento rende non improbabile la detta genesi sua (pag. 57). — **25** Riepilogo e chiusa (pag. 60).

II. Pesi Faraonici. — **1** *Uten* e *Kat* (pag. 65) — **2** rivelano il lor peso per la scoperta d' un campione ufficiale del Museo Harris (pag. 69) — **3** creduto estraneo a tutti i noti sistemi (pag. 73). — **4** Non unità multiple dell' *Uten*, o summultiple del *Kat*, nel sistema egiziano (pag. 75). — **5** Retrospettivo sguardo alla presumibile origine della primitiva unità ponderale (pag. 79), — **6** della bilancia (pag. 86) — **7** e del divisivo sistema dei pesi (pag. 92). — **8** L' *Uten* è il *millesimo* del peso del primitivo cubito cubo d' acqua niliaca (pag. 95); — **9** in pieno accordo col decimale sistema d' Egitto (pag. 101), — **10** e con esatta acconcezza d' espressione geometrica (pag. 107); — **11** e senza cronologica incongruità di forma nel campione Harris, onde quell' *Uten* è ricavato (pag. 109). — **12** Il *Kat* e i suoi divisori (pag. 113). — **13** Il *Pak, centoventottesimo d' Uten* (pag. 116), — **14** forse è l' aureo equivalente del *Kat* d' argento (pag. 118). — **15** Faraoniche unità di conto, enea, argentea, aurea (pag. 122). — **16** Insussistenza d' una supposta proporzione egizia 5 : 3 tra oro ed argento (pag. 126), — **17** cui non suffragano eccezionali esempi adducibili (pag. 130), — **18** anzi oppongonsi biblici riscontri (pag. 132) — **19** e caldaici ed egizii (pag. 134). — **20** Induzioni sulla produzione argentifera (pag. 138). — **21** Forse il faraonico rapporto tra i due nobili metalli fu 1 : 12 $^{1}/_{2}$ (pag. 139); — **22** onde potrebbe riflettersi alcun lume sugl' ignoti *pezzi d' oro* e *d' argento* faraonici (pag. 140); — **23** de' quali il primo potreb' essere di 5 *Pak* d' oro, l' altro di 3 *Kat* d' argento (pag. 143): — **24** congetturali valori non incongrui per sè (pag. 145), — **25** ne' pe' reciproci rapporti loro, o delle presumibili loro frazioni (pag. 147). — **26** Altre osservazioni relative (pag. 150). — **27** *Uten* di bronzo, e rapporto di questo spendibile metallo cogli altri due (pag. 152). — **28** Una serie di pesi del Museo di Bulaq (pag. 156) — **29** rivela un *Uten* più forte (pag. 159), — **30** il cui teorico valore, ricercato per via di *medie* e di *massima*, (pag. 161) — **31** potrebbe parere riferibile a cangiato ragguaglio tra oro ed argento (pag. 164), — **32** ma più probabilmente ha più lontana origine da cubatura del cubito *reale* (pag. 167); — **33** così che da' due cubiti, piccolo e regio, avrebbero paralella genesi i due *Uten*, debole e forte (pag. 170): — **34** forse l' un *sacro*, l' altro *reale* (pag. 173). — **35** Riepilogo (pag. 175).

N.B. *La stampa de' seguenti capitoli continua nel T. XIX di queste* Memorie. *Però innanzi la pubblicazione del volume vedranno la luce gli estratti.*

Digitized by Google

INDICE DEL VOLUME

Quadro delle Cariche ed Elenco dei Soci . . . pag. V

Relazioni dell' anno accademico 1877 - 78

Programma pel Concorso ai Premi d' onore dell' anno 1877 - 78 . . . . . pag. XIII
Atto di Aggiudicazione dei Premi d' onore del Concorso 1876 - 77 . . . . . » XVI
Adunanze Generali . . . . . » XVII
Adunanze delle Sezioni . . . . . » XIX
Sunti delle Adunanze accademiche dell' anno 1818-19 *a tutto il* 1840 (continuazione) . . . . . » XXVII

Libri ed opuscoli pervenuti alla R. Accademia nell' anno accademico 1877 - 78

Accademie, Istituti e Corpi morali italiani . . . pag. LXI
Accademie, Istituti e Corpi morali stranieri . . » LXIII
Autori italiani . . . . . » LXV
Autori stranieri . . . . . » LXX

Memorie della Sezione di Scienze

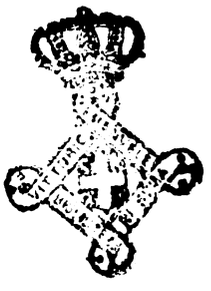
MALAVASI LODOVICO — Sulla facoltà elettromotrice dell' alluminio . . . . . pag. 3

Digitized by Google

RAGONA DOMENICO — Andamento diurno e annuale della velocità del vento . . . . . pag. 23
» Appendice I.ª . . . . . » 115
» Appendice II.ª . . . . . » 119
FAVARO ANTONIO — Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni . . . . . » 127
» Appendice . . . . . » 285
» Avvertenza . . . . . » 331
CASARINI GIUSEPPE — Osservazioni e commentarii sopra vari punti di chirurgia . . . . . » 333

Memorie della Sezione di Lettere

SALIMBENI LEONARDO — Relazione degli Atti dell' anno accademico 1876 - 77 . . . . . pag. 3
CAVASOLA GIANNETTO — L' emigrazione e l' ingerenza dello Stato (Memoria premiata nel Concorso 1876 - 77) . . . . . » 17
BORTOLOTTI PIETRO — Del primitivo Cubito egizio e de' suoi geometrici rapporti colle altre unità di misura e di peso egiziane e straniere . . . . . » 63
» I.° Cubito . . . . . » 64
» II.° Pesi Faraonici . . . . . » 125



Digitized by Google

Digitized by Google